Convolution

ในการแปลงลาปลาซผกผันคำถามหนึ่งที่สำคัญคือ

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = ?$$

จะมีสูตรใดใช้ในการคำนวณผลการแปลงลาปลาซผกผันดังกล่าวที่ใช้ฟังก์ชัน

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)], \quad g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

บทนิยาม ให้ $f(t), g(t)$ นิยามฟังก์ชัน $h(t)$ โดย

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

เรียกฟังก์ชัน h ว่า**การสังวัตนาการ**ของ f, g และเขียนแทนด้วย $h = f * g$

Note

$$f * g = g * f$$

ตัวอย่าง จงหาการสังวัตนาการของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(t) = g(t) = 1$
2. $f(t) = t^n, g(t) = 1$
3. $f(t) = t^2, g(t) = t^3$
4. $f(t) = \sin t\,, g(t) = 1$

พร้อมทั้งคำนวณ $F(s) = \mathcal{L}[f(t)], G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$

และ $\mathcal{L}[f * g]$

<u>วิธีทำ</u>

ทฤษฎีบท ให้ $\mathcal{L}[f(t)] = F(s), \mathcal{L}[g(t)] = G(s)$

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s)G(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = f(t) * g(t)$$

<u>บทพิสูจน์</u> โดยนิยามได้

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right]$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right\}dt$$

$$= \int_0^\infty \left\{\int_\tau^\infty e^{-st} f(\tau)g(t-\tau)\,dt\right\}d\tau$$

$$= \int_0^\infty \left\{\int_\tau^\infty e^{-s(t-\tau)} \cdot e^{-s\tau} g(t-\tau)\,dt\right\}f(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty e^{-sx} g(x)\,dx\right\}f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau \quad (x = t-\tau)$$

$$= \int_0^\infty G(s)e^{-s\tau}f(\tau)\,d\tau = F(s)G(s)$$

ตัวอย่าง ให้ $f(t) = \int_0^t (t-\tau)^3 e^{2\tau}\, d\tau$ จงหาผลการแปลงลาปลาซ $\mathcal{L}[f(t)]$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชัน

$$F(s) = \frac{1 - e^{-bs}}{s(s+1)}$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชัน

$$F(s) = \frac{2s}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาสูตรผลเฉลยของ IVP

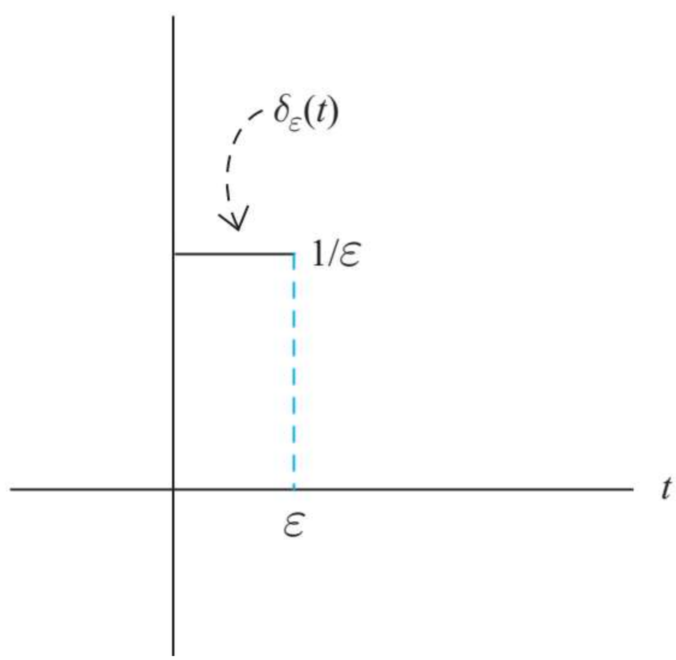
$$y'' + 4y' + 5y = f(t), \quad y(0) = \alpha, \;\; y'(0) = \beta$$

<u>วิธีทำ</u>

Dirac Delta Function

ในทางคณิตศาสตร์ประยุกต์มักมีการศึกษาแรงหรือสัญญาณที่มีขนาดสูงมากแต่เกิดในช่วงเวลาสั้น ๆ แรงหรือสัญญาณดังกล่าวจะแทนด้วย**ฟังก์ชันแรงดลหนึ่งหน่วย** (Impulse) หรือ Dirac delta

ความหมายแบบรัดกุมอยู่นอกเหนือวิชานี้ ในที่นี้ให้บทนิยามซึ่งนำไปใช้แก้สมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้



บทนิยาม สำหรับ $\varepsilon > 0$ ให้

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{1}{\varepsilon} & 0 \le t < \varepsilon \\ 0 & t \ge \varepsilon \end{cases} = \frac{1}{\varepsilon}\chi_{[0,\varepsilon)}(t)$$

