

1. (Power series method) จงหาผลเฉลยทั่วไปหรือผลเฉลยเฉพาะสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ โดยใช้วิธีกระจายอนุกรมกำลัง
 - 1.1. $xy'' = y$
 - 1.2. $xy'' = y'$
 - 1.3. $y'' = xy + 1, y(0) = 0, y'(0) = 1$
 - 1.4. $y'' + xy' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$
2. (Frobenius method) จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ โดยใช้วิธีของโฟรเบนิอุส
 - 2.1. $4x^2y'' + 4xy' - y = 0, x > 0$
 - 2.2. $x^2y'' + 3xy' = 0, x > 0$
 - 2.3. $x^2y'' - 3xy' + (4 - x)y = 0$
 - 2.4. $x^2y'' + xy' + (x - 1)y = 0$
3. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แต่ละข้อต่อไปนี้
 - 3.1. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0$
 - 3.2. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 3)y = 0$
4. สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงตรวจสอบว่าจุด x_0 เป็นจุดสามัญหรือจุดเอกฐาน ในกรณีที่เป็นจุดเอกฐานจงตรวจสอบว่าเป็นจุดเอกฐานปกติหรือไม่
 - 4.1. $y'' + xy' + y = 0, x_0 = 0$
 - 4.2. $4xy'' + 2y' + y = 0, x_0 = 0$
 - 4.3. $y'' + x^2y = 0, x_0 = 0$
 - 4.4. $(x^2 - 1)y'' + 8xy' + 12y = 0, x_0 = 0$
 - 4.5. $9x^2y'' + 9xy' + (9x^2 - 1)y = 0, x_0 = 0$
 - 4.6. $y'' - 2(x + 3)y' - 3y = 0, x_0 = -3$
 - 4.7. $(1 - x^2)y'' + y' + 2y = 0, x_0 = -1$
 - 4.8. $x(1 + x)y'' + (x + 5)y' - 4y = 0, x_0 = 0$
 - 4.9. $x^2y'' - (x + 2)y = 0, x_0 = 0$
5. สมการ Lamé-Emden $xy'' + 2y' + xy^n = 0$ ปรากฏในการศึกษาดาราศาสตร์ กรณี $n = 0$ สมการมีผลเฉลยเป็นพหุนาม degree 2 ที่สอดคล้องเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y(0) = 1, y'(0) = 0$ จงหาผลเฉลยในกรณีดังกล่าว
6. กำหนดให้สมการแต่ละข้อต่อไปนี้ มีผลเฉลยในรูปพหุนาม degree n จงหาผลเฉลยในรูปพหุนามดังกล่าว
 - 6.1. $y'' - 2xy' + 2ny = 0, n = 3$
 - 6.2. $xy'' + (1 - x)y' + ny = 0, n = 2$
 - 6.3. $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0, n = 2$
7. พิจารณาสมการ $x^3y'' + x(x + 1)y' - y = 0$ จงแสดงว่า $x_0 = 0$ เป็นจุดเอกฐานไม่ปกติ จงหาผลเฉลยที่อยู่ในรูปอนุกรม $y = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-n}$