สมการเบสเซล

หัวข้อนี้จะศึกษาสมการ

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

โดย ν เป็นค่าคงตัวและ $\nu \geq 0$ สมการนี้เรียกว่า**สมการเบสเซลอันดับ** ν (Bessel equation of order ν) เช่น

$$xy'' + y' + xy = 0$$

หรือ

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0$$

เป็นสมการเบสเซลอันดับ 0

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 2)y = 0$$

เป็นสมการเบสเซลอันดับ $\sqrt{2}$

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 9)y = 0$$

เป็นสมการเบสเซลอันดับ 3

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 12)y = 0$$

เป็นสมการเบสเซลอันดับ $\sqrt{12}$

สมการเบสเซลอันดับ ν ประกอบด้วยสัมประสิทธิ์

$$P(x) = x^2, \quad Q(x) = x, \quad R(x) = x^2 - \nu^2$$

ให้ $a = 0$ จะได้ว่า 0 เป็นจุดเอกฐาน และจาก

$$p_0 = \lim_{x \to 0} x \cdot \frac{x}{x^2} = 1,$$

$$q_0 = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \frac{x^2 - \nu^2}{x^2} = -\nu^2$$

ดังนั้น 0 เป็นจุดเอกฐานปรกติ

ให้

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = r^2 - \nu^2$$

ดังนั้นสมการดัชนีคือ

$$r^2 - \nu^2 = 0$$

แก้สมการดัชนีได้รากค่ามากและรากค่าน้อยคือ

$$r_1 = \nu, \quad r_2 = -\nu$$

ตามลำดับ

สมการเบสเซลอันดับศูนย์ ($\boldsymbol{\nu = 0}$)

สมการเบสเซลอันดับ 0 คือ

$$xy'' + y' + xy = 0$$

ซึ่งมีรากของสมการดัชนีคือ $r_1 = r_2 = 0$

ทฤษฎีบท สมการเบสเซลอันดับ 0 มีหนึ่งคือ

$$y = J_0(x)$$

$$= 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}} x^{2n}$$

ฟังก์ชัน $J_0(x)$ เรียกว่า**ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ 0**

<u>บทพิสูจน์</u> กรณี $\nu = 0$ ได้

$$F(r) = r^2$$

แทน $r = 0$ ในอนุกรมแบบโฟรเบนิอุส

$$y = x^0 \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

$$xy = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+1}$$

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} b_k k x^{k-1}$$

$$xy'' = \sum_{k=2}^{\infty} b_k k(k-1) x^{k-1}$$

แทนอนุกรมในสมการเบสเซลได้

$$\sum_{k=2}^{\infty} b_k k(k-1) x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+1} = 0$$

สปสพจน์ x^0

$$b_1 = 0$$

สปสพจน์ x^1 ได้ $b_2 2 \cdot 1 + b_2 2 + b_0 = 0$

$$b_2 = -\frac{b_0}{4}$$

สปสพจน์ x^2 ได้ $b_2 3 \cdot 2 + b_3 3 + b_1 = 0$

$$b_3 = 0$$

สปสพจน์ x^3 ได้ $b_4 4 \cdot 3 + b_4 4 + b_2 = 0$

$$b_4 = -\frac{b_2}{16} = \frac{b_0}{(2 \cdot 4)^2} = \frac{b_0}{(2!\,2^2)^2}$$

สปสพจน์ x^4 ได้ $b_5 5 \cdot 4 + b_5 5 + b_3 = 0$

$$b_5 = 0$$

สปสพจน์ x^5 ได้ $b_6 6 \cdot 5 + b_6 6 + b_4 = 0$

$$b_6 = -\frac{b_4}{6^2} = -\frac{b_0}{(3!\,2^3)^2}$$

สปสพจน์ x^k ($k \geq 1$ ใด ๆ)

$$b_{k+1}(k+1)k + b_{k+1}(k+1) + b_{k-1} = 0$$

กรณี $k = 2n$ เลขคู่ได้

$$b_{2n+1} = 0$$

กรณี $k = 2n - 1$ เลขคี่ได้

$$b_{2n} = -\frac{b_{2n-2}}{(2n)^2}$$
$$= (-1)^n \frac{b_0}{(n!\, 2^n)^2}$$

เพราะฉะนั้น

$$b_1 = b_3 = b_5 = \cdots = 0$$
$$b_{2n} = (-1)^n \frac{b_0}{(n!)^2 2^{2n}}, \quad n = 1,2,\ldots$$

