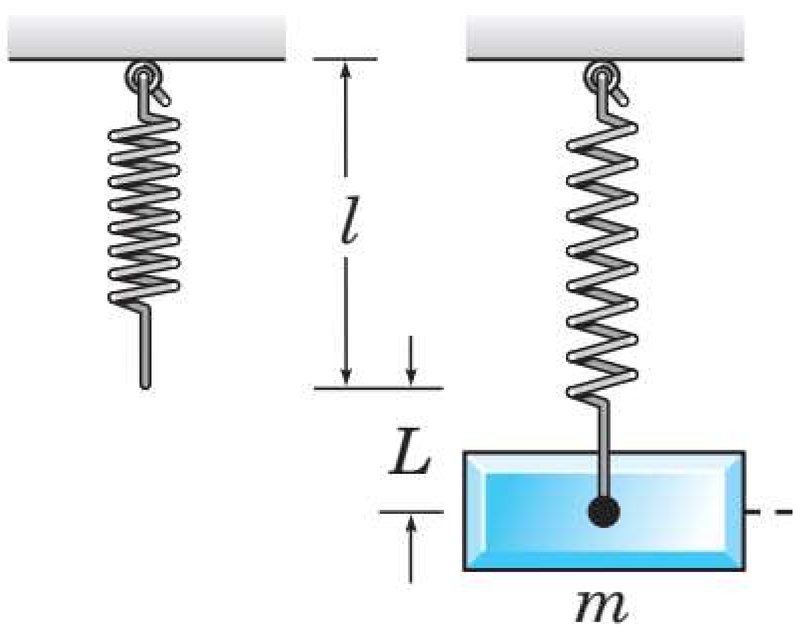
ประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์

หัวข้อนี้จะประยุกต์ความรู้เกี่ยวกับ การแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นในการอธิบายปัญหาที่เกิดขึ้นในปรากฏการณ์ธรรมชาติ

ระบบสปริงมวลและแรงเสียดทาน

มวล m ต่อกับปลาย P ของสปริง ปลายอีกด้านของสปริงตรึงที่ O และมีแรงกระทำต่อมวล $f(t)$



ให้ y เป็นระยะทางที่มวล m เคลื่อนจากตำแหน่งที่มวลติดกับสปริงหยุดนิ่ง

แรงกระทำจากสปริง

$$F_s = -ky$$

โดย k เป็นค่าคงตัวขึ้นกับความแข็งของสปริง

แรงเสียดทาน

$$F_f = -2\gamma v$$

โดย γ เป็นค่าคงตัวขึ้นกับลักษณะของตัวกลาง

จากความเร็ว $v = y'$ และความเร่ง $a = y''$ หากสมมติว่าแรงอื่น ๆ มีผลน้อยมาก โดยกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันจะได้ $F_s + F_f + f(t) = ma$ ดังนั้น

$$my'' + 2\gamma y' + ky = f(t) \qquad (1)$$

โดย $m > 0, \gamma > 0, k > 0$ เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง (Undamped Free Vibration)

ให้ $\gamma = 0$ และ $f(t) = 0$ จาก (1) จะได้สมการ

$$my'' + ky = 0$$

รากของสมการช่วยคือ $\pm i\omega_N$ โดย

$$\omega_N = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

เรียกว่า**ความถี่ธรรมชาติ**ของสปริง-มวล และผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y(t) = C_1 \cos \omega_N t + C_2 \sin \omega_N t$$

ตัวอย่าง (Undamped, Non-Resonance)

สมมติ $\gamma = 0$ และ

$$f(t) = \sin \omega t\,, \quad \omega \neq \omega_N$$

ให้ $\omega_N = \sqrt{k/m}$ จะได้สมการ

$$y'' + \omega_N^2 y = \frac{1}{m} \sin \omega t$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

