สมการโคชี-ออย์เลอร์

สำหรับค่าคงตัว a, b, c ใด ๆ ซึ่ง $a \neq 0$ สมการในรูป

$$at^2y'' + bty' + cy = 0 \quad (t > 0) \qquad (1)$$

เรียกว่า**สมการโคชี-ออยเลอร์**

สามารถแก้สมการ (1) ได้โดยการเปลี่ยนตัวแปรดังนี้

กำหนดตัวแปร

$$z = \ln t\,, \quad Y(z) = y(e^z)$$

แปลงสมการ (1) ให้เป็นสมการในตัวแปรใหม่ z ดังนี้

จากกฎลูกโซ่ได้

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{dY}{dz}\frac{dz}{dt}$$

จาก $z = \ln t$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{t} = \frac{1}{e^z}$$

ดังนั้น

$$y' = \frac{1}{e^z}\frac{dY}{dz}$$

ในทำนองเดียวกันได้

$$y'' = \frac{dy'}{dt} = \frac{dy'}{dz}\frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{1}{e^z}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{e^z}\frac{dY}{dz}\right)$$

$$= \frac{1}{e^{2z}}\left(\frac{d^2Y}{dz^2} - \frac{dY}{dz}\right)$$

จากการคำนวณข้างต้นจะได้ว่า

$$ty' = e^z\frac{1}{e^z}\frac{dY}{dz} = \frac{dY}{dz}$$

$$t^2y'' = e^{2z}\frac{1}{e^{2z}}\left(\frac{d^2Y}{dz^2} - \frac{dY}{dz}\right)$$

$$= \frac{d^2Y}{dz^2} - \frac{dY}{dz}$$

เพราะฉะนั้นได้ว่าเมื่อแทน $t = e^z$ ในสมการ (1) จะได้สมการในตัวแปร z คือ

$$a\left(\frac{d^2Y}{dz^2} - \frac{dY}{dz}\right) + b\frac{dY}{dz} + cY = 0$$

$$a\frac{d^2y}{dz^2} + (b-a)\frac{dy}{dz} + cy = 0$$

ซึ่งเป็นสมการสัมประสิทธิ์ค่าคงตัวและสามารถใช้เทคนิคสมการช่วยในการแก้สมการได้

ตัวอย่าง จงแสดงว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$2t^2y'' + ty' - 2y = 0, \quad t > 0$$

คือ

$$y(t) = \frac{C_1}{t} + C_2t^{3/2}$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงแสดงว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$t^2y'' + ty' + y = 0, \quad t > 0$$

คือ

$$y(t) = C_1 \sin(\ln t) + C_2 \cos(\ln t)$$

<u>วิธีทำ</u>

พิจารณาสมการโคชี-ออยเลอร์ไม่เอกพันธ์

$$at^2y'' + bty' + cy = f(t), \;\; t > 0 \qquad (2)$$

ในทำนองเดียวกันเราจะเปลี่ยนตัวแปร

$$z = \ln t \quad \text{และให้} \quad Y(z) = y(e^z)$$

เมื่อแทน $t = e^z$ ในสมการ (2) จะได้สมการคือ

$$a\frac{d^2Y}{dz^2} + (b-a)\frac{dY}{dz} + cY = f(e^z)$$

ซึ่งสามารถแก้สมการได้ด้วยวิธี VPM หรือ MUC

ตัวอย่าง จงแสดงว่าผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$t^2y'' + ty' - y = t^2 - t, \quad t > 0$$

คือ

$$y(t) = \frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{2}t\ln t$$

<u>วิธีทำ</u>

สมการเชิงเส้นอันดับสูง

ในหัวข้อนี้จะขยายผลลัพธ์ในกรณีสมการอันดับสองนี้ไปสู่สมการอันดับใด ๆ พิจารณาสมการ

$$a_n(t)y^{(n)} + \cdots + a_0(t)y = f(t) \qquad (3)$$

โดย $a_n, \dots, a_0, f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I และ $a_n(t) \neq 0, \forall t \in I$

1. สมการ (3) เป็น**สมการเชิงเส้นอันดับที่ n**
2. ถ้า $f \equiv 0$ เรียก (3) ว่า**สมการเอกพันธ์**
3. ถ้า $f \not\equiv 0$ เรียก (3) ว่า**สมการไม่เอกพันธ์**
4. **สมบัติเชิงเส้น** สำหรับสมการ (3) เอกพันธ์ ถ้า $y_1, \dots, y_n$ เป็นผลเฉลยของสมการจะได้ว่า

   $$\tilde{y} = C_1y_1 + \cdots + C_ny_n$$

   เป็นผลเฉลยด้วย

5. **การมีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว** ถ้ากำหนด $t_0 \in I$ และกำหนดค่าเริ่มต้นให้แก่สมการ (3) ดังนี้

$$y(t_0) = \alpha_1, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1}$$

จะได้ว่าปัญหาค่าเริ่มต้น (IVP) ที่ได้มีผลเฉลยและมีเพียงหนึ่งผลเฉลย

ตัวอย่าง จงหาช่วง I ที่ใหญ่ที่สุดซึ่ง $0 \in I$ และสมการ

$$ty''' + \frac{2t}{t+1}y' + y = e^{-2t}$$

พร้อมด้วยค่าเริ่มต้น $(t_0 \in I)$

$$y(t_0) = \alpha_1, \;\; y'(t_0) = \alpha_2, \;\;\; y''(t_0) = \alpha_3$$

มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวไม่ว่าจะกำหนด $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ เป็นจำนวนจริงใดก็ตาม

