Inverse Operator Method

หัวข้อนี้จะศึกษาการหาผลเฉลยของสมการ

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t)$$

โดย $a_n, \dots, a_1, a_0$ เป็นค่าคงตัวและ f เป็นฟังก์ชันใด ๆ ด้วย**วิธีเชิงตัวดำเนินการผกผัน** โดยเขียนสมการเป็น

$$(a_n D^n + \cdots + a_1 D + a_0) y = f(t) \qquad (1)$$

โดย

$$D = \frac{d}{dt}$$

กฎของตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์

ให้ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ $L(D), L_1(D), L_2(D)$ ที่มีสัมประสิทธิ์ค่าคงตัว และให้ f เป็นฟังก์ชัน

1. **กฎเชิงเส้น**

$$[aL_1(D) + bL_2(D)]f$$

$$= aL_1(D)f + bL_2(D)f$$

2. **กฎสลับที่การคูณ**

$$L_1(D)L_2(D)f = L_2(D)L_1(D)f$$

3. **กฎการแทนค่า**

$$L(D)e^{kt} = L(k)e^{kt}$$

<u>บทพิสูจน์</u> สมมติ

$$L(D) = a_nD^n + \cdots + a_1D + a_0$$

จะได้

$$L(D)e^{kt} = a_n\frac{d^ne^{kt}}{dt^n} + \cdots + a_1\frac{de^{kt}}{dt} + a_0e^{kt}$$

$$= (a_nk^n + \cdots + a_1k + a_0)e^{kt}$$

$$= L(k)e^{kt}$$

ตัวอย่าง จงหาค่า

$$(2D^3 - 4D^2 + D + 5)[e^{-t}]$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จากสูตรของออยเลอร์ $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

ได้ $\cos\theta = \operatorname{Re} e^{i\theta}, \quad \sin\theta = \operatorname{Im} e^{i\theta}$

จงหาค่า $D^3(e^{-t}\sin t)$

<u>วิธีทำ</u>

4. **กฎการเลื่อนฟังก์ชันเลขชี้กำลัง**

$$L(D)[e^{kt}f] = e^{kt}L(D+k)f$$

ดังนั้น

$$L(D+k)f = e^{-kt}L(D)[e^{kt}f(t)]$$

<u>บทพิสูจน์</u> พิจารณา

$$D[e^{kt}f] = \frac{d}{dt}(e^{kt}f) = e^{kt}f' + ke^{kt}f$$
$$= e^{kt}(f' + kf)$$
$$= e^{kt}(D+k)f$$

ในทำนองเดียวกันจะได้

$$D^2[e^{kt}f] = D[e^{kt}(D+k)f]$$
$$= e^{kt}(D+k)[(D+k)f]$$
$$= e^{kt}(D+k)^2 f$$

โดยอุปนัยคณิตศาสตร์จะได้ว่า

$$D^m[e^{kt}f] = e^{kt}(D+k)^m f$$

สมมติให้

$$L(D) = a_n D^n + \cdots + a_1 D + a_0$$

จะได้

$$
\begin{aligned}
L(D)[e^{kt}f] &= a_nD^n[e^{kt}f] + \cdots + a_1D[e^{kt}f] \\
&\qquad + a_0e^{kt}f \\
&= a_ne^{kt}(D+k)^nf + \cdots \\
&\qquad + a_1e^{kt}(D+k)f + a_0e^{kt}f \\
&= e^{kt}L(D+k)f
\end{aligned}
$$

Note กฎที่ 4 เป็นจริงเมื่อ k เป็นจำนวนเชิงซ้อนด้วย

บทตั้ง ให้ k เป็นค่าคงตัว จะได้ว่าสมการ

$$(D+k)y = f(t)$$

มีผลเฉลยเฉพาะคือ

$$y_p = e^{-kt}\int e^{kt} f(t)\,dt$$

<u>บทพิสูจน์</u> ให้

$$y_p = e^{-kt}\int e^{kt} f(t)\,dt$$

จากกฎการเลื่อนในฟังก์ชันเลขชี้กำลังจะได้

$$\begin{aligned}(D+k)y_p &= e^{-kt}D[e^{kt}y_p] \\ &= e^{-kt}D\left[\int e^{kt}f(t)\,dt\right] \\ &= e^{-kt}[e^{kt}f(t)] \\ &= f(t)\end{aligned}$$

บทนิยาม นิยามตัวดำเนินการ $(D+k)^{-1} = \frac{1}{D+k}$ โดย

$$\frac{1}{D+k}f(t) = e^{-kt}\int e^{kt}f(t)\,dt$$

นั่นคือ $y_p = \frac{1}{D+k}f(t)$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$(D+k)y = f(t)$$