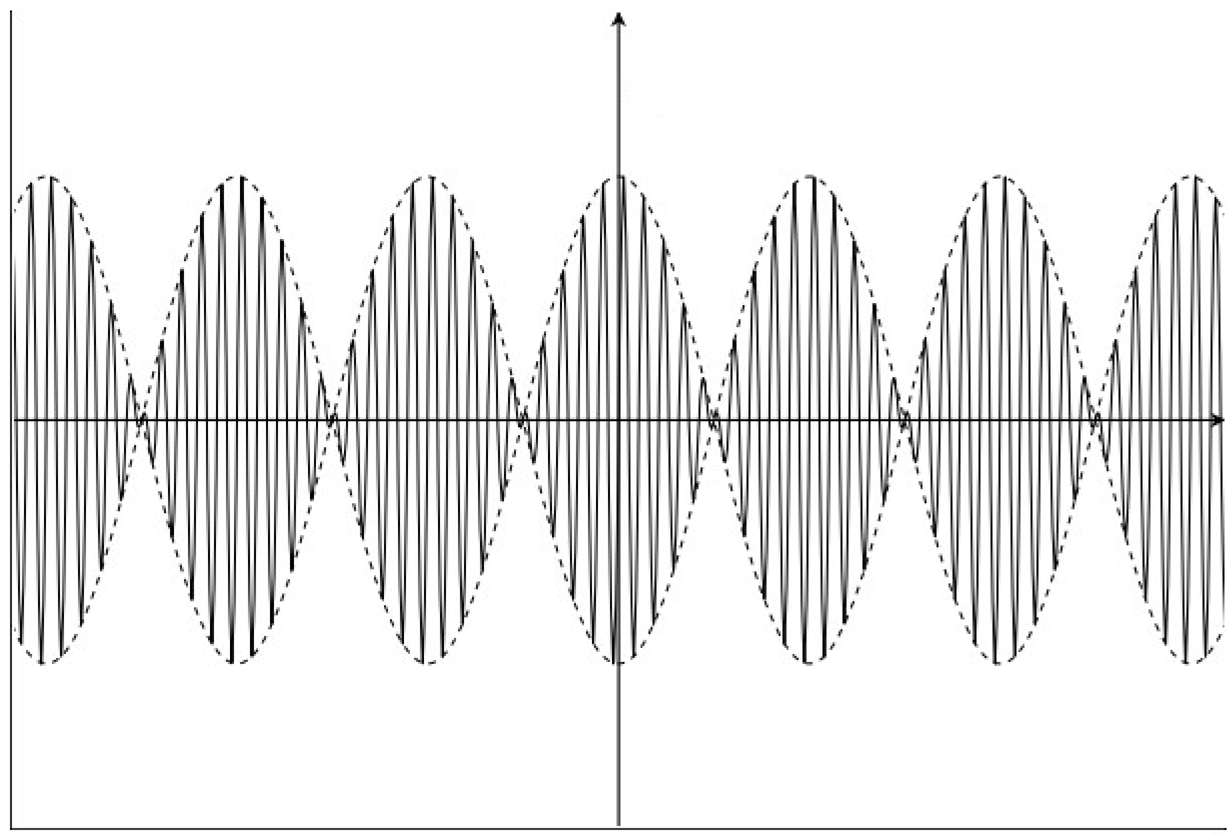
$$y = C_1 \cos \omega_N t + C_2 \sin \omega_N t + y_p$$

ต่อไปจะหา y_p

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D^2 + \omega_N^2}\left[\frac{1}{m} \sin \omega t\right] \\ &= \frac{1}{m}\ \mathrm{Im}\left(\frac{1}{D^2 + \omega_N^2}\left[e^{i\omega t}\right]\right) \\ &= \frac{1}{m}\ \mathrm{Im}\left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega_N^2 - \omega^2}\right) \\ &= \frac{1}{m}\frac{\sin \omega t}{\omega_N^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นได้ผลเฉลยทั่วไป

$$y = C_1 \cos \omega_N t + C_2 \sin \omega_N t + \frac{1}{m(\omega_N^2 - \omega^2)} \sin \omega t$$



