Variation of Parameters Method (VPM)

หัวข้อนี้จะศึกษาวิธีหาผลเฉลยเฉพาะ y_p ของสมการไม่เอกพันธ์

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t) \tag{1}$$

โดย p, q, f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

สมมติว่าสมการเอกพันธ์

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \tag{2}$$

มีผลเฉลยหลักมูลคือ y_1, y_2

VPM หาฟังก์ชัน $u(t), v(t)$ ซึ่งทำให้

$$y_p = uy_1 + vy_2$$

เป็นผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธ์ (1) และสอดคล้อง

$$u'y_1 + v'y_2 = 0 \tag{3}$$

ทฤษฎีบท ถ้า y_1, y_2 เป็นเฉลยหลักมูลของสมการเอกพันธ์

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad (2)$$

จะได้ว่าฟังก์ชัน

$$y_p = y_1 \int \frac{-y_2 f(t)}{W(y_1, y_2)} dt + y_2 \int \frac{y_1 f(t)}{W(y_1, y_2)} dt$$

เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธ์

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t) \qquad (1)$$

<u>บทพิสูจน์</u> ให้ผลเฉลยเฉพาะหนึ่งของ (1) เขียนได้ในรูป

$$y_p = uy_1 + vy_2$$

โดย u, v สอดคล้อง

$$u'y_1 + v'y_2 = 0 \qquad (3)$$

คำนวณ

$$y_p' = [u'y_1 + v'y_2] + uy_1' + vy_2'$$
$$= uy_1' + vy_2'$$
$$y_p'' = u'y_1' + uy_1'' + v'y_2' + vy_2''$$

แทน y_p ในสมการ (1) ได้

$$[u'y_1' + v'y_2'] + u[y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1]$$
$$+v[y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2] = f(t)$$

นั่นคือ

$$u'y_1' + v'y_2' = f(t) \tag{4}$$

เขียนสมการ (3) (4) ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจาก Cramer's rule จะได้ว่า

$$u' = \frac{\det \begin{bmatrix} 0 & y_2 \\ f(t) & y_2' \end{bmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{-y_2 f(t)}{W(y_1, y_2)}$$

$$v' = \frac{\det\begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(t) \end{bmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{y_1 f(t)}{W(y_1, y_2)}$$

โดย $W(y_1, y_2)$ คือรอนสเกียนของ y_1, y_2

โดยการอินทิเกรตเทียบ t จะได้ฟังก์ชัน u, v และได้ y_p ตามต้องการ

โดยทั่วไปถ้าสมการเป็นสมการอันดับ n

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)y = f(t)$$

และสมการเอกพันธ์

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)y = 0$$

มีผลเฉลยหลักมูลคือ

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

VPM: หาผลเฉลยเฉพาะในรูป

$$y_p = u_1 y_1 + \cdots + u_n y_n$$

โดย $u_1, \dots, u_n$ สอดคล้องสมการ

$$\begin{gathered} u_1' y_1 + \cdots + u_n' y_n = 0 \\ u_1' y_1' + \cdots + u_n' y_n' = 0 \\ \vdots \\ u_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-2)} = 0 \end{gathered}$$

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$y'' - y = e^{2t}$$

พร้อมทั้งตรวจทานผลเฉลยที่ได้

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$y'' + y = \sec t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

พร้อมทั้งตรวจทานผลเฉลยที่ได้

<u>วิธีทำ</u>

Method of Undetermined Coefficients (MUC)

ในการหาผลเฉลยเฉพาะ y_p สำหรับสมการ

$$ay'' + by' + cy = f(t) \tag{5}$$

โดย a, b, c เป็นค่าคงตัว $a \neq 0$ ด้วยวิธี MUC ซึ่งเป็นวิธีคาดเดาสูตรอย่างมีหลักการจากรูปแบบของ $f(t)$

แยกเป็นสามกรณีดังนี้

1. $f(t) = e^{kt}P(t)$ โดย P เป็นพหุนาม
2. $f(t) = P(t)e^{kt}\cos\omega t + Q(t)e^{kt}\sin\omega t$ $(\omega \neq 0)$ โดย P, Q เป็นพหุนาม
3. $f(t) = f_1(t) + \cdots + f_N(t)$ โดย $f_1, \ldots, f_N$ อยู่ในกรณี 1 หรือ 2

