สมบัติของเมตริกซ์เอกโพเนนเชียล

ในหัวข้อที่แล้วได้กล่าวถึงเมตริกซ์

$$e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^n}{n!}$$

เมื่อ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เป็นเมตริกซ์ค่าคงตัว

บทตั้ง สมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. อนุกรมลู่เข้าสำหรับทุกจำนวนจริง t
2. $(e^{At})|_{t=0} = I,\quad e^{A(s+t)} = e^{As}e^{At},\ [e^{At}]^{-1} = e^{-At}$
3. $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$
4. $\left(\frac{d}{dt}e^{At}\right)|_{t=0} = A$

<u>บทพิสูจน์</u> 1. ใช้ความรู้ Math Analysis

2. พิสูจน์ตรง ๆ

3. หาอนุพันธ์เทียบ t ได้

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{At} &= \frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{d}{dt}\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} A^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= Ae^{At}
\end{aligned}
$$

4. ได้จากการแทน $t = 0$ ในข้อ 3.

ทฤษฎีบท ผลเฉลยของ IVP

$$\vec{x}' = A\vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \vec{\alpha}$$

คือ

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{\alpha}$$

<u>บทพิสูจน์</u> ให้ $\vec{x}(t) = e^{At}\vec{\alpha}$ พิจารณา

$$\vec{x}'(t) = \frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \frac{d}{dx}e^{At}\vec{\alpha}$$

เนื่องจาก $\vec{\alpha}$ เป็นเวกเตอร์คงตัว ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}e^{At}\vec{\alpha} = \left(\frac{d}{dt}e^{At}\right)\vec{\alpha}$$

จากบทตั้งได้

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$$

ดังนั้น

$$\vec{x}'(t) = (Ae^{At})\vec{\alpha} = A\vec{x}(t)$$

นั่นคือ $\vec{x}$ สอดคล้องกับระบบ ODE

พิจารณาค่าเริ่มต้น

$$\begin{aligned}\vec{x}(0) &= (e^{At}\vec{\alpha})|_{t=0} \\ &= (e^{At})|_{t=0}\vec{\alpha} \\ &= \vec{\alpha}\end{aligned}$$

โดยบทตั้ง ดังนั้น $\vec{x}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยทั่วไปของระบบ ODE

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยทั่วไปของระบบ ODE

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}$$

วิธีทำ

วิธีของ Fulmer ในการคำนวณ e^{At}

ในการคำนวณเมตริกซ์เอกโพเนนเชียล e^{At} เมื่อ A เป็นเมตริกซ์ค่าคงตัวทำได้อีกวิธีดังนี้

ให้สมการลักษณะเฉพาะ $\det(A-\lambda I)=0$ ของเมตริกซ์ A เขียนได้เป็น

$$L_A(\lambda)=0$$

โดย L_A เป็นพหุนามระดับขั้น n

$$L_A(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0 \qquad (1)$$

พิจารณา ODE

$$L_A(D)y=0, \quad D=\frac{d}{dt} \qquad (2)$$

ให้ผลเฉลยหลักมูลของ (2) คือ

$$\phi_1(t),\ \ \phi_2(t),\ \ \ldots,\ \ \phi_n(t)$$

จะได้ว่ามีเมตริกซ์ค่าคงตัว $M_1, M_2, \dots, M_n$ ขนาด $n \times n$ ซึ่งทำให้

$$e^{At} = M_1\phi_1 + M_2\phi_2 + \cdots + M_n\phi_n$$

แก้สมการหา $M_1, M_2, \dots, M_n$ โดยการหาอนุพันธ์และแทน $t = 0$:

$$I = M_1\phi_1(0) + \cdots + M_n\phi_n(0)$$
$$A = M_1\phi_1'(0) + \cdots + M_n\phi_n'(0)$$
$$\vdots$$
$$A^{n-1} = M_1\phi_1^{(n-1)}(0) + \cdots + M_n\phi_n^{(n-1)}(0)$$

