สมการสัมประสิทธิ์ค่าคงตัว: เอกพันธ์

ในหัวข้อนี้จะศึกษาสมการ

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (1)$$

โดย $a_n, \ldots, a_1, a_0$ เป็นค่าคงตัว

บทนิยาม สำหรับ ODE (1) **สมการช่วย** (หรือ**สมการลักษณะเฉพาะ**) คือ สมการพหุนาม

$$a_n m^n + \cdots + a_1 m + a_0 = 0$$

<u>หมายเหตุ</u> สมการช่วยได้มาจากการคาดเดาผลเฉลยของ ODE (1) ที่ในรูป

$$y = e^{mt}$$

รากของสมการช่วยเป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนและอาจจะเป็นรากซ้ำ

ตัวอย่าง สำหรับสมการช่วย

$$m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = 0$$

มีรากคือ $1,2,3$

สำหรับสมการช่วย

$$m^3 - 6m^2 + 9m - 4 = 0$$

มีรากคือ $1,1,4$

สำหรับสมการช่วย

$$m^3 + 3m^2 + 4m + 2 = 0$$

มีรากคือ $-1, -1 + i, -1 - i$

ทฤษฎีบท สำหรับ ODE (1) ให้ $m_1, \dots, m_r$ เป็นรากของสมการช่วยโดยมีภาวะรากซ้ำ $q_1, \dots, q_r$ ตามลำดับ

สำหรับแต่ละ $j \in \{1,2,\dots,r\}$

1. ถ้า $m_j \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า ODE (1) มีผลเฉลย คือ
$$e^{m_j t}, \quad te^{m_j t}, \quad \dots \quad , \quad t^{q_j-1}e^{m_j t}$$
2. ถ้า $m_j = \lambda + i\mu$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่ามี $k \in \{1,2,\dots,r\}$ ซึ่ง $m_k = \lambda - i\mu, q_j = q_k$ และจะได้ว่า ODE (1) มีผลเฉลย คือ
$$\begin{array}{cc} e^{\lambda t}\cos\mu t, & e^{\lambda t}\sin\mu t \\ te^{\lambda t}\cos\mu t, & te^{\lambda t}\sin\mu t \\ \vdots & \vdots \\ t^{q_j-1}e^{\lambda t}\cos\mu t, & t^{q_j-1}e^{\lambda t}\sin\mu t \end{array}$$
3. ผลเฉลยทั้งหมดที่ได้จากข้อ 1 และ 2 สำหรับทุก $j = 1, \dots, r$ เป็นผลเฉลยหลักมูลของ ODE (1)

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y''' - 6y'' + 9y' - 4y = 0$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y''' - y' = 0$$

และสมการ

$$y'''' + 4y = 0$$

วิธีทำ

สมการเชิงเส้นไม่เอกพันธ์

พิจารณาสมการไม่เอกพันธ์

$$a_n(t)y^{(n)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t) \quad (2)$$

โดย $a_n, \ldots, a_0, f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของ t

จะได้ว่าทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นจริง

ทฤษฎีบท ถ้า $y_1, \ldots, y_n$ เป็นผลเฉลยหลักมูลของสมการเชิงเส้นเอกพันธ์

$$a_n(t)y^{(n)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \qquad (3)$$

และ y_p เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (2) จะได้ว่า

$$\tilde{y} = C_1y_1 + \cdots + C_ny_n + y_p$$

เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2)

การหาผลเฉลยเฉพาะสำหรับ ODE (2) ทำได้ 5 วิธี ดังต่อไปนี้

1. วิธีแปรพารามิเตอร์ (Variation of Parameters)
2. วิธีคาดเดาและเทียบสัมประสิทธิ์ (Method of Undetermined Coefficients)
3. วิธีตัวดำเนินการลบล้าง (Annihilator Method)
4. วิธีลดอันดับ (Reduction of Order Method)
5. วิธีตัวดำเนินการ (Inverse Operator Method)

Variation of parameters method (VPM)

เช่นเดียวกับกรณีอันดับสอง การหาผลเฉลยเฉพาะสำหรับสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธ์

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)y = f(t) \qquad (4)$$

ด้วย VPM ทำได้โดยการคาดเดาผลเฉลยเฉลยเฉพาะ

$$y_p = u_1(t)y_1 + \cdots + u_n(t)y_n \qquad (5)$$

เมื่อ

- $y_1, \ldots, y_n$ เป็นผลเฉลยหลักมูลของสมการเชิงเส้น **เอกพันธ์** และ
- $u_1, \ldots, u_n$ เป็นฟังก์ชันที่จะหา

