# สมการเอกพันธ์สัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

พิจารณาสมการอันดับสองเชิงเส้นเอกพันธ์

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{1}$$

โดย $a, b, c$ เป็นค่าคงตัวและ $a \neq 0$ จากทฤษฎีบทในหัวข้อที่แล้วผลเฉลยทั่วไปหาได้โดยหาผลเฉลยหลักมูลของสมการ

ในการหาผลเฉลยหลักมูลของสมการ (1) จะใช้**การคาดเดาผลเฉลย**

สมมติมีฟังก์ชัน

$$y(t) = e^{mt}$$

เป็นผลเฉลยของสมการ (1) โดย $m$ เป็นค่าคงตัว

**บทตั้ง** ถ้า $m$ เป็นค่าคงตัวและ

$$y(t) = e^{mt}$$

สอดคล้องสมการ

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{1}$$

จะได้ว่า $m$ สอดคล้องกับสมการกำลังสอง

$$am^2 + bm + c = 0 \tag{2}$$

<u>บทพิสูจน์</u> แทน $y(t) = e^{mt}$ ลงในสมการ (1) ได้ว่า

$$am^2e^{mt} + bme^{mt} + ce^{mt} = 0$$

$$e^{mt}(am^2 + bm + c) = 0$$

แต่เนื่องจาก $e^{mt} \neq 0$ ดังนั้นได้ว่า $m$ ต้องสอดคล้อง

$$am^2 + bm + c = 0$$

นั่นก็คือ $m$ สอดคล้องกับสมการ (2)

**บทนิยาม** เรียกสมการ (2) ว่า **สมการลักษณะเฉพาะ** (Characteristic equation) หรือ **สมการช่วย** (Auxiliary equation) ของสมการสัมประสิทธิ์ค่าคงตัว (1)

แก้สมการช่วยจะได้ว่า

$$m = m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ซึ่งเรียกว่า**รากของสมการช่วย**

มีสามกรณีที่จะต้องแยกพิจารณาได้แก่

1) $m_1, m_2 \in \mathbb{R}, m_1 \neq m_2$ **รากจริงแตกต่างกัน**
2) $m_1 = m_2 \in \mathbb{R}$ **รากจริงซ้ำ**
3) $m_1, m_2 \in \mathbb{C}, m_2 = \overline{m_1}$ **รากเชิงซ้อนคู่สังยุติ**

**รากจริงแตกต่างกัน** กรณีนี้เกิดขึ้นเมื่อ

$$b^2 - 4ac > 0$$

โดย **บทตั้ง** เราได้ว่า

$$e^{m_1 t}, e^{m_2 t}$$

เป็นผลเฉลยของ (1)

พิจารณารอนสเกียน

$$W(e^{m_1 t}, e^{m_2 t}) = e^{m_1 t} e^{m_2 t}(m_2 - m_1) \neq 0$$

ดังนั้น $e^{m_1 t}, e^{m_2 t}$ เป็นผลเฉลยหลักมูลของสมการ (1)

**ทฤษฎีบท** ถ้ารากของสมการช่วยของ ODE

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{1}$$

เป็นจำนวนจริงแตกต่างกัน $m_1, m_2$ จะได้ว่า

$$\tilde{y}(t) = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t} \quad (t \in \mathbb{R})$$

เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (1)

**ตัวอย่าง** จงหาผลเฉลยหลักมูล $y_1, y_2$ ของสมการ

$$y'' - y' - 2y = 0$$

โดยการแก้สมการช่วย  พร้อมทั้งตรวจสอบว่าฟังก์ชันที่ได้เป็นผลเฉลย

<u>วิธีทำ</u>

**ตัวอย่าง** จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น

$$2y'' + y' - y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$$

วิธีทำ

**รากจริงซ้ำ** กรณีนี้เกิดขึ้นเมื่อ

$$b^2 - 4ac = 0$$

และได้ว่ารากของสมการช่วยคือ

$$m_1 = m_2 = m = -\frac{b}{2a}$$

โดย **บทตั้ง** ได้ว่า $y_1(t) = e^{mt}$ เป็นผลเฉลยของ (1)

