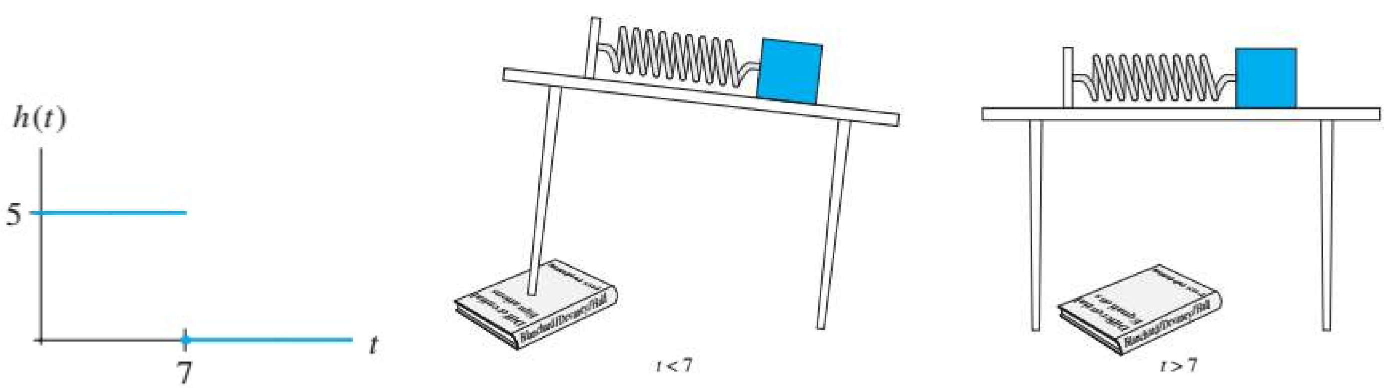
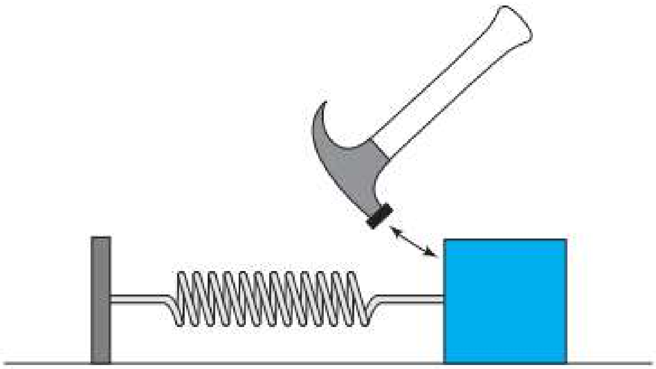
Laplace Transform

หัวข้อนี้จะศึกษา**การแปลงลาปลาซ**และนำไปใช้แก้ปัญหาค่าเริ่มต้น

ข้อดีของวิธีแปลงลาปลาซในการแก้ IVP คือ สามารถนำไปใช้แก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันนอกเหนือจากฟังก์ชันพหุนาม ตรีโกณมิติ เอกโพเนนเชียล เช่นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องในตัวอย่างต่อไปนี้

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = h(t), \quad y(0) = y'(0) = 0,$$





$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 26y = g(t),$$

$$g(t) = \begin{cases} \text{very big}, & \text{when } t = 4; \\ 0, & \text{when } t \neq 4. \end{cases}$$

ในท้ายที่สุดเราจะได้ว่าการแปลงลาปลาซทำให้การแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นมีลักษณะเป็นคณิตศาสตร์เชิงดำเนินการ (Operational Mathematics)

บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง $[0, \infty)$ **ผลการแปลงลาปลาซ**ของ f คือฟังก์ชัน F ที่นิยามโดย

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

เมื่ออินทิกรัลลู่เข้า

- นิยมเขียนแทน F ด้วย $\mathcal{L}[f(t)]$ นั่นคือ

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

เช่น

$$\mathcal{L}[2\sin t - e^{3t} + 6t^3 - 4]$$

- สูตรการแปลงลาปลาซเป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st} f(t)\, dt$$

- ในที่นี้จะพิจารณาโดเมนของ F เป็นเซตของจำนวนจริง s ทั้งหมดที่อินทิกรัลลู่เข้า แต่สามารถขยายไปจำนวนเชิงซ้อนได้ด้วย

