Series Solutions and Special Functions

สำหรับ ODE สัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวสามารถหาผลเฉลยชัดแจ้งได้โดยวิธีสมการลักษณะเฉพาะและวิธีอื่น ๆ ดังที่ได้เรียนไปแล้ว

สำหรับ ODE สัมประสิทธิ์ไม่ใช่ค่าคงตัว ได้แสดงตัวอย่างการหาผลเฉลยด้วยวิธีการแปลงลาปลาซ โดยผลเฉลยที่ได้อยู่ในรูปอนุกรมอนันต์ แต่การใช้การแปลงลาปลาซจำกัดเฉพาะสมการบางอันเท่านั้น

หัวข้อนี้จะศึกษาการหาผลเฉลยของ ODE ในรูปอนุกรมอนันต์โดยตรง

วิธีนี้มีประโยชน์อย่างมากในการประยุกต์ เนื่องจากมีสมการสัมประสิทธิ์ไม่ใช่ค่าคงตัวเกิดขึ้นจำนวนมาก และไม่สามารถใช้วิธีอื่นแก้สมการได้

ผลเฉลยในรูปอนุกรมที่จะศึกษามักจะไม่อาจลดทอนให้อยู่ในรูปฟังก์ชันพื้นฐาน (Elementary functions) ได้ ดังนั้นฟังก์ชันที่เป็นผลเฉลยในรูปอนุกรมดังกล่าวมักจะเรียกว่า**ฟังก์ชันพิเศษ** (Special functions)

การหาผลเฉลยของ ODE ในรูปอนุกรมกำลังจะเรียกว่า**วิธีกระจายอนุกรมกำลัง**

ในหัวข้อต่อไปจะได้ศึกษาอีกกรณีหนึ่งซึ่งผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังไม่เพียงพอ แต่จะต้องพิจารณาอีกรูปแบบที่เรียกว่าอนุกรมโฟรเบนิอุส วิธีหาผลเฉลยดังกล่าวเรียกว่า**วิธีของโฟรเบนิอุส**

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมอนันต์

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

ของสมการ $y' - xy = 0$

<u>วิธีทำ</u> หาอนุพันธ์ y' โดยกระจายในอนุกรมได้

$$y' = b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \cdots$$

แทนอนุกรมของ y, y' ใน ODE ได้

$$\begin{aligned}(b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \cdots)& \\ - x(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots) &= 0\end{aligned}$$

จัดรูปสมการ

$$\begin{aligned}b_1 + (2b_2 - b_0)x + (3b_3 - b_1)x^2& \\ +(4b_4 - b_2)x^3 + \cdots &= 0\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$b_1 = 0,\ \ 2b_2 - b_0 = 0,\ \ 3b_3 - b_1 = 0,$$

$$4b_4 - b_2 = 0,\ \ \ldots,\ \ kb_k - b_{k-2} = 0, \ldots$$

แก้สมการได้

$$b_1 = b_3 = b_5 = \cdots = 0$$

$$b_2 = \frac{b_0}{2}, \quad b_4 = \frac{b_0}{2\cdot 4}, \quad b_6 = \frac{b_0}{2\cdot 4\cdot 6}, \quad \ldots$$

นั่นคือ

$$b_{2n} = \frac{b_0}{2^n n!}$$

แทนใน y ได้

$$\begin{aligned} y &= b_0 + \frac{b_0}{2}x^2 + \frac{b_0}{2^2 2!}x^4 + \frac{b_0}{2^3 3!}x^6 + \cdots \\ &= b_0\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^3 + \cdots\right) \\ &= b_0 e^{x^2/2} \end{aligned}$$

โดย b_0 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

Power Series

อนุกรมกำลังคืออนุกรมอนันต์ที่อยู่ในรูป

$$b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots$$

หรือเขียนโดยใช้สัญลักษณ์ซิกมาได้

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k$$

โดย $b_0, b_1, b_2, \ldots$ เป็นค่าคงตัวเรียกว่า**สัมประสิทธิ์ของอนุกรม** และ $a \in \mathbb{R}$ เรียกว่า**จุดศูนย์กลางของอนุกรม**

ถ้าอนุกรมลู่เข้าที่ x ผลบวกของอนุกรมจะให้ฟังก์ชัน $S(x)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k = S(x)$$

เรียก $S(x)$ ว่า**ฟังก์ชันผลบวก**ของอนุกรมกำลัง

ตัวอย่าง ผลบวกของอนุกรมกำลังสำคัญ ๆ

$$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = e^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots = \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots = \sin x \quad (x \in \mathbb{R})$$