ต่อไปจะคาดเดาอีกผลเฉลยหนึ่งในรูป

$$y_2(t) = t^k y_1(t)$$

แทนลงในสมการ (1) จัดรูป และใช้ $m = -b/2a$ ได้

$$a(k(k-1)t^{k-2} + 2kt^{k-1}m) + bkt^{k-1} = 0$$
$$ak(k-1)t^{k-2} = 0$$

จะเห็นได้ว่า $k = 1$ เป็นค่าที่เหมาะสม ดังนั้น

$$y_2(t) = te^{mt}$$

เป็นอีกผลเฉลย ค่ารอนสเกียน

$$W(e^{mt}, te^{mt}) = e^{2mt} \neq 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

**ทฤษฎีบท** ถ้ารากของสมการช่วยของ ODE

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (1)$$

เป็นจำนวนจริงซ้ำกัน $m_1 = m_2 = m$ จะได้ว่าผลเฉลยทั่วไปของ ODE (1) คือ

$$\tilde{y}(t) = C_1 e^{mt} + C_2 t e^{mt} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

**ตัวอย่าง** จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

วิธีทำ

**ตัวอย่าง** จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \ \ y'(0) = 3$$

วิธีทำ

**รากเชิงซ้อนคู่สังยุค** กรณีนี้เกิดขึ้นเมื่อ

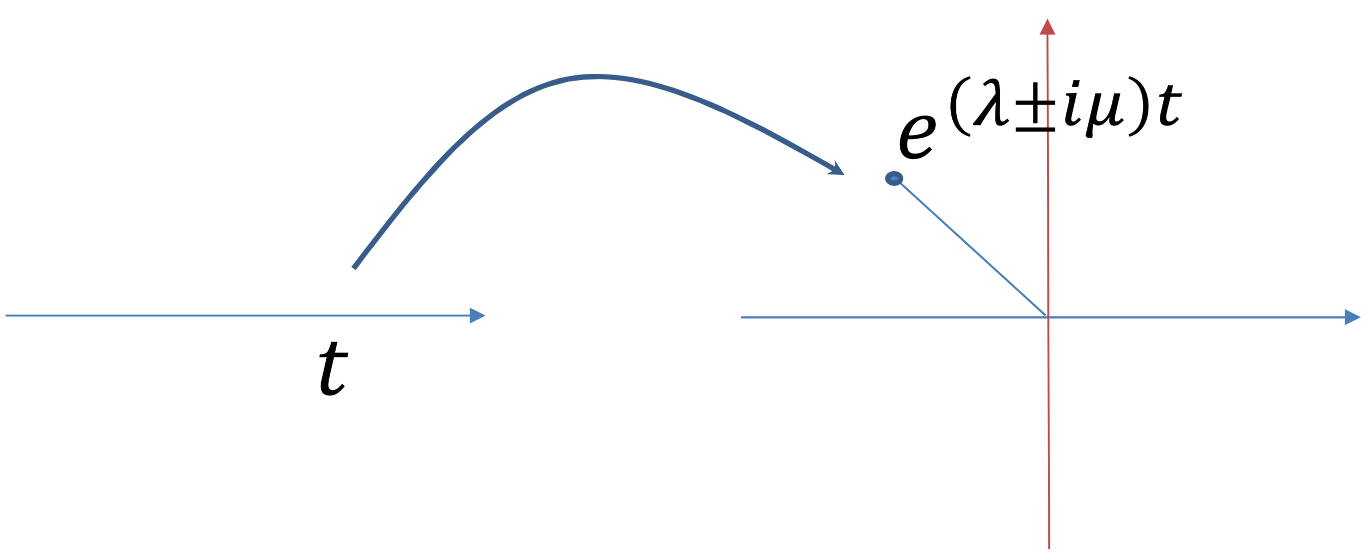
$$b^2 - 4ac < 0$$

โดย $m_1, m_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนคู่สังยุค เพื่อความสะดวกเราจะเขียนทั้งสองจำนวนในรูป

$$m_1 = \lambda - i\mu, \quad m_2 = \lambda + i\mu$$

โดย $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}$ และ $\mu \neq 0$

ในกรณีนี้ฟังก์ชัน exp ที่คาดเดาเป็นฟังก์ชันที่มีค่าเป็นจำนวนเชิงซ้อน



ในที่นี้เราต้องการหาผลเฉลยของ ODE (1) ที่เป็นฟังก์ชันค่าจริง   เราจะใช้เอกลักษณ์ของ Euler:

$$e^{\lambda+i\mu} = e^{\lambda}(\cos\mu + i\sin\mu)$$

ให้

$$y_1 = e^{m_1 t} = e^{(\lambda-i\mu)t}, \quad y_2 = e^{m_2 t}e^{(\lambda+i\mu)t}$$