ให้ $a \ge 0$ นิยาม

$$\delta(t-a) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \delta_\varepsilon(t-a)$$

ในความหมายว่าสำหรับฟังก์ชัน $f(t)$ และ $a \ge 0$ ใด ๆ

$$\int_0^\infty f(t)\delta(t-a)\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^\infty f(t)\delta_\varepsilon(t-a)\,dt$$

เรียก $\delta(t-a)$ ว่า**ฟังก์ชันแรงดลหนึ่งหน่วยที่ $\boldsymbol{a}$** หรือ Dirac delta function

Note ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจะได้

$$\int_0^\infty f(t)\delta(t-a)\,dt = f(a)$$

ทฤษฎีบท สำหรับจำนวนจริง $a \geq 0$ จะได้

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)] = e^{-as}$$

<u>บทพิสูจน์</u> จากบทนิยามได้

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)] = \int_0^\infty e^{-st}\delta(t-a)\,dt$$

เนื่องจาก $f(t) = e^{-st}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในตัวแปร t

ดังนั้น

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)] = f(a) = e^{-sa}$$

เมื่อ $a = 0$ ได้

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = e^{-s0} = 1$$

ตัวอย่าง จงหาการสังวัตนาการ

$$e^{at} * \delta(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)}\delta(\tau)\,d\tau$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงแก้ปัญหาค่าเริ่ม

$$\begin{cases} y'' + y = 3\delta(t-a) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 13y = 4\delta(t-3) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

วิธีทำ

สมการสัมประสิทธิ์ไม่ใช่ค่าคงที่

สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีสัมประสิทธ์เป็นพหุนามปรากฏมากในคณิตศาสตร์ เช่น สมการเบสเซล

$$t^2y'' + ty' + (t^2 - n^2)y = 0$$

สมการลาแกร์

$$ty'' + (1-t)y' + ny = 0$$

สมการเหล่านี้สามารถแก้ได้โดยวิธีการแปลงลาปลาซ

พิจารณาการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเบสเซลที่กำหนดให้ $y(0) = 0$ โดยการเปลี่ยนฟังก์ชัน

$$y = t^{-n}w$$

จะได้สมการใหม่เป็น

$$tw'' + (1-2n)w' + tw = 0$$

ใช้สมบัติ

$$\mathcal{L}[tw(t)] = -W'(s)$$

จะได้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน Y คือ

$$-(s^2+1)W' - (1+2n)sW = 0$$
$$\frac{W'}{W} = -(2n+1)\frac{s}{s^2+1}$$
$$\ln|W| = -\frac{(2n+1)}{2}\ln(s^2+1) + C$$
$$\therefore \quad W = D(s^2+1)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

เนื่องจากต้องการหาผลเฉลยเฉพาะดังนั้นจะกำหนดให้

$D = 1$ ได้

$$W = (s^2+1)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

โดยการกระจายทวินาม(อนันต์)

$$(1+x)^b = 1 + bx + \frac{b(b-1)}{2!}x^2 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

ดังนั้น

$$W = (s^2+1)^{-\frac{2n+1}{2}}$$
$$= \frac{1}{s^{2n+1}}\left(1+\frac{1}{s^2}\right)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

$$\left(1+\frac{1}{s^2}\right)^{-\frac{2n+1}{2}} = 1 - \frac{2n+1}{2}\frac{1}{s^2} + \frac{(2n+1)(2n+3)}{2!\,2^2}\frac{1}{s^4} + \cdots$$

ดังนั้น

$$W(s) = \frac{1}{s^{2n+1}} - \frac{2n+1}{2}\frac{1}{s^{2n+3}} + \frac{(2n+1)(2n+3)}{2!\,2^2}\frac{1}{s^{2n+5}} + \cdots$$

แปลงปลาปลาซผกผันได้

$$w(t) = \frac{t^{2n}}{(2n)!} - \frac{2n+1}{2}\frac{t^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{(2n+1)(2n+3)}{2!\,2^2}\frac{t^{2n+4}}{(2n+4)!} + \cdots$$

ดังนั้น

$$y(t) = \frac{t^{n}}{(2n)!} - \frac{2n+1}{2}\frac{t^{n+2}}{(2n+2)!} + \frac{(2n+1)(2n+3)}{2!\,2^2}\frac{t^{n+4}}{(2n+4)!} + \cdots$$

ผลเฉลยที่ได้นี้จะศึกษาในบทต่อไปโดยวิธีกระจายอนุกรมอนันต์และเรียกว่า**ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่ง**

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการต่อไปนี้โดยใช้การแปลงลาปลาซ

$$ty'' + (t-1)y' + y = 0, \;\; y(0) = 0$$

วิธีทำ