ตัวอย่าง อนุกรมกำลัง

$$1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2^2}(x-1)^2 + \cdots$$

มีสัมประสิทธิ์คือ

$$b_k = \frac{1}{2^k}$$

และมีจุดศูนย์กลางคือ $a = 1$

ผลบวกของอนุกรมคือฟังก์ชัน

$$S(x) = \frac{2}{3-x} \quad (|x-1| < 2)$$

ตัวอย่าง ให้ $D \subset \mathbb{R}$ และ $f: D \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ทุกอันดับ

สำหรับ $a \in D$ อนุกรม

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

หรือในรูปซิกมา

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

เป็นอนุกรมกำลังที่เรียกว่า**อนุกรมเทย์เลอร์ของ** f รอบจุด a

ความรู้เกี่ยวกับอนุกรมกำลัง

สำหรับแต่ละอนุกรมกำลัง

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k$$

ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงเพียงข้อเดียว

- มีจำนวนจริง $R > 0$ ซึ่ง

  อนุกรมกำลังลู่เข้าเมื่อ $|x-a| < R$ และ

  อนุกรมลู่ออกเมื่อ $|x-a| > R$

- อนุกรมลู่เข้าที่ $x = a$ เพียงจุดเดียว $(R = 0)$
- อนุกรมลู่เข้าทุก $x \in \mathbb{R}$ $(R = \infty)$

บทนิยาม Rเรียกว่า**รัศมีการลู่เข้า** ช่วงเปิด

$$\{x \in \mathbb{R}: |x-a| < R\}$$

เรียกว่า**ช่วงของการลู่เข้า**ของอนุกรมกำลัง

ในช่วงของการลู่เข้าจะได้ฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม

$$S(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k$$

S เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ทุกอันดับและหาอนุพันธ์ได้โดยการสลับที่กับซิกมา เช่น

$$S'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k k(x-a)^{k-1}$$

$$S''(x)=\sum_{k=2}^{\infty} b_k k(k-1)(x-a)^{k-2}$$

$$\vdots$$

จากสมการทำให้ได้

$$b_0=S(a),\quad b_1=S'(a),\quad b_2=\frac{1}{2!}S''(a),$$

$$b_3=\frac{1}{3!}S'''(a),\quad \ldots,\quad b_k=\frac{1}{k!}S^{(k)}(a),\quad \ldots$$

บทตั้ง ถ้า $S(x)$ เป็นฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลังจะได้ว่าอนุกรมกำลังเท่ากับอนุกรมเทย์เลอร์ของ S บนช่วงของการลู่เข้า

ต่อไปเป็นบทนิยามของฟังก์ชันวิเคราะห์

บทนิยาม ให้ $D \subset \mathbb{R}$ และ $f: D \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ทุกอันดับ

f จะเรียกว่า**ฟังก์ชันวิเคราะห์** (Analytic function) ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $a \in D$ อนุกรมเทยเลอร์

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

มีรัศมีการลู่เข้า $R_a > 0$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ เป็นพหุนาม

จงแสดงว่า P เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

วิธีทำ

ตัวอย่าง ให้ $f(x) = \frac{1}{x-r}$

จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนเซต $\mathbb{R} - \{r\}$

วิธีทำ

Note สามารถแสดงได้ว่าถ้า $P(x), Q(x)$ เป็นพหุนามที่ไม่มีพจน์ร่วมกัน ฟังก์ชันเศษส่วนพหุนาม

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนเซต $\mathbb{R} - \{r_1, \dots, r_m\}$ เมื่อ r_i เป็นรากที่เป็นจำนวนจริงของ $Q(x)$

สมบัติของฟังก์ชันวิเคราะห์

ให้ f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ จะได้ว่า

1. f', f'', ... เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์
2. ถ้ากระจายอนุกรมกำลัง(= อนุกรมเทย์เลอร์)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$$

จะได้หาอนุพันธ์ได้โดยการสลับที่กับซิกมา

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k k (x - x_0)^{k-1}$$

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} b_k k(k-1)(x - x_0)^{k-2}$$

$$\vdots$$

3. ถ้า $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k = 0$ ก็ต่อเมื่อ

$$b_k = 0 \quad \forall\, k \geq 0$$

จุดสามัญและจุดเอกฐาน

พิจารณา ODE อันดับสอง

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = f(x) \qquad (1)$$

โดย P, Q, R และ f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ a

บทนิยาม ถ้า $P(a) \neq 0$ จะเรียก a ว่า**จุดสามัญ** (Ordinary point) ของสมการ (1)