พิจารณาฟังก์ชัน

$$z_1(t) = \frac{1}{2}y_1(t) + \frac{1}{2}y_2(t) = e^{\lambda t}\cos\mu t$$

$$z_2(t) = -\frac{1}{2i}y_1(t) + \frac{1}{2i}y_2(t) = e^{\lambda t}\sin\mu t$$

**ทฤษฎีบท** ถ้ารากของสมการช่วยของ ODE (1) เป็นจำนวนเชิงซ้อน $m_{1,2} = \lambda \pm i\mu$ จะได้ว่า

$$\tilde{y} = e^{\lambda t}(C_1\cos\mu t + C_2\sin\mu t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

เป็นผลเฉลยทั่วไปของ ODE (1)

<u>บทพิสูจน์</u> จากสมบัติเชิงเส้นของ ODE (1) ได้ว่า $z_1, z_2$ เป็นผลเฉลยของสมการ (1) ด้วย

เพียงพอที่จะแสดงว่า $z_1, z_2$ เป็นผลเฉลยหลักมูลของสมการ (1)  คำนวณ

$$z_1' = \lambda z_1 - \mu z_2, \quad z_2' = \lambda z_2 + \mu z_1$$

$$z_1'' = \lambda^2 z_1 - 2\lambda\mu z_2 - \mu^2 z_1$$

$$z_2'' = \lambda^2 z_2 + 2\lambda\mu z_1 - \mu^2 z_1$$

แทน $z_1(t) = e^{\lambda t}\cos\mu t$ ในสมการ (1) ได้

$$\begin{aligned} &a z_1'' + b z_1' + c z_1 \\ &\quad = (a\lambda^2 - a\mu^2 + b\lambda + c)\tilde{y}_1 \\ &\qquad -(2a\lambda\mu + b\mu)\tilde{y}_2 \end{aligned}$$

จากสูตรรากของสมการช่วยได้ว่า

$$\lambda = -\frac{b}{2a}, \quad \mu = \frac{1}{2a}\sqrt{4ac - b^2}$$

ดังนั้น

$$a\lambda^2 - a\mu^2 + b\lambda + c = 0, \qquad 2a\lambda\mu + b\mu = 0$$

เพราะนั้น $z_1$ สอดคล้องสมการ (1)

ในทำนองเดียวกันได้ว่า $z_2$ ก็เป็นผลเฉลยของสมการ (1) ด้วย

สามารถแสดงได้โดยตรงว่ารอนสเกียนไม่เป็นศูนย์ เพราะฉะนั้น $z_1, z_2$ เป็นผลเฉลยหลักมูล

**ตัวอย่าง** จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 3, y'(0) = 7$$

<u>วิธีทำ</u>

## ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์

หัวข้อต่อไปจะศึกษาสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธ์

$$ay'' + by' + cy = f(t) \quad (t \in I) \tag{3}$$

โดย $a, b, c$ เป็นค่าคงตัว $a \neq 0$ และ $f$ เป็นฟังก์ชัน

**บทนิยาม** ให้ $h: I \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์

นิยามฟังก์ชัน $P[h]$ โดย

$$P[h](t) = ah''(t) + bh'(t) + ch(t) \quad (t \in I)$$

จะเห็นได้ว่า $P$ เป็นฟังก์ชันที่ส่งฟังก์ชัน $h$ ไปเป็นฟังก์ชัน $P[h]$ โดยมีการคำนวณอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ของ $g$