ตัวอย่างเช่นเมื่อ ODE มีอันดับ $n = 3$

$$y_p = u(t)y_1 + v(t)y_2 + w(t)y_3$$

ในการหา $u_1, \ldots, u_n$ (ซึ่งมี n ฟังก์ชัน) จะต้องการ n เงื่อนไขหรือ n สมการ สมการแรกที่จะได้สมการที่จะได้เมื่อแทน y ใน ODE (4) ดังนั้นจะต้องกำหนดเพิ่มอีก $n-1$ สมการ โดยจะกำหนดเป็น

$$\begin{aligned} u_1' y_1 + \cdots + u_n' y_n &= 0 \\ u_1' y_1' + \cdots + u_n' y_n' &= 0 \\ &\vdots \\ u_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-2)} &= 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

ทฤษฎีบท ถ้า $u_1, \ldots, u_n$ สอดคล้อง (6) และ y_p ในรูป (5) เป็นผลเฉลยของ ODE (4) จะได้ว่า

$$u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)} = f(t)$$

<u>บทพิสูจน์</u> จะพิจารณากรณี $n = 3$ กรณีทั่วไปสามารถทำในทำนองเดียวกัน ในกรณีนี้ ODE (4) เขียนได้เป็น

$$y''' + p_1(t)y'' + p_2(t)y' + p_3(t)y = f(t)$$

$y_p = uy_1 + vy_2 + wy_3$ และเงื่อนไข (6) คือ

$$\begin{aligned} u'y_1 + v'y_2 + w'y_3 &= 0 \\ u'y_1' + v'y_2' + w'y_3' &= 0 \end{aligned}$$

หาอนุพันธ์ของ y_p ได้

$$\begin{aligned} y_p' &= u'y_1 + v'y_2 + w'y_3 \\ &\qquad + (uy_1' + vy_2' + wy_3') \\ &= uy_1' + vy_2' + wy_3' \\ y_p'' &= u'y_1' + v'y_2' + w'y_3' \\ &\qquad + (uy_1'' + vy_2'' + wy_3'') \\ &= uy_1'' + vy_2'' + wy_3'' \end{aligned}$$

จากเงื่อนไข (6)   หาอนุพันธ์อันดับ 3 ได้

$$\begin{aligned} y_p''' &= u'y_1'' + v'y_2'' + w'y_3'' \\ &\qquad + (uy_1''' + vy_2''' + wy_3''') \end{aligned}$$

แทน y_p, y_p', y_p'', y_p''' ที่ได้ใน ODE และใช้สมมติฐานว่า y_1, y_2, y_3 เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธ์จะได้ว่า

$$u'y_1'' + v'y_2'' + w'y_3'' = f(t)$$

ได้สมการที่ต้องการพิสูจน์ $\square$

ทฤษฎีบท ผลเฉลยเฉพาะด้วยวิธี VPM คือ

$$y_p = \sum_{k=1}^{n} y_k \int \frac{W_k(t)}{W(t)}\,dt$$

เมื่อ

- $W(t) = W(y_1, \dots, y_n)$ คือรอนสเกียนของฟังก์ชัน $y_1, \dots, y_n$
- $W_k(t)$ คือ determinant ของเมทริกซ์ที่ได้จากการเปลี่ยนหลักที่ k ของรอนเกียนเป็น

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{4t}$$

<u>วิธีทำ</u>

$$y_p = -\frac{e^{4t}}{10}$$

Method of undetermined coefficients (MUC)

ผลเฉลยเฉพาะสำหรับสมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t) \qquad (7)$$

โดย $a_n, \ldots, a_1, a_0$ เป็นค่าคงตัวและ $a_n \neq 0$ นอกจากวิธี VPM แล้วสามารถหาได้จากวิธี MUC ในทำนองเดียวกันกับกรณีสมการอันดับสอง [โดยทั่วไปผลเฉลยเฉพาะที่จากสองวิธีจะต่างกัน]

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 4e^t$$

<u>วิธีทำ</u>

$$y_p = \frac{2}{3}t^3e^t$$

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin t - 5\cos t$$

<u>วิธีทำ</u>

$$y_p = -\frac{3}{8}t^2 \sin t + \frac{5}{8}t^2 \cos t$$

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$y''' - 4y' = t + 3\cos t + e^{-2t}$$

วิธีทำ

$$y_p = -\frac{t^2}{8} - \frac{3}{5}\sin t + \frac{1}{8}te^{-2t}$$