ตัวอย่าง พิจารณาระบบ ODE

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \vec{x}$$

1. จงหา e^{At} เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$
2. จงหาผลเฉลยทั่วไปของระบบ ODE

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง พิจารณาระบบ ODE

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}$$

1. จงหา e^{At} เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$
2. จงหาผลเฉลยทั่วไปของระบบ ODE

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง พิจารณาระบบ ODE

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \vec{x}$$

1. จงหา e^{At} เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$
2. จงหาผลเฉลยทั่วไปของระบบ ODE

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง พิจารณาระบบ ODE

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}$$

1. จงหา e^{At} เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
2. จงหาผลเฉลยทั่วไปของระบบ ODE

<u>วิธีทำ</u>

ระบบ ODE ไม่เอกพันธ์

พิจารณาระบบ ODE

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \qquad (1)$$

โดย A เป็นเมตริกซ์ค่าคงตัวขนาด $n \times n$

ให้ $\{\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)\}$ เป็นผลเฉลยหลักมูลของ (1)

จะได้เมตริกซ์หลักมูล

$$\Phi(t) = [\vec{x}_1(t) \quad \cdots \quad \vec{x}_n(t)]$$

ซึ่งเป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ และผลเฉลยของ (1)

บทตั้ง ให้ $\Phi(t)$ เป็นเมตริกซ์หลักมูลจะได้

$$\Phi(t) = e^{At}\Phi(0)$$

<u>บทพิสูจน์</u> ก่อนอื่นจะแสดงว่า

$$\vec{x}_i(t) = e^{At}\vec{x}_i(0)$$

สำหรับ $i = 1,2,\dots,n$

จากทฤษฎีบทก่อนหน้าได้ว่าผลเฉลยของ IVP

$$\vec{x}' = A\vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \vec{\alpha}$$

คือ

$$e^{At}\vec{\alpha}$$

แทน $\vec{\alpha} = \vec{x}_i(0)$ จะได้ว่า

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}_i(0)$$

เป็นผลเฉลยของ IVP

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_i(0)$$

แต่เห็นได้ชัดว่า $\vec{x}_i(t)$ ก็เป็นผลเฉลยของ IVP ด้วย

เพราะฉะนั้น

$$\vec{x}_i(t) = e^{At}\vec{x}_i(0)$$

จากสมบัติดังกล่าวทำให้ได้ว่า

$$[\vec{x}_1 \quad \cdots \quad \vec{x}_n] = e^{At}[\vec{x}_1(0) \quad \cdots \quad \vec{x}_n(0)]$$

นั่นคือ $\Phi(t) = e^{At}\Phi(0)$ ตามต้องการ

ทฤษฎีบท ผลเฉลยของ IVP

$$\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{f}(t), \quad \vec{x}(0) = \vec{\alpha}$$

คือ

$$\vec{x}(t) = e^{AT}\vec{\alpha} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\vec{f}(\tau)\,d\tau$$

<u>บทพิสูจน์</u> ให้ Φ เป็นเมตริกซ์หลักมูล ดังนั้น

$$\vec{x}_p(t) = \Phi(t)\int_0^t \Phi(\tau)^{-1}\vec{f}(\tau)\,d\tau$$

จากบทตั้งได้

$$\begin{aligned}\vec{x}_p(t) &= e^{At}\Phi(0)\int_0^t [e^{A\tau}\Phi(0)]^{-1}\vec{f}(\tau)\,d\tau \\ &= e^{At}\Phi(0)\int_0^t \Phi(0)^{-1}[e^{A\tau}]^{-1}\vec{f}(\tau)\,d\tau \\ &= \int_0^t e^{A(t-\tau)}\vec{f}(\tau)\,d\tau\end{aligned}$$

เห็นได้ชัดว่า $e^{At}\vec{\alpha} + \vec{x}_p(t)$ สอดคล้อง IVP

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ และ

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{4t} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} te^{4t}$$

จงหาผลเฉลยของ IVP

$$\vec{x}' = A\vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{4t} \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u>