ตัวอย่าง (Undamped, Resonance)

สมมติ $\gamma = 0$ และ

$$f(t) = \sin \omega_N t$$

นั่นคือสมการ

$$y'' + \omega_N^2 y = \frac{1}{m} \sin \omega_N t$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

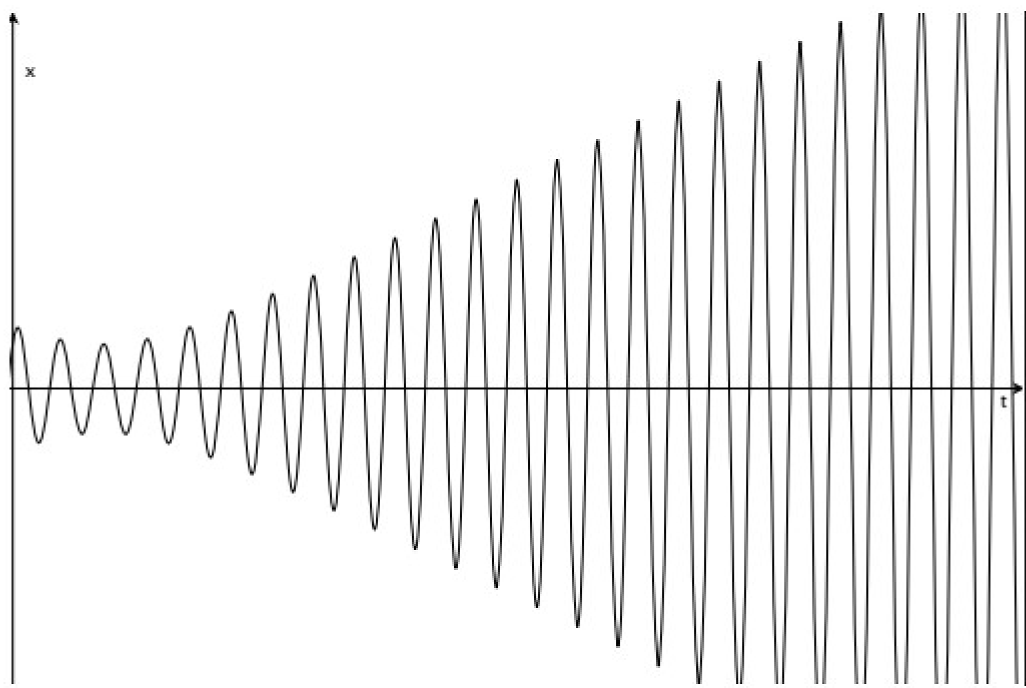
$$y = C_1 \cos \omega_N t + C_2 \sin \omega_N t + y_p$$

หา y_p จาก

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D^2 + \omega_N^2}\left[\frac{1}{m} \sin \omega_N t\right] \\ &= \frac{1}{m} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{D^2 + \omega_N^2}\left[e^{i\omega_N t}\right]\right) \\ &= \frac{1}{m} \operatorname{Im}\left(\frac{te^{i\omega_N t}}{2i\omega_N}\right) \\ &= -\frac{1}{m} \frac{t \cos \omega_N t}{2\omega_N} \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = C_1 \cos \omega_N t + C_2 \sin \omega_N t - \frac{1}{2m\omega_N} t \cos \omega_N t$$



ตัวอย่าง (Damped Free Vibration)

พิจารณาผลจากแรงเสียดทาน นั่นคือให้ $\gamma > 0$ และกำหนดให้ $f(t) = 0$ โดยไม่เสียนัยทั่วไปให้ $m = 1$

