Legendre Equations

กำหนดให้ $k \in \mathbb{R}$ เป็นค่าคงตัว **สมการเลอจองด์** (Legendre equation) **อันดับ $\boldsymbol{n}$** คือสมการ ODE

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

สมการเลอจองด์ปรากฏในการศึกษาปัญหามากมาย

สังเกตว่าเนื่องจาก $a = 0$ เป็นจุดสามัญของสมการเลอจองด์ ดังนั้นจากการศึกษาในหัวข้อที่แล้ว สมการจะมีผลเฉลยหลักมูลเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

สมการเลอจองด์ที่พบบ่อยคือกรณีที่ n เป็น**จำนวนเต็มที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์** ในกรณีนี้จะแสดงได้ด้วยวิธีกระจายอนุกรมกำลัง ว่าสมการมีผลเฉลยหนึ่งเป็นพหุนามระดับขั้น n ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงแสดงว่าสมการเลอจองด์

$$(1-x^2)y''-2xy'+6y=0$$

มีผลเฉลยหนึ่งเป็นพหุนามระดับขั้น 2

<u>วิธีทำ</u>

ทฤษฎีบท ให้ $n \in \{0,1,2,\ldots\}$ จะได้ว่าสมการเลอจองด์

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

มีผลเฉลยหนึ่งเป็นพหุนามระดับขั้น n คือ

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

<u>บทพิสูจน์</u> กรณี $n = 0$ สมการคือ

$$(1-x^2)y'' - 2xy' = 0$$

และ $P_0(x) = 1$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่า P_0 สอดคล้องสมการ

กรณี $n = 1$ สมการคือ

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

และ $P_1(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^2-1) = x$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่า P_1 เป็นผลเฉลยของสมการในกรณีนี้

กรณี n ใด ๆ สามารถพิสูจน์โดยอุปนัยคณิศาสตร์

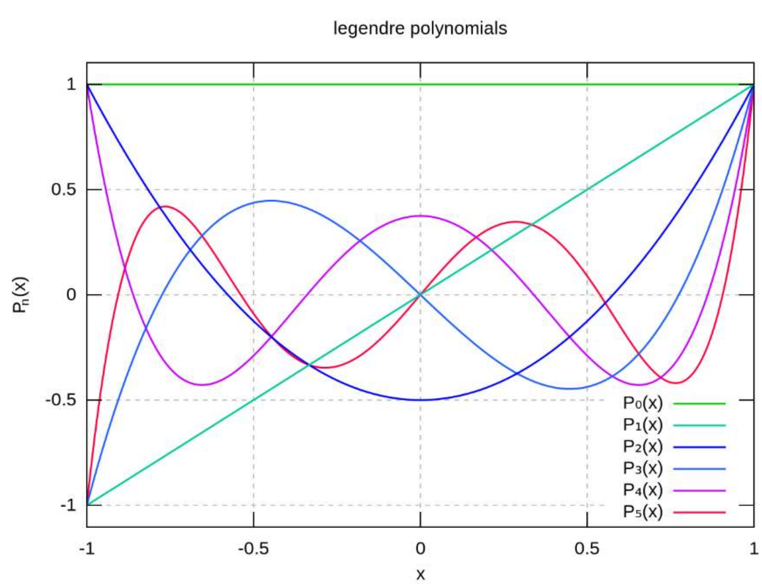
หมายเหตุ

- $P_n(x)$ เรียกว่า**พหุนามเลอจองด์ระดับขั้น $\boldsymbol{n}$**
- สูตรคำนวณ P_n เรียกว่า Rodrigue's formula
- สมการเลอจองด์อันดับ n มีผลเฉลยอีกอันเขียนแทนด้วย $Q_n(x)$ โดยหาได้สูตรลดทอนอันดับ

$$Q_n(x) = \frac{1}{P_n(x)} \int \frac{1}{(1-x^2)P_n(x)^2}\,dx$$

- ผลเฉลยทั่วไปของสมการเลอจองด์อันดับ n คือ

$$y = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x)$$



ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

โดยใช้สูตรของโรดิกซ์และสูตรลดทอน

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง ให้ $k \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม

จงหาผลเฉลยบริบูรณ์ของสมการ

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{dy}{d\theta}\right) + n(n+1)\sin\theta\; y = 0$$

โดยการเปลี่ยนตัวแปร $x = \cos\theta$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ว่า

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)P_l(x)\,dx = 0 \quad \forall\, k \neq l$$

วิธีทำ จาก P_k สอดคล้องสมการเลอจองด์อันดับ k จะได้

$$\left((1-x^2)P_k'\right)' = -k(k+1)P_k$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\left((1-x^2)P_l'\right)' = -l(l+1)P_l$$

คูณสมการแรกด้วย P_l แล้วอินทิเกรตบนช่วง $(-1,1)$ ได้

$$\int_{-1}^{1} \left((1-x^2)P_k'\right)' \cdot P_l\,dx = -k(k+1)\int_{-1}^{1} P_k P_l\,dx$$

อินทิเกรตทีละส่วนพจน์ซ้ายมือได้เท่ากับ

$$\int_{-1}^{1} P_k \cdot \left((1-x^2)P_l'\right)'\,dx$$

จากสมการสองข้างบนดังนั้นได้ว่า

$$-l(l+1)\int_{-1}^{1} P_k P_l\,dx = -k(k+1)\int_{-1}^{1} P_k P_l\,dx$$

เนื่องจาก $k \neq l$ เพราะฉะนั้น

$$\int_{-1}^{1} P_k P_l\,dx = 0$$

ตามต้องการ

ตัวอย่าง สมการ Chebyshev คือสมการ

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$$

ในกรณีที่ $n \in \{0,1,2,\dots\}$ สามารถแสดงได้โดย Power series method ว่า สมการมีผลเฉลยหนึ่งเป็นพหุนามระดับขั้น n

จงหาผลเฉลยในรูปพหุนามในกรณี $n=2$

วิธีทำ สมมติ $y=ax^2+bx+c$ เป็นผลเฉลยจะได้

$$(1-x^2)(2a)-x(2ax+b)$$
$$+4(ax^2+bx+c)=0$$
$$3bx+(2a+4c)=0$$

นั่นคือ $b=0$ และ $a=-2c$

กำหนดให้ $y(1)=1$ จะได้

$$y=2x^2-1$$

Note กำหนดให้ $x = \cos\theta$ สมการ Chebyshev จะเขียนได้เป็น

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + n^2 y = 0$$

ซึ่งมีผลเฉลยหลักมูล (โดยวิธีสมการช่วย) คือ

$$\sin n\theta, \quad \cos n\theta$$

ดังนั้นสำหรับสมการ Chebyshev จะได้ผลเฉลยทั่วไป

$$y = C_1 \sin(n \arccos x) + C_2 \cos(n \arccos x)$$

กรณี $n = 2$ ผลเฉลย

$$\begin{aligned}\cos(2\arccos x) &= 2\cos(\arccos x)^2 - 1 \\ &= 2x^2 - 1\end{aligned}$$

สำหรับกรณี n ใด ๆ ผลเฉลย $\cos(n \arccos x)$ สามารถแสดงได้ว่าเป็นพหุนามระดับขั้น n เรียกว่า Chebyshev polynomial อันดับ n