ในกรณี 1-2 จะคาดเดาสูตรของ y_p ในรูปเดียวกับ f และจะได้กล่าวถึงกรณี 3 ต่อไป

กรณี 1 พิจารณาสมการ

$$ay'' + by' + cy = P(t)e^{kt} \qquad (6)$$

โดย $P(t)$ เป็น**พหุนาม**และ k เป็นค่าคงตัวที่กำหนดให้

สมมติ y_p อยู่ในรูป

$$y_p = Q(t)e^{kt}$$

โดย Q เป็น**พหุนาม** เราจะหาเงื่อนไขของ Q ที่ทำให้ y_p เป็นผลเฉลยของสมการ (6)

คำนวณ

$$y_p' = Q'e^{kt} + kQe^{kt}$$
$$y_p'' = Q''e^{kt} + 2kQ'e^{kt} + k^2Qe^{kt}$$

แทน y_p ใน (6) จะได้ว่าสมการต่อไปนี้ต้องเป็นจริง

$$(ak^2 + bk + c)Q + (2ka + b)Q' + aQ'' = P$$

สมการนี้จะนำไปสู่ข้อสังเกตเกี่ยวกับระดับขั้น (Degree)

ของพหุนาม Q ที่เป็นไปได้

เนื่องจาก a, b, c เป็นค่าคงตัวดังนั้น

$$(ak^2 + bk + c)Q + (2ka + b)Q' + aQ'' = P$$

เป็นพหุนามเมื่อ Q เป็นพหุนาม และ

$$\deg Q' = \deg Q - 1, \quad \deg Q'' = \deg Q - 2$$

ดังนั้นมี 3 กรณีย่อยที่ต้องพิจารณาต่อไป ได้แก่

1.1. $ak^2 + bk + c \neq 0$

หรือ k **ไม่ใช่รากของสมการช่วย**

1.2. $ak^2 + bk + c = 0,\ 2ka + b \neq 0$

หรือ k เป็น**รากอันดับที่หนึ่ง**ของสมการช่วย

1.3. $ak^2 + bk + c = 0,\ 2ka + b = 0$

หรือ k เป็น**รากอันดับที่สอง**ของสมการช่วย

กรณี 1.1 กล่าวว่า f **ไม่สั่นพ้อง** (Non-resonance) กับ ODE

กรณี 1.2 เราจะกล่าวว่า f **สั่นพ้อง** (Resonance) **อันดับหนึ่ง** กับ ODE

กรณี 1.3 เราจะกล่าวว่า f **สั่นพ้อง** (Resonance) **อันดับสอง** กับ ODE

1.1 **ไม่สั่นพ้อง** (Non-Resonance) นั่นคือ

$$ak^2 + bk + c \neq 0$$

หรือ k **ไม่เป็นรากของสมการช่วย**

จากสมการ

$$(ak^2 + bk + c)Q + (2ka + b)Q' + aQ'' = P$$

ได้ว่า

$$\deg Q = \deg P$$

MUC 1.1 ถ้า k ไม่เป็นรากของสมการช่วย

$$P(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$$

จะสมมติให้ $Q(t) = A_n t^n + \cdots + A_1 t + A_0$ นั่นคือ

$$y_p = (A_n t^n + \cdots + A_1 t + A_0)e^{kt}$$

และหา $A_n, \ldots, A_1, A_0$ โดยแทน y_p ใน (2)

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$2y'' - y' + 3y = 2t$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$y'' - y = e^{-2t}$$

<u>วิธีทำ</u>

1.2 สั่นพ้องอันดับหนึ่ง สมมติ

$$ak^2 + bk + c = 0, \quad 2ka + b \neq 0$$

นั่นคือ k **เป็นรากอันดับ 1(รากสามัญหรือรากไม่ซ้ำ)** ของสมการช่วย

สมการ

$$(ak^2 + bk + c)Q + (2ka + b)Q' + aQ'' = P$$

จะลดรูปเป็น

$$(2ka + b)Q' + aQ'' = P \qquad (*)$$

ได้ว่า $\deg Q = \deg P + 1$

ถ้า

$$P(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$$

$$\therefore \quad Q(t) = A_{n+1} t^{n+1} + \cdots + A_1 t + A_0$$

ใน (*) พจน์ A_0 ไม่มีผลต่อสมการ ดังนั้นจะให้ $A_0 = 0$

MUC 1.2 ถ้า k เป็นรากอันดับ 1 ของสมการช่วย

$$P(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$$

จะสมมติให้

$$Q(t) = t(A_n t^n + \cdots + A_1 t + A_0)$$

$$y_p = t(A_n t^n + \cdots + A_1 t + A_0)e^{kt}$$

และหา $A_n, \dots, A_1, A_0$ โดยแทน y_p ใน (2)