จาก (1) จะได้สมการ

$$y'' + 2\gamma y' + \omega_N^2 y = 0$$

สมการช่วย

$$m^2 + 2\gamma m + \omega_N^2 = 0$$

ซึ่งมีรากคือ

$$m_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_N^2}$$

พิจารณาสามกรณี

1. **หน่วงมาก** (Overdamped) เมื่อ $\gamma > \omega_N$ จะได้ว่า m_1, m_2 เป็น**จำนวนจริงลบ**ค่าต่างกันและ

$$y(t) = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t}$$

ได้ว่า $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$

2. **หน่วงวิกฤติ** (Critically Damped) เมื่อ $\gamma = \omega_N$

จะได้ $m_1 = m_2 = -\omega_N$ และผลเฉลยทั่วไป

$$y(t) = C_1 e^{-\omega_N t} + C_2 t e^{-\omega_N t}$$

3. **หน่วงน้อย** (Underdamped) เมื่อ $\gamma < \omega_N$ จะได้

m_1, m_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนคู่สังยุค

ให้ $\theta = \sqrt{\omega_N^2 - \gamma^2}$ จะได้ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y(t) = e^{-\gamma t}(C_1 \cos \theta t + C_2 \sin \theta t)$$

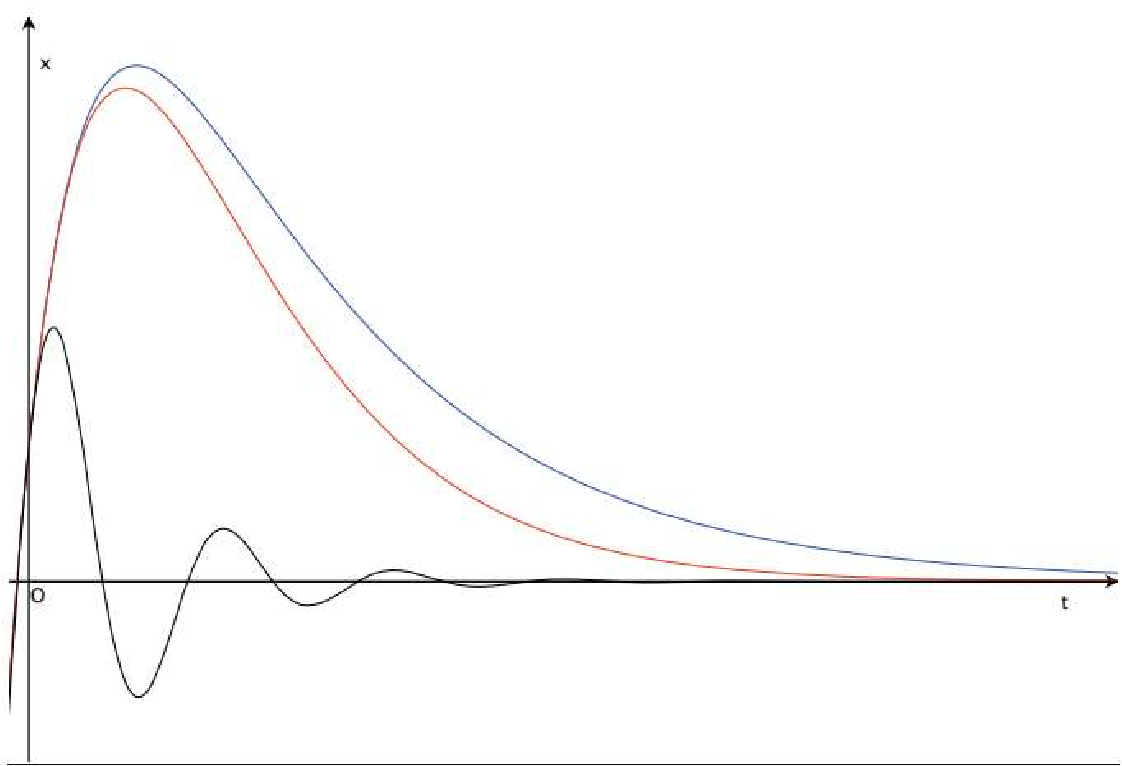
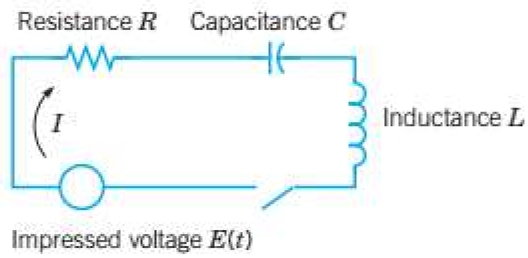


