ระบบ ODE เชิงเส้นอันดับหนึ่ง

สัญลักษณ์ $\mathbb{R}^n$ คือปริภูมิเชิงเส้นซึ่งสมาชิกทั้งหมดคือเวกเตอร์

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}^T$$

โดย $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ และมีการบวกและการคูณจำนวนจริงดังนี้

การบวก

$$\vec{v} + \vec{u} = \begin{pmatrix} v_1 + u_1 \\ \vdots \\ v_n + u_n \end{pmatrix}$$

การคูณสเกลาร์

$$k\vec{v} = \begin{pmatrix} kv_1 \\ \vdots \\ kv_n \end{pmatrix}$$

พิจารณา IVP ของระบบ ODE เชิงเส้นอันดับหนึ่ง

$$x_1' = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t)$$
$$\vdots$$
$$x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)$$
$$x_1(t_0) = \alpha_1, \quad \ldots, \quad x_n(t_0) = \alpha_n$$

เมื่อ $t_0 \in I$

IVP ดังกล่าวเขียนในรูปเมตริกซ์-เวกเตอร์ได้

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t), \qquad \vec{x}(t_0) = \vec{\alpha} \tag{1}$$

โดย

$$\vec{x} = (x_1 \quad \cdots \quad x_n)^T : I \to \mathbb{R}^n$$
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} : I \to M_n(\mathbb{R})$$
$$\vec{f} = (f_1 \quad \cdots \quad f_n)^T : I \to \mathbb{R}^n$$
$$\vec{\alpha} = (\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

ทฤษฎีบท พิจารณาระบบ ODE

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t)$$

ให้ $A, \vec{f}$ ต่อเนื่องบนช่วง I และ $t_0 \in I$

1. (**การมีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว**) สำหรับ $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$

   ปัญหาค่าเริ่มต้น

   $$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{\alpha}$$

   มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว $\vec{x}: I \to \mathbb{R}^n$

2. (**สมบัติเชิงเส้น**) ถ้า $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ เป็นผลเฉลยของ

   ระบบ ODE เอกพันธ์

   $$\vec{x}' = A(t)\vec{x}$$

   จะได้ว่า

   $$c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_n\vec{x}_n$$

   เป็นผลเฉลยของระบบ ODE ด้วย

<u>บทพิสูจน์</u> สำหรับสมบัติเชิงเส้นพิสูจน์ได้ดังนี้

ให้ $\vec{x}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + \cdots + c_n\vec{x}_n(t)$ จะได้

$$\begin{aligned}
\vec{x}'(t) &= \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{x}_i'(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i A(t)\vec{x}_i(t) \\
&= A(t)\left[\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{x}_i(t)\right] \\
&= A(t)\vec{x}(t)
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\vec{x}$ เป็นผลเฉลยของระบบ ODE เอกพันธ์

บทนิยาม ให้ $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_n$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ จะกล่าวว่า $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_n$ **อิสระเชิงเส้น**เมื่อสมการ

$$c_1\vec{g}_1(t) + \cdots + c_n\vec{g}_n(t) = \vec{0} \quad \forall\, t$$

มีผลเฉลยเพียงชุดเดียวคือ $c_1 = \cdots = c_n = 0$

ถ้ามี $c_1, \ldots, c_n$ ที่ไม่เท่ากับศูนย์ทั้งหมดที่ทำให้

$$c_1\vec{g}_1(t) + \cdots + c_n\vec{g}_n(t) = \vec{0} \quad \forall\, t$$

จะกล่าวว่า $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_n$ **ไม่อิสระเชิงเส้น**

รอนสเกียนของ $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_n$ นิยามโดย

$$W(\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_n) = \det\begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}$$

เมื่อ

$$\vec{g}_j = \begin{pmatrix} g_{1j} \\ \vdots \\ g_{nj} \end{pmatrix} \quad j = 1,2, \ldots, n$$

ตัวอย่าง สำหรับ ODE อันดับสอง

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

แปลงในรูประบบ ODE ได้

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x}$$

เมื่อ

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{bmatrix}$$

ถ้า y_1, y_2 เป็นผลเฉลยสองอันของ ODE จะได้ผลเฉลยของระบบ ODE คือ

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}$$

รอนสเกียน

$$W(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$$

ซึ่งเท่ากับรอนสเกียนของ y_1, y_2 สำหรับ ODE

ทฤษฎีบท $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_n$ อิสระเชิงเส้นก็ต่อเมื่อมี t_0 ซึ่ง

$$W(\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_n)(t_0) \neq 0$$

<u>บทพิสูจน์</u> $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_n$ อิสระเชิงเส้นก็ต่อเมื่อสมการ

$$c_1\vec{g}_1(t) + \cdots + c_n\vec{g}_n(t) = \vec{0} \quad \forall\, t$$

มีผลเฉลยชุดเดียวคือ $c_1 = \cdots = c_n = 0$

สมการข้างบนเขียนได้เป็น

$$c_1\begin{pmatrix} g_{11}(t) \\ \vdots \\ g_{n1}(t) \end{pmatrix} + \cdots + c_n\begin{pmatrix} g_{1n}(t) \\ \vdots \\ g_{nn}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall\, t$$

