วิธีกระจายอนุกรมแบบโฟรบินิอุส

หัวข้อนี้จะศึกษาวิธีหาผลเฉลยของสมการ

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

ในกรณีที่เลือกจุด a เป็นจุดเอกฐาน

กำหนดให้ P, Q, R เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ a

การศึกษาสมการโดยเลือกจุดเอกฐานเช่นนี้ต้องการหาพฤติกรรมของผลเฉลยรอบ ๆ จุดเอกฐาน โดยทั่วไปไม่สามารถวิเคราะห์ด้วยวิธีกระจายอนุกรมกำลังปรกติ ดังแสดงในตัวอย่างต่อไป ซึ่งได้ผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลัง(หรือผลเฉลยที่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $a = 0$) คือฟังก์ชันศูนย์เท่านั้น

ตัวอย่าง พิจารณาสมการ

$$xy' + (3+4x)y = 0$$

1. จงหาผลเฉลยเฉพาะในรูปอนุกรมกำลังรอบ $a = 0$ ของสมการ
2. จงใช้วิธีแยกตัวแปรหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

วิธีทำ 1. $y = 0$

2. $y = x^{-3}e^{-4x}$ หรือ

$$y = x^{-3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-4)^k}{k!}x^k$$

นั่นคือสมการมีผลเฉลยในรูป

$$y = (x-a)^r\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k$$

โดย $r = -3, b_k = (-4)^k/k!$

แนวคิด ในกรณีที่สมการมี a เป็นจุดเอกฐานของสมการ

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

จากตัวอย่างจะเห็นได้ว่าสมการอาจมีผลเฉลยในรูป

$$y = (x-a)^r \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k$$

โดย r เป็นค่าคงที่   การกระจายผลเฉลยแบบนี้เรียกว่า

วิธีแบบโฟรเบนิอุส

วิธีกระจายอนุกรมกำลังเป็นกรณีพิเศษเมื่อ $r = 0$

บทนิยาม ให้ a เป็นจุดเอกฐานสำหรับ ODE

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

ถ้า $(x-a)\frac{Q(x)}{P(x)}, (x-a)^2\frac{R(x)}{P(x)}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ a จะเรียก a ว่า**จุดเอกฐานปรกติ** (Regular singular point) ของสมการเชิงอนุพันธ์

Note เนื่องจาก P, Q, R เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ a ดังนั้น เงื่อนไขการที่ฟังก์ชันเศษส่วนพหุนาม

$$(x-a)\frac{Q(x)}{P(x)}, \quad (x-a)^2\frac{R(x)}{P(x)}$$

เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์สมมูลกับลิมิตสองอันต่อไปนี้ลู่เข้า

$$p_0 = \lim_{x\to a}(x-a)\frac{Q(x)}{P(x)}$$

$$q_0 = \lim_{x\to a}(x-a)^2\frac{R(x)}{P(x)}$$

นั่นคือ $p_0, q_0 \in \mathbb{R}$

จุด a ที่ไม่ใช่จุดเอกฐานปรกติจะเรียกว่า**จุดเอกฐานไม่ปรกติ**(Irregular singular point)ของสมการ

ตัวอย่าง จงหาจุดเอกฐานทั้งหมดของสมการต่อไปนี้ และตรวจสอบว่าเป็นจุดเอกฐานปรกติหรือไม่ ถ้าเป็นจุดเอกฐานปรกติให้หาค่า p_0, q_0

1. Riccati-Bessel equation

$$x^2y'' - (x^2 - m)y = 0 \quad (m \in \mathbb{R})$$

2. Bessel equation

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (\nu \geq 0)$$

3. $2x(x-2)^2y'' + 3xy' + (x-2)y = 0$
4. $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 y'' + (\cos x)y' + (\sin x)y = 0$

<u>วิธีทำ</u>

ทฤษฎีบท ให้ P, Q, R เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด a และ a เป็นจุดเอกฐานปรกติของสมการ

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

ให้

$$p_0 = \lim_{x \to a} (x-a)\frac{Q(x)}{P(x)}$$

$$q_0 = \lim_{x \to a} (x-a)^2 \frac{R(x)}{P(x)}$$

และสมมติว่า**สมการดัชนี**(Indicial equation)

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

มีผลเฉลยเป็นจำนวนจริง ถ้าให้ r_1 เป็นผลเฉลยค่ามากสุดจะได้ว่า ODE มีผลเฉลยในรูป

$$y = (x-a)^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k$$

<u>บทพิสูจน์</u> ในที่นี้จะพิจารณากรณี $a = 0$ และแสดงที่มาของสมการดัชนีเท่านั้น

ให้ $p(x) = \frac{xQ(x)}{P(x)}, q(x) = \frac{x^2R(x)}{P(x)}$ จากสมมติฐานได้ว่าสามารถกระจายอนุกรมกำลัง

$$p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots$$
$$q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots$$

จัดรูปสมการได้

$$y'' + \frac{Q(x)}{P(x)}y' + \frac{R(x)}{P(x)}y = 0$$
$$y'' + \left[\frac{p(x)}{x}\right]y' + \left[\frac{q(x)}{x^2}\right]y = 0$$
$$x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$$