ถ้า $P(a) = 0$ จะเรียก a ว่า**จุดเอกฐาน** (Singular point) ของสมการ (1)

Note ผลลัพธ์ที่ได้ในบทนี้สามารถขยายไปสมการอันดับ n ได้ แต่เพื่อความสะดวกจึงพิจารณาสมการอันดับสอง

ตัวอย่าง จงหาจุดสามัญและจุดเอกฐานทั้งหมดของแต่ละสมการต่อไปนี้

(1) $x^2(x+2)y'' + xy' - (2x-1)y = 0$

(2) $(x-1)^2(x+3)y'' + (2x+1)y' - y = 0$

(3) $(1-x^2)^2y'' + x(1-x)y' + (1+x)y = 0$

(4) $(x^2-x-2)y'' + (x-2)y' + xy = 0$

<u>วิธีทำ</u>

ต่อไปสมการ (1) เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น

$$y(a) = \alpha, \; y'(a) = \beta \qquad (2)$$

โดย a เป็นจุดสามัญของสมการ

ทฤษฎีบท ให้ a เป็นจุดสามัญของ ODE (1)

จะได้ว่าผลเฉลยเฉพาะของ IVP (1), (2) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์รอบ a กล่าวคือสามารถกระจายอนุกรมกำลัง

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k$$

โดยมีรัศมีการลู่เข้า $R_a > 0$

Note ในการหาผลเฉลยจะสมมติ y ในรูปอนุกรมตามทฤษฎีบทโดย b_k เป็นค่าคงตัวไม่ทราบค่า

หาอนุพันธ์ y', y'' ในรูปอนุกรมกำลังแล้วนำอนุกรมของ y, y', y'' แทนใน ODE

จัดรูปรวมอนุกรมทั้งหมดใน ODE ให้เหลืออนุกรมเดียวและขวามือเท่ากับศูนย์

เนื่องจากอนุกรมกำลังเท่ากับ 0 ก็ต่อเมื่อสัมประสิทธิ์ทั้งหมดเท่ากับศูนย์ เราจะได้สมการของ b_k

แก้สมการทั้งหมดโดยลดทอน b_k เขียนในรูป b_0, b_1 และเมื่อแทน b_k ทั้งหมดกลับเข้าไปจะได้ผลเฉลย y จะได้ผลเฉลยทั่วไป

คำนวณ b_0, b_1 ได้จากเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรม $y = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ $(a = 0)$ ของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

<u>วิธีทำ 1</u> ให้ $y = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$ จะได้

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} b_k k x^{k-1} = b_1 + b_2 2x + b_3 3x^2 + \cdots$$

$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} b_k k(k-1) x^{k-2}$$

$$= b_2 2 + b_3 3 \cdot 2x + b_4 4 \cdot 3x^2 + \cdots$$

แทนใน ODE ได้

$$\sum_{k=2}^{\infty} b_k k(k-1) x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = 0$$

สัมประสิทธิ์พจน์ x^n คือ

$$b_{n+2}(n+2)(n+1) - b_n = 0$$

$$b_{n+2} = \frac{b_n}{(n+2)(n+1)} \quad (n \geq 0)$$

สมการแบบนี้เรียกว่า**สมการเวียนเกิด** (Recurrence equations)

แก้สมการเวียนเกิด

$$b_2 = \frac{b_0}{2}, \quad b_3 = \frac{b_1}{3!}, \quad b_4 = \frac{b_2}{4\cdot 3} = \frac{b_0}{4!}, \quad b_5 = \frac{b_1}{5!}, \ldots$$

โดยทั่วไปได้ว่า

$$b_{2n} = \frac{b_0}{(2n)!}, \quad b_{2n+1} = \frac{b_1}{(2n+1)!}$$

เพราะฉะนั้น

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \cdots$$

$$= b_0 + b_1 x + \frac{b_0}{2!} x^2 + \frac{b_1}{3!} x^3 + \frac{b_0}{4!} x^4 + \cdots$$

$$= b_0 \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \right)$$

$$+b_1\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)$$

สูตรที่ได้นี้เป็นผลเฉลยทั่วไป b_0, b_1 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ใช้เงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y(0)=0$ และ $y'(0)=3$ ได้

$$b_0+b_1 0+b_2 0^2+\cdots=0 \;\;\Rightarrow\;\; b_0=0$$

$$b_1+2b_2 0+3b_3 0^2+\cdots=c \;\;\Rightarrow\;\; b_1=3$$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นคือ