นั่นคือสมการเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} g_{11}(t) & \cdots & g_{n1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}(t) & \cdots & g_{nn}(t) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall\, t$$

มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวก็ต่อเมื่อเมตริกซ์จัตุรัสมีดีเทอร์

มิแนนต์ไม่เท่ากับศูนย์ที่ t อย่างน้อยหนึ่งค่า

ตัวอย่าง กำหนดให้

$$\vec{x}_1(t) = (e^{-3t} \quad e^{-3t})^T$$

$$\vec{x}_2(t) = (e^{-4t} \quad 2e^{-4t})^T$$

จงพิจารณาความอิสระเชิงเส้นของ $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$

<u>วิธีทำ</u>

ทฤษฎีบท ให้ $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ เป็นผลเฉลยของ

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x}$$

จะได้ว่ามีค่าคงที่ C ซึ่งทำให้

$$W(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = Ce^{\int \mathrm{Tr}\, A(t)dt}$$

เมื่อ

$$\mathrm{Tr}\, A(t) = a_{11}(t) + \cdots + a_{nn}(t)$$

ดังนั้นรอนสเกียนมีค่าเป็นฟังก์ชันศูนย์หรือไม่ก็เป็นฟังก์ชันที่ไม่เท่ากับศูนย์เลย

<u>บทพิสูจน์</u> พิจารณาเฉพาะกรณี $n = 2$

ให้ $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ พิจารณาอนุพันธ์ของรอนสเกียน

$$W'(t) = \begin{vmatrix} \xi_1' & \eta_1' \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2' & \eta_2' \end{vmatrix}$$

จากระบบ ODE ได้

$$\xi_i' = a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 \quad i = 1,2$$

$$\eta_j' = a_{j1}\eta_1 + a_{j2}\eta_2 \quad j = 1,2$$

แทนในสมการข้างบนและจัดรูปได้

$$W'(t) = \begin{vmatrix} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 & a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 & a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11} + a_{22})W(t)$$

โดยการแก้สมการอันดับหนึ่งจะได้ผลที่ต้องการ

ตัวอย่าง จงนำผลที่ได้จากทฤษฎีบทไปพิสูจน์ทฤษฎีบทของ Abel สำหรับ ODE อันดับสอง

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง พิจารณาระบบ ODE

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{bmatrix} \vec{x}$$

โดย a, b เป็นค่าคงตัว ถ้ามี $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ ที่ทำให้

$$\vec{x}_1 = e^t \vec{v}_1, \quad \vec{x}_2 = e^{kt} \vec{v}_2$$

เป็นผลเฉลยของระบบ ODE ดังกล่าว จงหาค่า k

<u>วิธีทำ</u>

ทฤษฎีบท ให้ $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ เป็นผลเฉลยของระบบ ODE

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} \quad (t \in I) \tag{2}$$

โดย A ต่อเนื่องบน I

ถ้า $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ อิสระเชิงเส้นจะได้ว่า

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_n\vec{x}_n$$

เป็นผลเฉลยทั่วไปของระบบ ODE เอกพันธ์

Note เรียกผลเฉลย $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ ของสมการเอกพันธ์ (2) ที่อิสระเชิงเส้นว่า**ผลเฉลยหลักมูล**

ระบบ ODE สัมประสิทธิ์ค่าคงที่

ในหัวข้อนี้จะศึกษาการหาผลเฉลยของระบบ ODE

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

โดย A เป็นเมตริกซ์ $n \times n$ ที่มีพจน์เป็นค่าคงตัว

ในที่นี้จะใช้การคาดเดาผลเฉลยในรูป

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$$

เมื่อ $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์

บทตั้ง ถ้า λ ทำให้ $e^{\lambda t}\vec{v}$ เป็นผลเฉลยของระบบ ODE

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

จะได้ว่า

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

นั่นคือ λ เป็น**ค่าเจาะจง** และ $\vec{v}$ เป็น**เวกเตอร์เจาะจง**ที่สมนัยกันของ A

คำนวณ λ ได้จากสมการ $\det(A - \lambda I) = 0$

<u>บทพิสูจน์</u> แทน $\vec{x} = e^{\lambda t}\vec{v}$ ในระบบสมการได้

$$\lambda e^{\lambda t}\vec{v} = Ae^{\lambda t}\vec{v}$$

$$e^{\lambda t}(A - \lambda I)\vec{v} = 0$$

$$(A - \lambda I)\bar{v} = 0$$

ดังนั้น λ เป็นค่าเจาะจงของ A มีเวกเตอร์เจาะจงคือ $\bar{v}$

ทฤษฎีบท ถ้าเมตริกซ์ A มีค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกันคือ

