Annihilator Method

วิธีนี้ใช้สำหรับการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t) \qquad (1)$$

โดยจะเขียนในรูปตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์

$$L(D)y = f(t)$$

เมื่อ

$$L(D) = a_n D^n + \cdots + a_1 D + a_0, \quad D = \frac{d}{dt}$$

บทนิยาม ตัวดำเนินการ $H(D)$ กล่าวว่า**ลบล้าง** $f(t)$ ก็ต่อเมื่อ

$$H(D)f = 0$$

บทตั้ง

1. ถ้า $f(t) = e^{kt}$ จะได้ว่า $H(D) = D - k$ นั่นคือ

$$(D-k)e^{kt} = 0$$

2. ถ้า $f(t) = \cos\omega t\,, \sin\omega t\ \ (\omega \neq 0)$ จะได้ว่า

$H(D) = D^2 + \omega^2$ นั่นคือ

$$(D^2+\omega^2)\cos\omega t = 0$$
$$(D^2+\omega^2)\sin\omega t = 0$$

3. ถ้า $f(t) = e^{kt}\cos\omega t\,, e^{kt}\sin\omega t\ (\omega \neq 0)$ จะได้

$$((D-k)^2+\omega^2)e^{kt}\cos\omega t = 0$$
$$((D-k)^2+\omega^2)e^{kt}\sin\omega t = 0$$

4. ถ้า $f(t) = t^s e^{kt}$ จะได้

$$(D-k)^{s+1}(t^s e^{kt}) = 0$$

5. ถ้า $f(t) = t^s e^{kt}\cos\omega t\,, t^s e^{kt}\sin\omega t\ (\omega \neq 0)$

$$H(D) = ((D-k)^2+\omega^2)^{s+1}$$

<u>บทพิสูจน์</u> ทุกข้อเป็นผลลัพธ์จากผลเฉลยของสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ เช่น ข้อ 1. เป็นจริงเนื่องจาก

$$(D-k)e^{kt}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{kt} \text{ สอดคล้อง } y'-ky=0$$

ซึ่งเป็นจริงจากสมการช่วยของ ODE

ข้อ 2 เป็นจริงเนื่องจาก

$$(D^2+\omega^2)\cos\omega t=0$$

$$\Leftrightarrow \cos\omega t \text{ สอดคล้อง } y''+\omega^2 y=0$$

ซึ่งเป็นจริงจากสมการช่วยของ ODE

ข้อ 3 เป็นจริงเนื่องจาก

$$((D-k)^2+\omega^2)e^{kt}\cos\omega t=0$$

$$\Leftrightarrow e^{kt}\cos\omega t \text{ สอดคล้อง }$$

$$y''-2ky'+(k^2+\omega^2)y=0$$

ซึ่งเป็นจริงจากสมการช่วยของ ODE

ทฤษฎีบท ให้ตัวดำเนินการ $H(D)$ ลบล้างฟังก์ชัน f และ $K(D)$ ลบล้างฟังก์ชัน g และหรม $(H, K) = 1$ จะได้ว่า

$$H(D)K(D) \text{ ลบล้าง } f + g$$

<u>บทพิสูจน์</u> พิจารณา

$$\begin{aligned} H(D)K(D)(f+g) &= H(D)K(D)f + H(D)K(D)g \\ &= K(D)H(D)f + H(D)0 \\ &= K(D)0 + H(D)0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $H(D)K(D)$ ลบล้าง $f + g$

หมายเหตุ ถ้า $A =$ ครน(H, K) จะได้ว่า $A(D)$ ลบล้าง $f + g$

ตัวอย่าง จงหาตัวดำเนินการลบล้าง

$$f(t) = 5e^{2t} + e^{t}\cos 3t$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาตัวดำเนินการลบล้าง

$$f(t) = (t^3 + t - 5)e^{2t}$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง ให้ $P(t)$ เป็นพหุนามดีกรี n

1. ถ้า $f(t) = P(t)e^{kt}$ จงพิสูจน์ว่า
$$H(D) = (D-k)^{n+1}$$
เป็นตัวดำเนินการลบล้าง f

2. ถ้า $f(t) = P(t)e^{kt}\cos\omega t$ โดย $\omega \neq 0$ จงพิสูจน์
$$H(D) = ((D-k)^2 + \omega^2)^{n+1}$$
เป็นตัวดำเนินการลบล้างของ f

<u>วิธีทำ</u>

ANM พิจารณาสมการ

$$L(D)y = f$$

ให้ $H(D)$ เป็นตัวดำเนินการลบล้าง f

ใส่ตัวดำเนินการ $H(D)$ ทั้งสองข้างของสมการจะได้

$$H(D)L(D)y = 0$$

ซึ่งเป็น**สมการเชิงเส้นเอกพันธ์**และผลเฉลยหาได้จาก

วิธีสมการช่วย

หมายเหตุ

$$L(D)e^{kt} = L(k)e^{kt}$$

ตัวอย่างเช่น

$$\begin{aligned}(D^3 + 3D^2 - 2)e^{2t} &= (2^3 + 3 \cdot 2^2 - 2)e^{2t} \\ &= 18e^{2t} \\ (D-1)^5(D+3)e^{2t} &= (2-1)^5(2+3)e^{2t} \\ &= 5e^{2t}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$(D-2)^2(D+1)y = 3e^t$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$(D^2 + 1)^2(D^2 - 4)y = 5e^{-t} + e^{6t}$$