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง กำหนดให้ p_1, p_2, p_3 เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $I \subset \mathbb{R}$ และ $t_0 \in I$ จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y''' + p_1(t)y'' + p_2(t)y' + p_3(t)y = 0$$
$$y(t_0) = y'(t_0) = y''(t_0) = 0$$

<u>วิธีทำ</u>

ความอิสระเชิงเส้น

กำหนดให้ $I \subset \mathbb{R}$ เป็นช่วงใด ๆ และ $f_1, \dots, f_n$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง I จะกล่าวว่า

- $f_1, \dots, f_n$ **อิสระเชิงเส้น**ก็ต่อเมื่อข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

  "ถ้า $C_1, \dots, C_n$ เป็นค่าคงตัว และ

  $$C_1 f_1(t) + \cdots + C_n f_n(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

  จะได้ว่า $C_1 = \cdots = C_n = 0$"

- $f_1, \dots, f_n$ **ไม่อิสระเชิงเส้น**ก็ต่อเมื่อมีค่าคงตัว $C_1, \dots, C_n$ ที่ไม่เท่ากับศูนย์ทั้งหมดที่ทำให้

  $$C_1 f_1(t) + \cdots + C_n f_n(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า

$$f_1 = \sin t, \quad f_2 = \cos t$$
$$f_3 = e^t, \quad f_4 = \sqrt{2}\sin t$$

ไม่อิสระเชิงเส้น

<u>วิธีทำ</u>

บทนิยาม ให้ $f_1, \dots, f_n$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ถึงอันดับที่ $n-1$ และนิยามบนช่วง I

รอนสเกียน(Wronskian) ของ $f_1, \dots, f_n$ คือ ฟังก์ชัน

$$W(f_1, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & \cdots & f_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ตัวอย่างเช่น ในกรณีที่ $n = 3$ ได้ว่า

$$\begin{aligned} W(f_1, f_2, f_3) &= \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \end{vmatrix} \\ &= f_1 f_2' f_3'' + f_2 f_3' f_1'' + f_3 f_1' f_2'' \\ &\quad - f_1'' f_2' f_3 - f_2'' f_3' f_1 - f_3'' f_1' f_2 \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท(Abel) กำหนดให้ $y_1, \dots, y_n$ เป็นผลเฉลย ของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)y = 0$$

โดย $p_1, \dots, p_n$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I

จะได้ว่ามีค่าคงตัว $A > 0$ ซึ่งทำให้รอนสเกียน

$$W(y_1, \dots, y_n) = Ae^{-\int p_1(t)dt}$$

ดังนั้นรอนสเกียนของผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ เป็นไปได้กรณีใดกรณีหนึ่งในสองกรณีต่อไปนี้

1. **ฟังก์ชันศูนย์**
2. **ฟังก์ชันที่มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ทุกจุด $t \in I$**

<u>บทพิสูจน์</u> จะแสดงกรณี $n = 3$ เท่านั้น จากสมบัติของ ดีเทอร์มิแนนต์และกฎดิฟผลคูณได้ว่า

$$W'(t) = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix}$$

จาก $y_j''' = -p_1 y_j'' - p_2 y_j' - p_3 y_j$ $(j = 1,2,3)$ ดังนั้น

$$W'(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ -p_1 y_1'' & -p_1 y_2'' & -p_1 y_3'' \end{vmatrix} = -p_1 W(t)$$

แก้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

$$W' + p_1(t) W = 0$$

ได้เอกลักษณ์ของ Abel ตามต้องการ

สรุป

1. สำหรับฟังก์ชันใด ๆ $f_1, \dots, f_n$ (ไม่จำเป็นต้องเป็นผลเฉลยของ ODE อันดับที่ n)
   1.1. ถ้ามี $t^* \in I$ ซึ่งค่ารอนสเกียนไม่เท่ากับศูนย์ จะได้ว่า $f_1, \dots, f_n$ **อิสระเชิงเส้น**
   1.2. ในทางกลับกันถ้า $f_1, \dots, f_n$ **ไม่อิสระเชิงเส้น** จะได้ว่ารอนสเกียนเป็นฟังก์ชันศูนย์
2. สำหรับฟังก์ชัน $y_1, \dots, y_n$ ที่เป็นผลเฉลยของ ODE เชิงเส้นเอกพันธ์อันดับ n
   2.1. **อิสระเชิงเส้น** $\Leftrightarrow W(t) \neq 0$ ทุก $t \in I$
   2.2. $y_1, \dots, y_n$ ที่อิสระเชิงเส้นเรียกว่า **ผลเฉลยหลักมูล** ของ ODE และผลเฉลยทั่วไปคือ

$$\tilde{y} = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n$$