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n$$

$$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$$

โดย $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ อิสระเชิงเส้นจะได้ว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

คือ

$$\vec{x} = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}\vec{v}_n$$

ตัวอย่าง ให้

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) จงหาค่าเจาะจงทั้งหมดพร้อมด้วยเวกเตอร์เจาะจง

(2) จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\vec{x}' = A\vec{x}$

(3) จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นเมื่อกำหนด

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการ

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการ

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

<u>วิธีทำ</u>

ระบบ ODE ไม่เอกพันธ์

หัวข้อนี้จะศึกษาการแก้ระบบ ODE

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t) \qquad (1)$$

เมื่อ A เป็นเมตริกซ์ $n \times n$ ค่าคงตัวและ $\vec{f}: I \to \mathbb{R}^n$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ทฤษฎีบท ให้ $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ เป็นผลเฉลยหลักมูลของ

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} \qquad (2)$$

และ $\vec{x}_p$ เป็นผลเฉลยอันหนึ่งของสมการ (1)

จะได้ว่าผลเฉลยทั่วไปของ (1) คือ

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_n\vec{x}_n + \vec{x}_p$$

ในที่นี้จะเสนอวิธีการหาผลเฉลยเฉพาะ $\vec{x}_p$ ด้วยวิธี VPM ดังนี้

กำหนดให้

$$\Phi(t) = [\vec{x}_1(t) \quad \cdots \quad \vec{x}_n(t)]$$

เรียกว่า**เมตริกซ์หลักมูล**

VPM หาผลเฉลยของ (1) ในรูป

$$\vec{x} = \Phi(t)\vec{u}$$

ทฤษฎีบท ผลเฉลยเฉพาะของ (1) คือ

$$\vec{x}_p = \Phi(t)\int \Phi(t)^{-1}\vec{f}(t)\,dt$$

เมื่อ Φ^{-1} คือเมตริกซ์ผกผัน

<u>บทพิสูจน์</u> จาก $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ สอดคล้อง $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$ ได้ว่า

$$\Phi'(t) = A(t) \cdot \Phi(t)$$

แทน $\vec{x} = \Phi(t)\vec{u}$ ในสมการ

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t) \qquad (1)$$

ได้

$$\Phi'\vec{u} + \Phi\vec{u}' = A\Phi\vec{u} + \vec{f}$$

ดังนั้น

$$\Phi\vec{u}' = \vec{f}$$

นั่นคือ

$$\vec{u}' = \Phi^{-1}\vec{f}$$

อินทิเกรตและแทนในผลเฉลยได้

$$\vec{x}_p = \Phi\int \Phi^{-1}\vec{f}\,dt$$

ตามต้องการ

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของ

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 2t-2 \\ -4t \end{pmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของระบบ ODE

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u>

เมตริกซ์ e^{At}

สำหรับ ODE

$$y' = Ay, \quad y(0) = 1$$

โดย A เป็นค่าคงตัวสามารถหาผลเฉลยได้อีกแบบดังนี้

กระจายอนุกรมเทย์เลอร์ได้

$$y = y(0) + y'(0)t + y''(0)\frac{t^2}{2!} + y'''(0)\frac{t^3}{3!} + \cdots$$

จาก ODE ได้

$$y'(0) = Ay(0) = A$$
$$y''(0) = Ay'(0) = A^2$$
$$y'''(0) = Ay''(0) = A^3$$

เพราะฉะนั้น

$$y = 1 + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + \cdots = e^{At}$$

ด้วยเทคนิกเดียวกันจะได้ผลลัพธ์ดังนี้

บทนิยาม สำหรับเมตริกซ์ A ขนาด $n \times n$

$$e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + \cdots$$

เรียกว่า**เมตริกซ์เอกโพเนนเชียล**

ผลลัพธ์ที่สำคัญคือทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ผลเฉลยของ IVP

$$\vec{x}' = A\vec{x} + f(t), \quad \vec{x}(0) = \vec{\alpha}$$

เมื่อ A เป็นเมตริกซ์คงตัว คือ

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{\alpha} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau$$

ตัวอย่าง ให้

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

จงหา e^{At}

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง ให้

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

จงหา e^{At}

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง ให้

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

จงหา e^{At}

<u>วิธีทำ</u>