เพราะฉะนั้นจะได้จากผลการแก้สมการเวียนเกิด

$$y = b_0\left(1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \cdots\right)$$

$$= b_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = b_0 J_0(x)$$

บทตั้ง สมการเบสเซลอันดับศูนย์มีผลเฉลยในรูป

$$Y_0(x) = (\ln x)J_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

โดย J_0, Y_0 อิสระเชิงเส้น Y_0 เรียกว่า**ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สองอันดับ** 0

<u>บทพิสูจน์</u> ให้ r เป็นตัวแปรอิสระ กำหนดให้

$$Z(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+r}$$

คำนวณ

$$xZ'' = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (k+r)(k+r-1)x^{k+r-1}$$

$$Z' = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (k+r)x^{k+r-1}$$

$$xZ = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+r+1}$$

แทน Z ใน $xZ'' + Z' + xZ$ และคำนวณสปสของพจน์ต่าง ๆ ได้

สปสพจน์ x^{r-1} คือ $b_0 r^2$

สปสพจน์ x^r คือ $b_1(r+1)^2$

สปสพจน์ x^{r+1} คือ $b_2(r+2)^2 + b_0$

สปสพจน์ x^{r+n} คือ $b_{n+1}(r+n+1)^2 + b_{n-1}$

เมื่อ $n = 1,2,\ldots$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} &xZ'' + Z' + xZ \\ &\quad = b_0 r^2 x^{r-1} + b_1(r+1)^2 x^r \\ &\qquad + \sum_{n=1}^{\infty} [b_{n+1}(r+n+1)^2 + b_{n-1}] x^{r+n} \end{aligned}$$

กำหนดให้ $b_0 = 1, b_1 = 0$ และ

$$b_{n+1}(r+n+1)^2 + b_{n-1} = 0, \quad n = 1,2,\ldots$$

แก้สมการได้

$$b_1 = b_3 = b_5 = \cdots = 0$$

$$b_{2n} = \frac{(-1)^n}{[(r+2n)(r+2n-2)\cdots(r+2)]^2}$$

สังเกตว่า b_{2n} เป็นฟังก์ชันของตัวแปร r โดย

$$b_{2n}(0) = \frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}}$$

ซึ่งเท่ากับสปสของ $J_0(x)$ ฟังก์ชัน Z มีค่าเท่ากับ

$$Z(x;r) = x^r(1 + b_2(r)x^2 + b_4(r)x^4 + \cdots)$$

และสอดคล้องสมการ

$$xZ'' + Z' + xZ = r^2 x^{r-1} \tag{1}$$

ถ้าแทน $r = 0$ ได้

$$Z(x;0) = J_0(x)$$

นิยาม

$$Y_0(x) = \left.\frac{\partial Z}{\partial r}\right|_{r=0}$$

หาอนุพันธ์สมการ (1) เทียบ r ได้

$$x\left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right)'' + \left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right)' + x\frac{\partial Z}{\partial r} = 2rx^{r-1} + r^2x^{r-1}\ln x$$

แทน $r = 0$ ได้

$$xY_0'' + Y_0' + xY_0 = 0$$

นั่นคือ Y_0 เป็นผลเฉลยของสมการเบสเซลอันดับ 0

จากสูตร

$$Z(x;r) = x^r(1 + b_2(r)x^2 + b_4(r)x^4 + \cdots)$$

$$Y_0(x) = \left.\frac{\partial Z}{\partial r}\right|_{r=0}$$

$$= (\ln x)J_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n}'(0)x^{2n}$$

ทฤษฎีบท สมการเบสเซลอันดับ 0 มีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = C_1J_0(x) + C_2Y_0(x)$$

โดย $\lim_{x\to 0^+} J_0(x) = 1$ และ $\lim_{x\to 0^+} Y_0(x) = -\infty$

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0, \quad y(0) = 2$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงแสดงว่า

$$b'_{2n}(0) = -b_{2n}(0)\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

ดังนั้น

$$Y_0(x) = (\ln x)J_0(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

<u>วิธีทำ</u>

สมการเบสเซลอันดับหนึ่ง

ทฤษฎีบท สมการเบสเซลอันดับ 1 มีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = C_1 J_1(x) + C_2 Y_1(x)$$

โดย

$$J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}$$

$$Y_1(x) = J_1(x) \int \frac{1}{x^2 J_1(x)}\,dx$$

$J_1(x)$ เรียกว่า**ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ 1**

$Y_1(x)$ เรียกว่า**ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สองอันดับ 1**

<u>บทพิสูจน์</u> สมการดัชนีมีรากค่ามาก คือ

$$r_1 = 1$$

แทนในวิธี Frobenius

$$y = x^1 \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+1}$$

$$(x^2-1)y = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+3} + \sum_{k=0}^{\infty} -b_k x^{k+1}$$

$$xy' = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (k+1) x^{k+1}$$

$$x^2 y'' = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (k+1) k x^{k+1}$$