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$2y'' + 3y' = 1 + 4t$$

วิธีทำ

$$y_p = \frac{2}{3}t^2 - \frac{5}{9}t$$

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$y'' - y' = e^t(t+2)$$

<u>วิธีทำ</u>

$$y_p = \left(\frac{t^2}{2} + t\right)e^t$$

1.3. **สั่นพ้องอันดับสอง** สมมติ

$$ak^2 + bk + c = 0, \quad 2ka + b = 0$$

นั่นคือ k **เป็นรากอันดับ 2(รากซ้ำอันดับ 2)** ของสมการช่วย

สมการ

$$(ak^2 + bk + c)Q + (2ka + b)Q' + aQ'' = P$$

ในกรณีนี้ลดรูปเป็น

$$aQ'' = P \tag{$*$}$$

ได้ว่า $\deg Q = \deg P + 2$ ถ้า

$$P(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$$

จะได้

$$\therefore \quad Q(t) = A_{n+2} t^{n+2} + \cdots + A_2 t^2 + A_1 t + A_0$$

ใน (*) พจน์ $A_1 t + A_0$ ไม่มีผลต่อสมการ ดังนั้นจะให้พจน์เหล่านี้เป็นศูนย์

MUC 1.3 ถ้า k เป็นรากอันดับ 2 ของสมการช่วย

$$P(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$$

จะสมมติ $Q(t) = t^2(A_n t^n + \cdots + A_1 t + A_0)$ ได้

$$y_p = t^2(A_n t^n + \cdots + A_1 t + A_0)e^{kt}$$

และหา $A_n, \ldots, A_1, A_0$ โดยแทน y_p ใน (2)

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$y'' + 2y' + y = te^{-t}$$

<u>วิธีทำ</u>

กรณี 2 พิจารณาสมการ

$$ay'' + by' + cy = P_1e^{kt}\cos\omega t + P_2e^{kt}\sin\omega t \; (7)$$

โดย $\omega \in \mathbb{R} - \{0\}$ และ P_1, P_2 เป็นพหุนาม

ในทำนองเดียวกันกับกรณี 1 ที่ $f(t)$ จะ**สั่นพ้อง**กับ ODE ก็ต่อเมื่อ $k + i\omega$ สอดคล้องกับสมการช่วย

$$am^2 + bm + c = 0$$

2.1. **ไม่สั่นพ้อง** คาดเดา

$$y_p = Q_1(t)e^{kt}\cos\omega t + Q_2(t)e^{kt}\sin\omega t$$

โดย Q_1, Q_2 เป็นพหุนามที่มีระดับขั้นเท่ากับ

$$\max\{\deg P_1, \deg P_2\}$$

และหาสัมประสิทธิ์ของ Q_1, Q_2 โดยแทน y_p ลงใน ODE

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$y'' + y' + y = \sin t$$

Answer

$$y_p = -\cos t$$

2.2. **กรณีสั่นพ้อง** คาดเดา

$$y_p = tQ_1(t)e^{kt}\cos\omega t + tQ_2(t)e^{kt}\sin\omega t$$

โดย Q_1, Q_2 เป็นพหุนามที่มีระดับขั้นเท่ากับ

$$\max\{\deg P_1, \deg P_2\}$$

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$y'' + y = t\sin t$$

ANS

$$y_p = -\frac{1}{4}t^2\cos t + \frac{1}{4}t\sin t$$

กรณี 3 ถ้า

$$f = f_1 + \cdots + f_N$$

โดย $f_1, \dots, f_N$ อยู่ในกรณี 1 หรือ 2 จะได้

$$y_p = y_{p1} + \cdots + y_{pN}$$

โดยแต่ละ y_{pj} เป็นผลเฉลยเฉพาะของ ODE

$$ay'' + by' + cy = f_j(t)$$

ซึ่งหาได้โดยใช้วิธีในกรณี 1 หรือ 2

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$y'' - y = e^t + e^{2t}$$

ANS

$$y_{p1} = \frac{1}{2}te^t, \quad y_{p2} = \frac{1}{3}e^{2t}$$

ดังนั้น

$$y_p = \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{3}e^{2t}$$

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$y'' - 2y = -e^t + \sin t$$

ANS

$$y_{p1} = e^t, \quad y_{p2} = -\frac{1}{3}\sin t$$

ดังนั้น

$$y_p = e^t - \frac{1}{3}\sin t$$