เรียก $P$ ว่า **ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์**

ในทำนองเดียวกันจะนิยามตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์สำหรับสมการอันดับที่ $n$

$$a_n(t)y^{(n)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t)$$

คือ

$$P[h](t) = a_n(t)h^{(n)} + \cdots + a_1(t)h' + a_0(t)h$$

เพื่อความสะดวกจะให้สัญลักษณ์

$$D = \frac{d}{dt}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dt^2}, \dots, D^k = \frac{d^k}{dt^k}, \dots$$

ดังนั้นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์สำหรับสมการ (1) เขียนได้เป็น

$$P[h] = aD^2h + bDh + ch$$

หรือเขียนสั้น ๆ เป็น

$$P[h] = (aD^2 + bD + c)h$$

**ตัวอย่าง** สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์

$$2y'' + 3y' + 5y = te^{-t}$$

เขียนในรูปตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ได้เป็น

$$(2D^2 + 3D + 5)y = te^{-t}$$

<u>หมายเหตุ</u> ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์

$$ay'' + by' + cy = f(t) \quad (1)$$

เราต้องการหาผลเฉลยที่หาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับ 2 ดังนั้น ฟังก์ชันที่จะเป็นผลเฉลยได้จะมีสมบัติว่า

$$\frac{d^2}{dt^2}y = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

หรือเขียนได้ในรูปตัวดำเนินการเป็น

$$D^2y = D(Dy)$$

เพราะฉะนั้นตัวดำเนินการ $D^2, D$ สัมพันธ์กันโดย

$$D^2 = D \circ D$$

ในทำนองเดียวกัน ได้ว่า

$$D^2h = D(Dh)$$
$$D^3h = D\big(D(Dh)\big)$$
$$D^kh = D\big(D(\cdots(Dh)\cdots)\big)$$

**ตัวอย่าง** จงแสดงว่า

$$D^2 + 3D + 2 = (D+1)(D+2)$$

<u>วิธีทำ</u>

**ตัวอย่าง** พิจารณาสมการ

$$2y'' + 3y' + y = 5\sin t$$

จงใช้สมการช่วยของสมการเอกพันธ์

$$2y'' + 2y' + y = 0$$

เขียนสมการในรูปตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์

วิธีทำ

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์

$$ay'' + by' + cy = f(t) \qquad (1)$$

เขียนในรูปตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ได้

$$(aD^2 + bD + cD)y = f(t) \qquad (2)$$

ในทำนองเดียวกันกับตัวอย่างที่ผ่านมา หากพิจารณาสมการเอกพันธ์ (เปลี่ยน $f(t)$ เป็นศูนย์) สมการช่วยคือ

$$am^2 + bm + c = 0$$

ซึ่งมีรากได้สามแบบ คือ

**รากจริงสองจำนวน** $m_1, m_2$ จะได้ว่าสมการ (1) เขียนได้ในรูปตัวดำเนินการที่ลดทอนแล้วเป็น

$$(D - m_1)(D - m_2)y = \frac{f(t)}{a}$$

โดย

$$D = \frac{d}{dt}$$

**รากซ้ำ**: $m_1 = m_2 = m$ จะได้ว่าสมการ (1) เขียนได้เป็น

$$(D-m)^2 y = \frac{f(t)}{a}$$

**รากเชิงซ้อนคู่สังยุค**: $m_{1,2} = \lambda \pm i\mu$ จะได้ว่าสมการ (1) เขียนได้เป็น

$$[(D-\lambda)^2 + \mu^2]y = \frac{f(t)}{a}$$

**ตัวอย่าง** สมการเชิงอนุพันธ์

$$2y'' + 5y' + 2y = f(t)$$

สามารถเขียนได้ในรูปตัวดำเนินการลดทอนได้เป็น

$$\left(D + \frac{1}{2}\right)(D + 2)y = \frac{f(t)}{2}$$

สมการ

$$y'' + 4y' + 4y = f(t)$$

เขียนได้เป็น

$$(D - 2)^2 y = f(t)$$

สมการ

$$y'' + 4y' + 5y = f(t)$$

เขียนได้เป็น

$$[(D + 2)^2 + 1]y = f(t)$$

ทฤษฎีบทที่ได้กล่าวไปก่อนหน้าแล้ว

**ทฤษฎีบท** (**การมีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว**) กำหนดให้ $p(t), q(t)$ และ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $I$

จะได้ว่าสำหรับค่าคงตัว $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ใด ๆ สมการ