ตัวอย่าง ให้ a เป็นจำนวนจริง จงแสดงว่า

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \qquad (s > a)$$

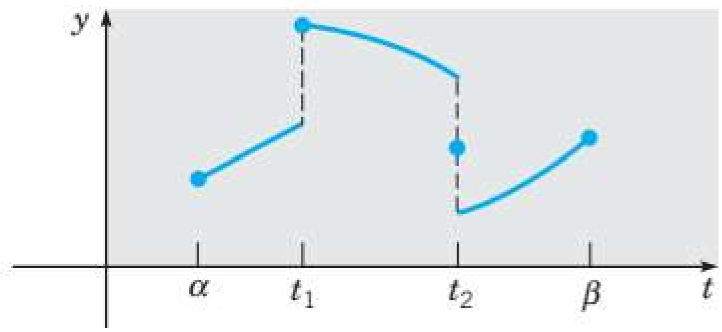
กรณี $a = 0$ จะได้

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$

<u>วิธีทำ</u>

ทฤษฎีบท (การมีผลการแปลงลาปลาซ)

สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วง



และมีจำนวนจริง M, α โดย $M > 0$ ซึ่ง

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \quad \text{ทุก } t$$

จะได้ว่า $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ ลู่เข้าสำหรับทุก $s > \alpha$

<u>บทพิสูจน์</u> จากสมมติฐานได้ว่า

$$|e^{-st}f(t)| \leq Me^{-(s-\alpha)t}$$

ให้ $s > \alpha$ จะได้ว่า

$$\int_0^\infty Me^{-(s-\alpha)t}\, dt = \frac{M}{s-\alpha}$$

จากความรู้แคลคูลัส ถ้า $\int_0^\infty |g(t)|\, dt$ ลู่เข้าแล้วจะได้ว่า $\int_0^\infty g(t)\, dt$ ลู่เข้าด้วย

เพราะฉะนั้นอินทิกรัล

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \quad (s > \alpha)$$

ลู่เข้า

ตัวอย่าง ฟังก์ชันขั้นบันไดหรือ Heaviside function คือ

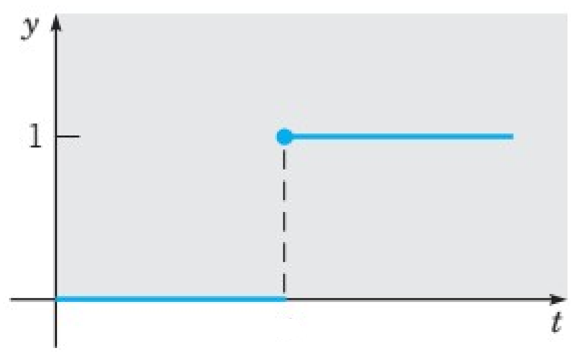
$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

ให้ $a > 0$ เป็นค่าคงตัว จงแสดงว่า

$$H(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$$

และ

$$\mathcal{L}[H(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s}$$



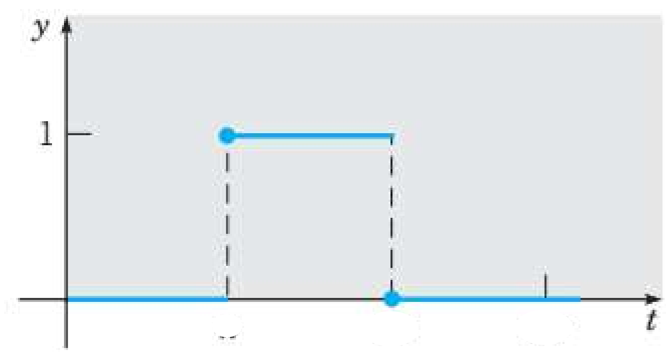
<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง ให้ a, b เป็นจำนวนจริงโดย $0 \leq a \leq b$ นิยาม **ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ**

$$\chi_{[a,b)}(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & a \leq t < b \\ 0 & t \geq b \end{cases}$$

จงแสดงว่า

$$\mathcal{L}\left[\chi_{[a,b)}(t)\right] = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}$$



<u>วิธีทำ</u>

Properties of Laplace Transform

ตลอดหัวข้อนี้จะสมมติว่าฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องทั้งหมดสอดคล้องกับสมมติฐานในทฤษฎีบทการมีผลการแปลงลาปลาซ

