Inverse Laplace Transform

พิจารณา IVP

$$y'(t) + 2y(t) = 0, \quad y(0) = 1$$

แปลงลาปลาซใน ODE ที่กำหนดให้จะได้

$$\mathcal{L}[y'(t) + 2y(t)] = \mathcal{L}[0]$$
$$\big(sY(s) - y(0)\big) + 2Y(s) = 0$$

แก้สมการได้

$$Y(s) = \frac{1}{s+2}$$

จากผลการแปลงลาปลาซ

$$\mathcal{L}[e^{-2t}] = \frac{1}{s+2}$$

ดังนั้นได้ว่า

$$y(t) = e^{-2t}$$

คำตอบที่ได้นี้สอดคล้องกับ IVP

ทฤษฎีบท ให้ $f(t), g(t)$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับสมมติฐานของทฤษฎีบทการมีผลการแปลงลาปลาซ

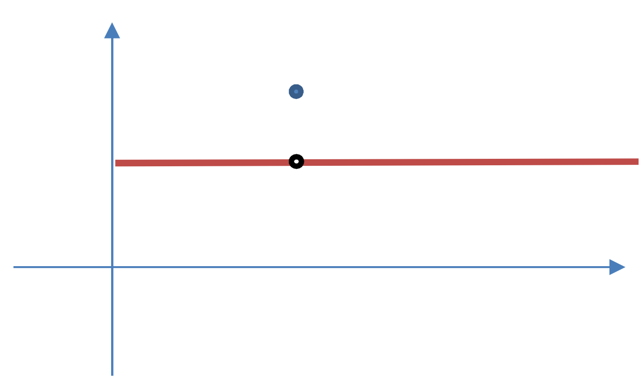
กำหนดให้

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$$

จะได้ว่า

1. $f(t) = g(t)$ ทุก t ยกเว้นจำนวนจริง t จำนวนนับได้ (countable)
2. ถ้า f, g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจะได้ว่า $f(t) = g(t)$ ทุกจำนวนจริง t

Note สองฟังก์ชันต่อไปนี้มีผลการแปลงลาปลาซเท่ากัน



บทนิยาม ให้ $F(s)$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดให้

ถ้า $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่มีสมบัติว่า

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

จะเรียกฟังก์ชัน $f(t)$ ว่า**ผลการแปลงลาปลาซผกผัน** (หนึ่ง)ของฟังก์ชัน $F(s)$ และเขียนแทนด้วย

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

Note

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

ตัวอย่าง จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันต่อไปนี้

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-5}\right], \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s}\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+3}\right], \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{s^4}\right]$$

<u>วิธีทำ</u>

Properties of Inverse Laplace Transform

จากสมบัติของการแปลงลาปลาซได้ว่าการแปลงลาปลาซผกผันมีสมบัติต่อไปนี้

ทฤษฎีบท (สมบัติเชิงเส้น) ให้ $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ และ $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ จะได้

$$\mathcal{L}^{-1}[aF(s) + bG(s)] = af(t) + bg(t)$$

<u>บทพิสูจน์</u> จาก $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ ได้

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

และจาก $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ ได้

$$\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$$

ดังนั้นจากสมบัติเชิงเส้นของ $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = aF(s) + bG(s)$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}[aF(s) + bG(s)] = af(t) + bg(t)$$

ตัวอย่าง จงหาการแปลงลาปลาซผกผัน

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{4}{s-3}-\frac{s}{s^2+1}\right]$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหา

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s-7}{s^2+1}\right]$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2-1}{s(s+1)(s+3)}\right]$$

<u>วิธีทำ</u>

Note โดยทั่วไปถ้า $\deg P < N$ ฟังก์ชัน

$$R(s) = \frac{P(s)}{(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_N)}$$

โดย $a_1 < \cdots < a_N$ แยกเศษส่วนย่อยได้

$$R(s) = \frac{A_1}{s-a_1} + \frac{A_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{A_N}{s-a_N}$$

โดย

$$A_k = [R(s)(s-a_k)]_{s=a_k}$$

ทฤษฎีบท ให้ $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$ จะได้

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at}f(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}\right] = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