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t) \qquad (4)$$

ที่กำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$$y(t_0) = \alpha, \quad y'(t_0) = \beta$$

มีผลเฉลย(เฉพาะ)เพียงหนึ่งเดียว

**ทฤษฎีบท (สมบัติเชิงเส้น)** กำหนดให้ $y_1, y_2$ เป็นผลเฉลยหลักมูลของสมการเอกพันธ์

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

จะได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ

$$\tilde{y}(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

**ทฤษฎีบท** กำหนดให้ $p(t), q(t)$ และ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด $I$

ถ้า $y_1, y_2$ เป็นผลเฉลยหลักมูลของสมการ**เอกพันธ์**

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

และ $y_p$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ**ไม่เอกพันธ์**

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t) \qquad (4)$$

จะได้ว่า

$$\tilde{y}(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + y_p(t)$$

เป็น**ผลเฉลยทั่วไป**ของสมการ (4)

<u>บทพิสูจน์</u> ก่อนอื่นจะแสดงว่า $\tilde{y}$ เป็นผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธ์ (3) จากสมมติฐาน

$$y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1 = 0$$
$$y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2 = 0$$
$$y_p'' + p(t)y_p' + q(t)y_p = f(\mathrm{t})$$

เมื่อคูณสมการแรกด้วย $C_1$ สมการที่สองด้วย $C_2$ แล้วบวกสองสมการที่ได้กับสมการที่สามจะได้ว่า

$$\tilde{y}'' + p(t)\tilde{y}' + q(t)\tilde{y} = f(\mathrm{t})$$

นั่นคือ $\tilde{y}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (3)

ต่อไปจะแสดงว่า $\tilde{y}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3) นั่นคือ ถ้ากำหนด $t_0 \in I$ และ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ และ $Y$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$Y'' + p(t)Y' + q(t)Y = f(\mathrm{t})$$
$$Y(t_0) = \alpha, \quad Y'(t_0) = \beta$$

จะมีค่าคงตัว $C_1, C_2$ ที่ทำให้

$$\tilde{y}(t) = Y(t) \quad \forall\, t \in I$$

เนื่องจาก $Y, y_p$ สอดคล้องสมการ (3) กล่าวคือ

$$Y'' + p(t)Y' + q(t)Y = f(\mathrm{t})$$
$$y_p'' + p(t)y_p' + q(t)y_p = f(\mathrm{t})$$

จับสองสมการลบกันจะได้ว่า $Y - y_p$ สอดคล้องกับสมการเอกพันธ์

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

แต่ $y_1, y_2$ เป็นผลเฉลยหลักมูลของสมการเอกพันธ์ เพราะฉะนั้นจะมีค่าคงตัว $C_1, C_2$ ที่ทำให้

$$Y - y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

ซึ่งก็คือ $Y = \tilde{y}$

<u>หมายเหตุ</u> จากทฤษฎีบทจะได้ว่าการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการสัมประสิทธิ์ค่าคงที่

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

ทำได้โดยหาผลเฉลยหลักมูล $y_1, y_2$ ของสมการเอกพันธ์

$$ay'' + by' + cy = 0$$

โดยอาศัยสมการช่วย และหาผลเฉลยเฉพาะ $y_p$ ของสมการไม่เอกพันธ์มาหนึ่งผลเฉลย

ดังนั้นสิ่งที่ศึกษาต่อไปคือเทคนิคการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธ์ ซึ่งมีวิธีดังต่อไปนี้

(1) Variation of parameters method

(2) Method of undetermined coefficients

(3) Inverse operator method

วิธีแรกสามารถใช้ได้สำหรับสมการทั่วไปที่มีสัมประสิทธิ์ไม่ใช่ค่าคงที่ด้วย

**ตัวอย่าง** พิจารณาสมการ

$$y'' - y = 2e^{t}$$

จงตอบคำถามต่อไปนี้

(1) จงหาผลเฉลยหลักมูลของสมการเอกพันธ์

(2) จงตรวจสอบว่า $y_p = te^{t}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธ์

(3) จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการที่กำหนดให้ที่สอดคล้องเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$$y(0) = 1, y'(0) = 2$$