ทฤษฎีบท (สมบัติเชิงเส้น)

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$$

<u>บทพิสูจน์</u> จากสมบัติเชิงเส้นของอินทิกรัลได้

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\{af(t) + bg(t)\}\,dt \\
&= a\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt + b\int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt \\
&= a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาผลการแปลงลาปลาซ

$$\mathcal{L}[3e^{-3t} + 5H(t-1) - 6]$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง ให้

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 3 & 1 \le t < 2 \\ -5 & t \ge 2 \end{cases}$$

จงแสดงว่า

$$f(t) = 3\chi_{[1,2)} - 5H(t-2)$$

พร้อมทั้งหา $\mathcal{L}[f(t)]$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง กำหนดให้สูตรผลการแปลงลาปลาซ

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$$

เป็นจริงเมื่อ $a \in \mathbb{C}$ ด้วย

จงใช้สูตรของออยเลอร์พร้อมทั้งผลลัพธ์ข้างบนหาผลการแปลงลาปลาซ $\mathcal{L}[\sin at], \mathcal{L}[\cos at]$

<u>วิธีทำ</u>

ทฤษฎีบท ให้ $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ จะได้ว่า F มีอนุพันธ์ทุกอันดับและ

$$\frac{d^n F(s)}{ds^n} = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)]$$

สำหรับ $n \in \mathbb{N}$

<u>บทพิสูจน์</u> ตรวจสอบได้ไม่ยากว่า $t^n f(t)$ สอดคล้องกับสมมติฐานการแปลงลาปลาซ

พิจารณากรณี $n = 1$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[tf(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot tf(t)\,dt \\
&= -\int_0^\infty \left(\frac{d}{ds} e^{-st}\right) f(t)\,dt \\
&= -\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \\
&= -\frac{dF(s)}{ds}
\end{aligned}$$

ดังนั้นกรณี $n = 1$ เป็นจริง

กรณี $n = 2$ ได้

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t^2 f(t)] &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[tf(t)] \\ &= -\frac{d}{ds}\left(-\frac{d}{ds}F(s)\right) \\ &= (-1)^2 \frac{d^2F(s)}{ds^2}\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันได้ว่า

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^nF(s)}{ds^n}$$

ตามต้องการ

ตัวอย่าง จงแสดงว่า

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}, \quad \mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s^3}, \quad \mathcal{L}[t^3] = \frac{3!}{s^4}$$

และในกรณีทั่วไป

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad n \in \mathbb{N}$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาฟังก์ชัน $f(t)$ ซึ่งมีผลการแปลงลาปลาซ

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{(s+1)^2}$$

<u>วิธีทำ</u>

ทฤษฎีบท ให้ $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ จะได้

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

<u>บทพิสูจน์</u> โดยการอินทิเกรตทีละส่วนได้

$$\int_0^R e^{-st} f'(t)\, dt$$

$$= e^{-sR} f(R) - f(0) - \int_0^R (-se^{-st}) f(t)\, dt$$

$$= e^{-sR} f(R) - f(0) + sF(s)$$

สามารถตรวจสอบได้ว่า

$$\lim_{R\to\infty} |e^{-sR} f(R)| = 0$$

ดังนั้น

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

ตามต้องการ

บทแทรก สำหรับฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อันดับสูงจะได้

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}[f'''(t)] = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

และในกรณีทั่วไป

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

ตัวอย่าง จงหา $\mathcal{L}[\sin \omega t]$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\mathcal{L}[\cos \omega t]$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง ให้ y เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 2t + e^{-t}\sin t \\ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 5 \end{cases}$$

จงหาผลการแปลงลาปลาซ $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$

<u>วิธีทำ</u>

สมบัติอื่น ๆ

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

<u>บทพิสูจน์</u> ทำได้โดยใช้แคลคูลัส

ตัวอย่าง จงหา

$$\mathcal{L}[e^{at}\sin\omega t]$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง ให้ $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ e^{2t} & 3 \le t < 5 \\ 0 & t \ge 5 \end{cases}$ จงหา$\mathcal{L}[f(t)]$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาฟังก์ชันซึ่งมีผลการแปลงลาปลาซต่อไปนี้

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{(s-a)^n}$$

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[h(t)] = \frac{e^{-bs}}{s-a}$$

<u>วิธีทำ</u>