เรียก $\frac{1}{D+\alpha}$ ว่า**ตัวดำเนินการผกผัน**ของ $D+k$

กรณีทั่วไปถ้า $L(D) = a(D+k_1)\cdots(D+k_r)$ **ตัวดำเนินการผกผัน**ของ $L(D)$ นิยามโดย

$$\frac{1}{L(D)}f = \frac{1}{a}\frac{1}{D+k_1}\cdots\frac{1}{D+k_r}f$$

ดังนั้นสมการ

$$L(D) = f$$

มีผลเฉลยเฉพาะคือ

$$y_p = \frac{1}{L(D)}f$$

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$y' + 3y = 5e^{2t}$$

วิธีทำ

ทฤษฎีบท (1) ถ้า $L(\alpha) \neq 0$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{L(D)}[e^{\alpha t}] = \frac{e^{\alpha t}}{L(\alpha)}$$

(2) ถ้า $L(\alpha) = 0$ แต่ $L'(\alpha) \neq 0$ จะได้

$$\frac{1}{L(D)}[e^{\alpha t}] = \frac{te^{\alpha t}}{L'(\alpha)}$$

(3) ถ้า $L(\alpha) = L'(\alpha) = \cdots = L^{(s-1)}(\alpha) = 0$ และ

$L^{(s)}(\alpha) \neq 0$ จะได้

$$\frac{1}{L(D)}[e^{\alpha t}] = \frac{t^s e^{\alpha t}}{L^{(s)}(\alpha)}$$

<u>บทพิสูจน์</u> (1) สมมติ $L(D) = a(D + k_1) \cdots (D + k_r)$

ดังนั้น

$$\frac{1}{D + k_r}[e^{\alpha t}] = e^{-k_r t} \int e^{(\alpha + k_r)t}\, dt$$

$$= \frac{e^{-k_r t} e^{(\alpha + k_r)t}}{\alpha + k_r} = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha + k_r}$$

โดยอุปนัยคณิตศาสตร์ได้

$$\frac{1}{L(D)}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{a}\frac{e^{\alpha t}}{(\alpha + k_1)\cdots(\alpha + \alpha_r)}$$
$$= \frac{e^{\alpha t}}{L(\alpha)}$$

ตามต้องการ

เพียงพอที่จะแสดง (2) ข้อ (3) สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

จากสมมติฐานได้ว่ามี DO $\tilde{L}(D)$ ซึ่งทำให้

$$L(D) = (D - \alpha)\tilde{L}(D)$$

โดย $\tilde{L}(\alpha) \neq 0$ สังเกตว่า

$$L'(\alpha) = \tilde{L}(\alpha) \neq 0$$

จากข้อ (1) ได้

$$\frac{1}{L(D)}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{D - \alpha}\left[\frac{1}{\tilde{L}(D)}e^{\alpha t}\right]$$
$$= \frac{1}{D - \alpha}\left[\frac{e^{\alpha t}}{\tilde{L}(\alpha)}\right]$$

$$= e^{\alpha t}\int e^{-\alpha t}\frac{e^{\alpha t}}{\tilde{L}(\alpha)}dt$$

$$= e^{\alpha t}\frac{t}{\tilde{L}(\alpha)} = \frac{te^{\alpha t}}{L'(\alpha)}$$

ซึ่งพิสูจน์ข้อ (2)

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$y'' - 3y' + 2y = 5e^{-4t}$$

<u>วิธีทำ</u>

$$y_p = \frac{5}{30}e^{-4t}$$

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$y'' - 2y' + y = 3e^t$$

<u>วิธีทำ</u>

$$y_p = \frac{3}{2}e^t$$

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$y' - y = e^{-t}\sin t$$

วิธีทำ

$$y = \frac{e^{-t}}{5}(-2\cos t + \sin t)$$

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$y'' - y' + y = e^{2t}\cos t$$

วิธีทำ

$$y_p = \frac{e^{2t}}{13}(2\cos t + 3\sin t)$$

ทฤษฎีบท

1. ถ้า $a+k \neq 0$ จะได้

$$\frac{1}{D+k}[P(t)e^{at}] = \frac{1}{a+k}\left[P(t)e^{at} - \frac{1}{D+k}[P'(t)e^{at}]\right]$$

2. ถ้า $a+k=0$ จะได้

$$\frac{1}{D+k}[P(t)e^{at}] = e^{at}\int P(t)\,dt$$

<u>บทพิสูจน์</u> กรณีแรกเป็นผลจากสูตรอินทิเกรตทีละส่วน

สำหรับกรณีที่สอง จากบทนิยามได้

$$\begin{aligned}\frac{1}{D+k}[P(t)e^{at}] &= e^{-kt}\int e^{kt}P(t)e^{at}\,dt \\ &= e^{-kt}\int P(t)\,dt \\ &= e^{at}\int P(t)\,dt\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$y'' + 3y' + 2y = te^t$$

<u>วิธีทำ</u>

$$y_p = \frac{te^t}{6} - \frac{e^t}{24} - \frac{e^t}{18}$$

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$y'' - 4y = te^{2t}$$

<u>วิธีทำ</u>

$$y_p = \left(\frac{t^2}{8} - \frac{t}{16}\right)e^{2t}$$