Fig. 5.4. Overdamped (*blue*), critically damped (*red*) and underdamped (*black*) response

ตัวอย่าง พิจารณาวงจรไฟฟ้า



1. แรงดันไฟฟ้า**ตัวต้านทาน** $V_R = RI$
2. แรงดันไฟฟ้า**ตัวเก็บประจุ** $V_C = Q/C$ (Q ประจุ)
3. แรงดันไฟฟ้า**ตัวเหนี่ยวนำ** $V_L = LdI/dt$

จากกฎของเคอร์ชอฟได้ว่า

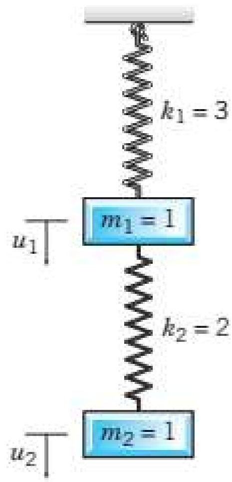
$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

หาอนุพันธ์เทียบ t และใช้ความสัมพันธ์ $\frac{dQ}{dt} = I$ ดังนั้น

$$L\,\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = E'(t)$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสอง

ตัวอย่าง พิจารณาระบบสปริงมวลที่ประกอบด้วยมวลและสปริงอย่างละสองดังรูป



ให้ u_1, u_2 เป็นระยะที่มวลเคลื่อนจากจุดสมดุลของสปริง k_1 และ k_2 ตามลำดับ

แรงกระทำต่อมวล m_1 ประกอบด้วย

$$F_{s1} = -k_1 u_1 = -3u_1$$

$$F_{s2} = -k_2(u_1 - u_2) = -2u_1 + 2u_2$$

จากกฎของนิวตันสำหรับมวล m_1 ได้ว่า

$$F_{s1} + F_{s2} = m_1 u_1''$$

นั่นคือ

$$u_1'' + 5u_1 = 2u_2$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อพิจารณามวล m_2 จะได้

$$u_2'' + 2u_2 = 2u_1$$

ขจัด u_2 ในสมการแรกได้

$$u_2 = \frac{u_1''}{2} + 5\frac{u_1}{2}$$

แทนในสมการสองได้

$$u_1^{(4)} + 7u_1'' + 6u_1 = 0$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธ์อันดับ 4

แก้สมการโดยใช้สมการช่วย

$$m^4 + 7m^2 + 6 = 0$$

ได้ราก

$$\pm i, \quad \pm i\sqrt{6}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$u_1 = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$
$$+C_3 \cos \sqrt{6}t + C_4 \sin \sqrt{6}t$$

เมื่อได้ u_1 แล้วสามารถคำนวณ u_2 ได้

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

พิจารณาสมการอันดับสองเชิงเส้น

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t)$$

ในการศึกษาสมการนี้สามารถทำได้อีกแนวทางหนึ่งคือ

แปลงเป็น**ระบบสมการเชิงเส้น**

ให้

$$x_1(t) = y(t)$$
$$x_2(t) = y'(t)$$

ใน ODE เมื่อแทน y, y' ด้วย x_1, x_2 ตามลำดับจะได้

$$x_2' + p(t)x_2 + q(t)x_1 = f(t)$$

ซึ่งเขียนได้เป็น

$$x_2' = -q(t)x_1 - p(t)x_2 + f(t)$$

จากนิยามของ x_1 จะได้

$$x_1' = y'(t) = x_2$$

เมื่อรวมสองสมการของ x_1', x_2' เราจะได้

$$\frac{d}{dt}\binom{x_1}{x_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{bmatrix}\binom{x_1}{x_2} + \binom{0}{f(t)}$$