<u>บทพิสูจน์</u> จากสมบัติ

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

ดังนั้นสมบัติที่ต้องการแสดงเป็นจริง

Note

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s^2}\right] = \int_0^t \int_0^{\tau_1} f(\tau_2)d\tau_2\,d\tau_1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s^3}\right] = \int_0^t \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} f(\tau_3)\,d\tau_3\,d\tau_2\,d\tau_1$$

ตัวอย่าง จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2-2s+5}\right]$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s(s^2+4)}\right], \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s-1)}\right]$$

<u>วิธีทำ</u>

ทฤษฎีบท สำหรับจำนวนจริง $a \geq 0$ ได้ว่า

$$\mathcal{L}[f(t-a)H(t-a)] = e^{-as}F(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)] = f(t-a)H(t-a)$$

และ

$$\mathcal{L}[f(t)H(t-a)] = e^{-as}\mathcal{L}[f(t+a)]$$

<u>บทพิสูจน์</u> พิจารณา

$$\begin{aligned} e^{-as}F(s) &= e^{-as}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-s(t+a)}f(t)\,dt \\ &= \int_a^\infty e^{-su}f(u-a)\,du \\ &= \int_0^\infty e^{-st}f(t-a)H(t-a)\,dt \end{aligned}$$

เอกลักษณ์ที่สองเป็นจริงโดยนิยามของการแปลงลาปลาซผกผัน

ให้ $g(t) = f(t+a)$ ได้ $g(t-a) = f(t)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)H(t-a)] &= \mathcal{L}[g(t-a)H(t-a)] \\ &= e^{-as}\mathcal{L}[g(t)] \\ &= e^{-as}\mathcal{L}[f(t+a)]\end{aligned}$$

ตามต้องการ

Note สูตรลาปลาซผกผัน

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)] = f(t-a)H(t-a)$$

เขียนได้อีกแบบเป็น

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]|_{t-a}H(t-a)$$

ตัวอย่าง จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน

$$f(t)=\begin{cases}0 & 0<t<\dfrac{\pi}{2}\\ 3\sin t & t\geq\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน

$$f(t)=\begin{cases}0 & 0<t<2\\ t-1 & 2\le t<5\\ 0 & t\ge 5\end{cases}$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s+1}\right], \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3s}}{s^2+4}\right], \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s^3}\right]$$

<u>วิธีทำ</u>

ทฤษฎีบท ให้ $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ จะได้ว่า

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(r)dr$$

บทพิสูจน์ ให้ $G(s) = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]$ จาก

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[t\frac{f(t)}{t}\right] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = -G'(s)$$

ดังนั้นได้ว่า

$$G'(s) = -\mathcal{L}[f(t)] = -F(s)$$

เนื่องจาก $\lim_{s\to\infty} G(s) = 0$ ดังนั้นโดยการอินทิเกรตจะได้

$$H(s) = \int_s^{\infty} F(\xi)\, d\xi$$

ตัวอย่าง จงหาผลการแปลงลาปลาซ

$$\mathcal{L}\left[\frac{2(1-\cos t)}{t}\right]$$

<u>วิธีทำ</u>

Laplace Transform and IVP

การแปลงลาปลาซและลาปลาซผกผันช่วยในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น เมื่อแปลงลาปลาซกับ ODE ของฟังก์ชัน $y(t)$ และใช้สมบัติต่าง ๆ ของการแปลงลาปลาซรวมทั้งเงื่อนไขค่าเริ่มต้น เราจะได้สมการเกี่ยวข้องกับฟังก์ชัน $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ เมื่อแก้สมการได้ $Y(s)$ เราสามารถหาผลเฉลย $y(t)$ ของ IVP ได้โดยการแปลงลาปลาซผกผัน

ตัวอย่าง จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\begin{cases} y'' + y = 1 \\ y(0) = 2, \ \ y'(0) = 3 \end{cases}$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาฟังก์ชัน $y(t)$ ที่อนุพันธ์อันดับที่ 4 เป็นค่าคงที่เท่ากับ 1 และ $y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3, y'''(0) = 4$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 5H(t-3) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นของระบบสมการ

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}\vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u>