แทนในสมการเบสเซลได้

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k (k+1) k x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (k+1) x^{k+1}$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+3} + \sum_{k=0}^{\infty} -b_k x^{k+1} = 0$$

$$3b_1 x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} [(n^2+2n)b_n + b_{n-2}] x^{n+1} = 0$$

ดังนั้นแก้สมการเวียนเกิดได้

$$b_1 = b_3 = b_5 = \cdots = 0$$

$$b_2 = \frac{-1}{2^3} b_0$$

$$b_4 = \frac{1}{3 \cdot 2^5} b_0$$

$$\vdots$$

$$b_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!\,2^{2n+1}} b_0$$

แก้สมการจะได้ตามต้องการ

สำหรับ Y_1 ได้จากสูตรลดทอนอันดับ

ทฤษฎีบท สมการเบสเซลอันดับ $l \in \mathbb{N}$ มีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = C_1 J_l(x) + C_2 Y_l(x)$$

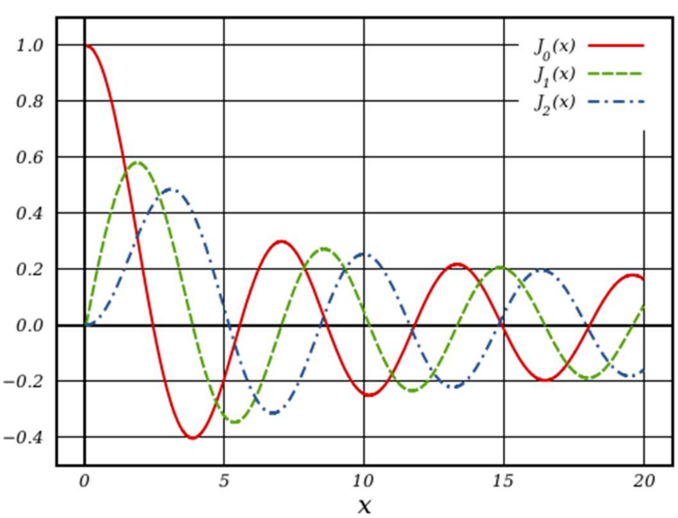
โดย

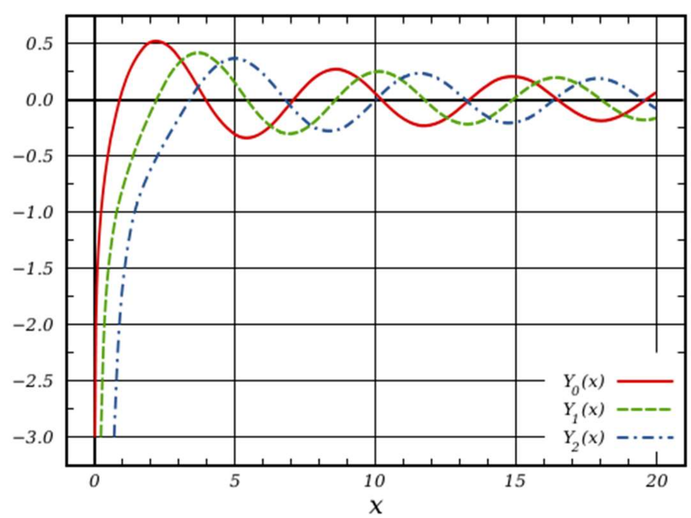
$$J_l(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+l)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+l}$$

$$Y_l(x) = J_l(x) \int \frac{1}{x J_l(x)^2}\, dx$$

$J_l(x)$ เรียกว่า**ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ $\boldsymbol{l}$**

$Y_l(x)$ เรียกว่า**ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สองอันดับ $\boldsymbol{l}$**





ตัวอย่าง สำหรับจำนวนเต็ม $l \geq 0$ จงแสดงว่า

$$J_{l+1}(x) = \frac{l}{x} J_l(x) - J_l'(x)$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$$

<u>วิธีทำ</u>

ทฤษฎีบท ผลเฉลยทั่วไปของสมการเบสเซลอันดับ ν เมื่อ $\nu \geq 0$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ คือ

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$$

เมื่อ

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$$

$$Y_\nu(x) = J_\nu(x) \int \frac{1}{x J_\nu(x)^2}\, dx$$

$J_\nu(x)$ เรียกว่า**ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ $\boldsymbol{\nu}$**

$Y_\nu(x)$ เรียกว่า**ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สองอันดับ $\boldsymbol{\nu}$**

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 5)y = 0$$

วิธีทำ