นั่นคือ

$$x^2y'' + x(p_0 + p_1x + \cdots)y$$
$$+(q_0 + q_1x + \cdots)y = 0$$

แทน

$$y = x^r \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+r}$$

ใน ODE ได้

$$\begin{aligned} & x^2(b_0 r(r-1)x^{r-2} + \cdots) \\ & \quad + x(p_0 + \cdots)(b_0 r x^{r-1} + \cdots) \\ & \quad\quad (q_0 + \cdots)(b_0 x^r + \cdots) = 0 \end{aligned}$$

พจน์ยกกำลังของ x น้อยที่สุดคือ x^r โดยมีสัมประสิทธิ์

$$b_0[r(r-1) + p_0 r + q_0]$$

เช่นเดียวกับวิธีกระจายอนุกรมกำลังจากสัมประสิทธิ์ที่ได้ซึ่งเป็นเอกลักษณ์อนุกรมเท่ากับฟังก์ชันศูนย์เราได้ว่า

$$b_0[r(r-1) + p_0 r + q_0] = 0$$

เนื่องจากต้องการ $y \neq 0$ ดังนั้นจะให้ $b_0 \neq 0$ ทำให้ได้

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

ในการศึกษาต่อไปจะพิจารณากรณีสำคัญคือ $a = 0$ เป็นจุดเอกฐานปรกติและจัดรูปสมการได้

$$x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$$

โดย $p(x), q(x)$ เป็นพหุนามและ

$$p(x) = p_0, \;\; q(x) = q_0 + q_1 x$$

บทตั้ง ให้ r_1 เป็นรากจำนวนจริงค่ามากของสมการดัชนี นิยามฟังก์ชัน

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0$$

จะได้สมการเวียนเกิดสำหรับหาผลเฉลยในรูป

$$y = x^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

คือ $F(r_1 + k)b_k + q_1 b_{k-1} = 0 \ (k \geq 1)$ แก้สมการได้

$$b_k = (-1)^k \frac{q_1^k}{F(r_1+1) \cdots F(r_1+k)} b_0$$

Note สำหรับ r_2 ที่เป็นรากค่าน้อยหากหาผลเฉลยในรูป

$$y = x^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

จะได้สมการเวียนเกิดคือ

$$F(r_2 + k) b_k + q_1 b_{k-1} = 0 \quad (k \geq 1)$$

ดังนั้นถ้า $r_1 - r_2$ ไม่ใช่จำนวนนับจะได้ $F(r_2 + k) \neq 0$

ทุก $k \geq 1$ ทำให้แก้สมการเวียนเกิดได้

$$b_k = (-1)^k \frac{q_1^k}{F(r_2 + 1) \cdots F(r_2 + k)} b_0$$

บทพิสูจน์ ให้

$$y = x^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+r_1}$$

หาอนุพันธ์

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(k + r_1)x^{k+r_1-1}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(k + r_1)(k + r_1 - 1)x^{k+r_1-2}$$

แทนอนุกรมทั้งหมดใน ODE และจัดรูปได้

$$\sum_{k=0}^{\infty} [F(r_1 + k)b_k + q_1 b_{k-1}]x^{k+r_1} = 0$$

ดังนั้นได้เวียนเกิดตามต้องการ

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยของสมการ

$$x^2y'' + xy' + (x-1)y = 0$$

โดยวิธีของโฟรเบนิอุส

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยทั่วไปผของสมการ

$$2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$xy'' + y' - y = 0$$

วิธีทำ

Gamma function

ก่อนจะศึกษาสมการเบสเซลจะมาทำความรู้จักฟังก์ชันแกมมา

บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง $x > 0$ นิยาม

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

Note อินทิกรัลลู่เข้าเนื่องจาก

$$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\, dt \leq \int_0^1 t^{x-1}\, dt = \frac{t^x}{x}$$

และจาก $e^{-t/2} t^N \leq N!\, 2^N$ ได้ว่า

$$\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \leq N!\, 2^N \int_1^\infty e^{-\frac{t}{2}}\, dt = N!\, 2^{N+1}$$

เมื่อ N เป็นจำนวนนับที่ $\geq x - 1$

บทตั้ง $\Gamma(1) = 1$ และสำหรับจำนวนจริง $x > 0$ ใด ๆ จะได้ว่า

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

โดยทั่วไป

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)\cdots(x+1)x\Gamma(x)$$

ดังนั้นสำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 0$ จะได้ว่า

$$\Gamma(n+1) = n!$$

<u>บทพิสูจน์</u> จากนิยามได้

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot 1\, dt = \left.\frac{e^{-t}}{-1}\right|_0^\infty = 1$$

สำหรับจำนวนจริง $x > 0$ ใด ๆ ได้

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x\, dt$$

โดยการอินทิเกรตทีละส่วนจะได้

$$\int e^{-t} t^{x}\, dt = -e^{-t} t^{x} + x \int e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

ดังนั้นได้

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

ตามต้องการ

สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 0$ ถ้า $n = 0$ จะได้จากการ

คำนวณข้างบนว่า

$$\Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1 = 0!$$

และถ้า $n > 0$ จะได้

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\
&= n(n-1)\Gamma(n-1) \\
&\vdots \\
&= n(n-1)\cdots 1 \cdot \Gamma(1) \\
&= n!
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ว่า

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาค่าของ

$$\Gamma(3)+\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

วิธีทำ

บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง $x < 0$ และ

$$x \notin \{0, -1, -2, \ldots\}$$

นิยาม

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$$

เมื่อ $-n < x < -n+1$ และ $n \in \mathbb{N}$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ

$$\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right)$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาค่า

$$\frac{\Gamma(2.6)}{\Gamma(-1.4)}$$

วิธีทำ