$$y=3\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)$$

หรือ

$$y=\frac{3}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)$$

<u>วิธีทำ 2</u> (Taylor series method). จาก ODE

$$y''(x)-y(x)=0$$

หาอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ได้ว่า

$$y'''(x)-y'(x)=0$$

$$y^{(4)}(x) - y''(x) = 0$$

$$y^{(5)}(x) - y^{(3)}(x) = 0$$

แทนค่าเริ่มต้น $y(0) = 0, y'(0) = 3$ ในสมการได้

$$y''(0) = 0, \;\; y'''(0) = 3, \;\; y^{(4)}(0) = 0$$

ดังนั้นโดยอุปนัยคณิตศาสตร์ได้

$$y^{(2l)}(0) = 0, \;\; y^{(2l+1)}(0) = 3 \quad (l \geq 0)$$

เนื่องจากผลเฉลยเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ดังนั้นกระจายอนุกรมกำลังได้เท่ากับอนุกรมเทย์เลอร์ ดังนั้น

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{3}{(2l+1)!} x^{2l+1}$$

$$= 3\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)$$

$$= \frac{3}{2}(e^{x} - e^{-x})$$

ตัวอย่าง สมการ Airy

$$y'' - xy = 0$$

เป็นสมการที่ช่วยในการศึกษาปรากฏการณ์ Diffraction

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการนี้โดยกระจายอนุกรมกำลัง $y = \sum_k b_k x^k$ $(a = 0)$

วิธีทำ แทน

$$y = \sum_{k\geq 0} b_k x^k$$

$$y'' = \sum_{k\geq 2} b_k k(k-1)x^{k-2}$$

ในสมการ Airy ได้

$$\sum_{k\geq 2} b_k k(k-1)x^{k-2} - \sum_{k\geq 0} b_k x^{k+1} = 0$$

สัมประสิทธิ์พจน์ x^0 คือ

$$b_2 2 \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_2 = 0$$

สัมประสิทธิ์พจน์ x^n $(n \geq 1)$ คือ

$$b_{n+2}(n+2)(n+1) - b_{n-1} = 0$$

ได้

$$b_{n+2} = \frac{b_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$$

แก้สมการเวียนเกิด

$$n = 1: \;\; b_3 = \frac{b_0}{3 \cdot 2} = \frac{b_0}{3!}$$

$$n = 2: \;\; b_4 = \frac{b_1}{4 \cdot 3} = \frac{2b_1}{4!}$$

$$n = 3: \;\; b_5 = \frac{b_2}{5 \cdot 4} = 0$$

$$n = 4: \;\; b_6 = \frac{b_3}{6 \cdot 5} = \frac{1 \cdot 4b_0}{6!}$$

$$n = 5: \;\; b_7 = \frac{b_4}{7 \cdot 6} = \frac{2 \cdot 5b_1}{7!}$$

โดยทั่วไปได้

$$b_{3n+2} = 0$$

$$b_{3n+1} = \frac{2\cdot 5\cdots(3n-1)}{(3n+1)!}b_1$$
$$b_{3n} = \frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{(3n)!}b_0$$

ดังนั้นผลเฉลยของ Airy’s equation คือ

$$y = b_0\left[1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{(3n)!}x^{3n}\right]$$
$$+b_1\left[x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdots(3n-1)}{(3n+1)!}x^{3n+1}\right]$$
$$= b_0y_1(x)+b_1y_2(x)$$

โดย b_0, b_1 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ตัวอย่าง สำหรับปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'' + e^x y' + (1 + x^2)y = 0$$

$$y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$$

พิจารณาผลเฉลยในรูปอนุกรม $y = \sum_k b_k x^k$

จงหา b_0, b_1, b_2, b_3

<u>วิธีทำ</u> จาก ODE

$$y'' + e^x y' + (1 + x^2)y = 0$$

หาอนุพันธ์เทียบ x ได้

$$y''' + e^x y'' + e^x y' + (1 + x^2)y' + 2xy = 0$$

แทนค่า $x = 0$ ได้

$$y''(0) + y'(0) + y(0) = 0$$

$$\therefore y''(0) = -1$$

$$y'''(0) + y''(0) + 2y'(0) + 0y(0) = 0$$

$$\therefore y'''(0) = 1$$

โดย Taylor series method ได้ว่า

$$y = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

เพราะฉะนั้น

$$b_0 = 1, \;\; b_1 = 0, \;\;\; b_2 = -\frac{1}{2}, \;\; b_3 = \frac{1}{6}$$