<u>วิธีทำ</u>

Reduction of Order Method

ผลเฉลยของสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

$$y' + p(t)y = f(t) \tag{2}$$

มีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$\begin{aligned}\tilde{y} &= e^{-\int p(t)dt}\left(\int e^{\int p(t)dt} f(t)\,dt + C\right)\\ &= y_c + y_p\end{aligned}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}y_c &= Ce^{-\int p(t)dt}\\ y_p &= e^{-\int p(t)dt}\int e^{\int p(t)dt} f(t)\,dt\end{aligned}$$

เรียกฟังก์ชัน y_c ว่า**ส่วนเติมเต็ม**

ต่อไปจะกล่าวถึง**วิธีลดทอนอันดับ** (Reduction of order หรือ RDM) โดยเริ่มจากสมการอันดับสอง กรณีอันดับ n ใด ๆ จะกล่าวในลำดับต่อไป

วิธีลดทอนอันดับจะใช้ผลเฉลยหนึ่งของสมการเอกพันธ์และสมมติว่าผลเฉลยของสมการที่กำหนดอยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชันไม่ทราบค่าอันหนึ่งกับผลเฉลยของสมการเอกพันธ์

พิจารณาสมการเชิงเส้นอันดับสอง

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t) \tag{3}$$

ให้ ϕ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธ์

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \tag{4}$$

โดย ϕ ไม่ใช่ฟังก์ชันศูนย์

RDM หาฟังก์ชัน $v(t)$ ซึ่งทำให้

$$y = v(t)\phi$$

เป็นผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธ์ (3) ผลเฉลยที่ได้จะเป็น**ผลเฉลยทั่วไปของสมการ**

บทตั้ง ฟังก์ชัน v สอดคล้องสมการ

$$\phi v'' + (2\phi' + p(t)\phi)v' = f(t)$$

ดังนั้นถ้าให้ $u = v'$ จะได้ว่า u สอดคล้อง

$$\phi u' + (2\phi' + p(t)\phi)u = f(t)$$

ซึ่งเป็นสมการอันดับหนึ่ง (**อันดับลดทอนลง**)

<u>บทพิสูจน์</u> จาก $y = v\phi$ หาอนุพันธ์ได้

$$y' = v'\phi + v\phi'$$
$$y'' = v''\phi + 2v'\phi' + v\phi''$$

แทนใน ODE ได้

$$(v''\phi + 2v'\phi' + v\phi'')$$
$$+p(t)(v'\phi + v\phi') + q(t)v\phi = f(t)$$

$$v''\phi + (2\phi' + p(t)\phi)v'$$
$$+v(\phi'' + p(t)\phi' + q(t)\phi) = f(t)$$

จาก ϕ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ (4)

$$\phi'' + p(t)\phi' + q(t)\phi = 0$$

ดังนั้น

$$\phi v'' + (2\phi' + p(t)\phi)v' = f(t)$$

แทน $u = v'$ จะได้ว่า u สอดคล้องสมการ

$$\phi u' + (2\phi' + p(t)\phi)u = f(t)$$

ตามต้องการ

ตัวอย่าง จงใช้วิธีลดทอนอันดับพิสูจน์ว่า

$$(D - m)^2 y = 0$$

ซึ่งมีผลเฉลยหนึ่งจากรากของสมการช่วยคือ $\phi = e^{mt}$

แล้วอีกผลเฉลยหนึ่งคือ te^{mt}

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง พิจารณาสมการ

$$(1-t)y'' + ty' - y = 2(t-1)^2 e^{-t}, \quad t \in (0,1)$$

จงตรวจสอบว่า $y_1 = e^t$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ และใช้วิธีลดทอนอันดับหาผลเฉลยทั่วไป

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง ให้ y_1 เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

จงพิสูจน์ว่าอีกผลเฉลยหนึ่งที่อิสระเชิงเส้นคือ

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1^2} dt$$

วิธีทำ

วิธีลดทอนอันดับสามารถใช้ในการแก้สมการเชิงเส้นอันดับที่ n ใด ๆ ได้ ในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะสมการอันดับที่ 3

RDM ให้ ϕ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธ์

$$y''' + p_1(t)y'' + p_2(t)y' + p_3(t)y = 0$$

สมมติ $y = v\phi$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$y''' + p_1(t)y'' + p_2(t)y' + p_3(t)y = f(t)$$

จะได้ว่า v สอดคล้อง

$$\phi v''' + (3\phi' + p_1(t)\phi)v'' + (3\phi'' + 2p_1(t)\phi' + p_2(t)\phi)v' = f(t)$$

เพราะฉะนั้น $u = v'$ สอดคล้องสมการ

$$\phi u'' + (3\phi' + p_1(t)\phi)u' + (3\phi'' + 2p_1(t)\phi' + p_2(t)\phi)u = f(t)$$

ซึ่งเป็นสมการอันดับสอง (**อันดับลดทอนลง**)

ตัวอย่าง จงใช้วิธีลดทอนอันดับแสดงว่า

$$(D - m)^3 y = 0$$

ซึ่งมีผลเฉลยหนึ่งคือ $\phi(t) = e^{mt}$ จากสมการช่วยแล้ว

ผลเฉลยอื่น ๆ คือ $te^{mt}, t^2 e^{mt}$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง พิจารณาสมการ

$$(2-t)y''' + (2t-3)y'' - ty' + y = 0, \;\; t < 2$$

จงตรวจทานว่า $y_1 = e^t$ เป็นผลเฉลยของสมการ

และใช้วิธีลดทอนอันดับหาผลเฉลยทั่วไป

<u>วิธีทำ</u>