ซึ่งเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์

ถ้ากำหนดเวกเตอร์ฟังก์ชัน

$$\vec{x}(t) = \binom{x_1(t)}{x_2(t)}$$

และเมตริกซ์

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{bmatrix}$$

พร้อมทั้งเวกเตอร์ฟังก์ชันของแรงภายนอก

$$\vec{f}(t) = \binom{0}{f(t)}$$

จะได้สมการ

$$\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{f}(t)$$

เรียกว่าสมการในรูป**เมตริกซ์-เวกเตอร์**

ตัวอย่าง จงแปลง ODE

$$y''' + 2y'' + 3y' - y = 0$$

ให้อยู่ในรูประบบสมการเชิงอนุพันธ์

<u>วิธีทำ</u>

บทนิยาม ระบบสมการในรูป

$$x_1' = F_1(t, x_1, \ldots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$x_n' = F_n(t, x_1, \ldots, x_n)$$

โดย $F_1, \ldots, F_n$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดให้และ $x_1, \ldots, x_n$ คือฟังก์ชันไม่ทราบค่า เรียกว่า**ระบบ ODE อันดับหนึ่ง** เงื่อนไขค่าเริ่มต้นคือ

$$x_1(t_0) = \alpha_1, \quad \ldots \quad , x_n(t_0) = \alpha_n$$

ระบบสมการเชิงเส้น

$$x_1' = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t)$$
$$\vdots$$
$$x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)$$

Note. ระบบสมการอันดับสูงสามารถแปลงเป็นระบบสมการอันดับหนึ่งได้เสมอ

ตัวอย่าง จงแปลงระบบ ODE ต่อไปนี้เป็นระบบ ODE

อันดับ 1

$$x''' + x' = 1$$
$$y'' - y^2 = 1$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง (Nonlinear System) ระบบ ODE อันดับ 1

$$x' = ax - bxy$$
$$y' = -cy + dxy$$

โดย a, b, c, d เป็นค่าคงตัวและ x, yเป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่ามีชื่อเรียกว่า Lotka-Volterra system ใช้ในการศึกษา predator-prey systems

การหาผลเฉลยโดยวิธีขจัดตัวแปรตาม

สำหรับระบบสมการเชิงเส้น

$$L_{11}(D)x_1 + \cdots + L_{1n}(D)x_n = f_1(t)$$

$$\vdots$$

$$L_{11}(D)x_1 + \cdots + L_{1n}(D)x_n = f_1(t)$$

โดย $L_{ij}(D)$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นอาจใช้วิธีการกำจัดตัวแปรตาม เช่นเดียวกับการแก้สมการพีชคณิตเชิงเส้นได้

เช่นระบบสมการ

$$x' = 2y$$

$$y' = -x$$

เขียนได้เป็น

$$Dx - 2y = 0$$

$$x + Dy = 0$$

ขจัด y โดยคูณสมการแรกด้วย D สมการสองด้วย 2 ได้

$$D^2x - 2Dy = 0$$

$$2x + 2Dy = 0$$

บวกทั้งสองสมการได้

$$D^2x + 2x = 0$$

ซึ่งแก้สมการได้

$$x(t) = C_1 \cos\sqrt{2}t + C_2 \sin\sqrt{2}t$$

จากสมการแรกได้ $y = x'/2$ ดังนั้น

$$y(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}C_1 \sin\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}C_2 \cos\sqrt{2}t$$

ตัวอย่าง จงใช้วิธีขจัดตัวแปรตามหาผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการ

$$x' = 3x + y$$
$$y' = -2x$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงใช้วิธีขจัดตัวแปรตามหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$x' = x + 2y$$
$$y' = 2x + 4y$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงใช้วิธีขจัดตัวแปรตามหาผลเฉลยของระบบ

สมการ

$$(D+1)(x+y) = 1$$
$$D^2x - Dy = 1/t$$

<u>วิธีทำ</u>