การกระจายอนุกรมฟูเรียร์ที่สำคัญ

ให้ $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นฐานหลักจากปัญหาสตูม-ลูวิลล์บนช่วง $[a,b]$ สำหรับ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ซึ่งต่อเนื่องเป็นช่วงจะมีอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\phi_n(x)$$

โดย

$$c_n=\frac{1}{\int_a^b \phi_n(x)^2\,dx}\int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx$$

การกระจายนี้เรียกว่า**อนุกรมฟูเรียร์ทั่วไป**หรือ**การกระจายฟังก์ชันเจาะจง**

โดยการเลือกฐานหลัก $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ แบบต่าง ๆ จะได้การกระจายฟังก์ชันเจาะจงหลาย ๆ แบบซึ่งเป็นที่รู้จักโดยทั่วไปดังนี้

1. **อนุกรมฟูเรียร์(ตรีโกณมิติ)** ช่วง $[-L, L]$

$$\left\{\frac{1}{2}, \sin\frac{\pi x}{L}, \cos\frac{\pi x}{L}, \sin\frac{2\pi x}{L}, \cos\frac{2\pi x}{L}, \ldots\right\}$$

จะได้อนุกรม

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

โดย

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

2. **อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์** ช่วง $[0, L]$

$$\left\{\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{L}, \cos\frac{2\pi x}{L}, \cos\frac{3\pi x}{L}, \ldots\right\}$$

จะได้อนุกรม

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

โดย

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

3. **อนุกรมฟูเรียร์ไซน์** ช่วง $[0, L]$

$$\left\{\sin\frac{\pi x}{L}, \sin\frac{2\pi x}{L}, \sin\frac{3\pi x}{L}, \ldots\right\}$$

จะได้อนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

โดย

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

ตัวอย่าง ปัญหาสตูม-ลูวิลล์

$$(1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=0,\quad x\in(-1,1)$$

ซึ่งกำหนดค่าขอบ

$$\lim_{x\to 1^-} y(x)<\infty,\qquad \lim_{x\to(-1)^+} y(x)<\infty$$

มีค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงคือ

$$\lambda_n=n(n+1),\quad P_n(x)$$

เมื่อ P_n คือพหุนามเลอจองด์และ $n=0,1,2,\ldots$

การกระจายฟังก์ชันเจาะจงที่ได้คือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$$

โดย $c_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx$

เรียกอนุกรมนี้ว่า**อนุกรมฟูเรียร์-เลอจองด์**

การลู่เข้าของอนุกรมฟูเรียร์ทั่วไป

พิจารณาปัญหาสตูม-ลูวิลล์

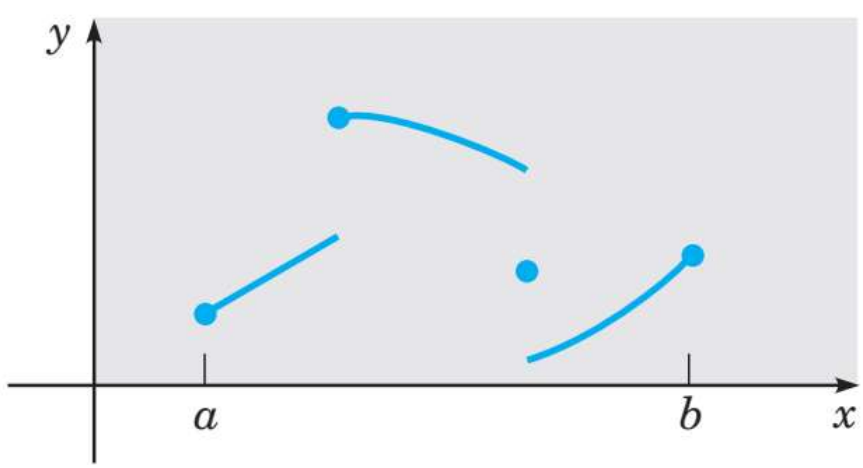
$$(p(x)y')' + q(x)y + \lambda y = 0, \quad x \in [a, b]$$

กำหนดให้เซตของค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงคือ

$$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$$

สัญลักษณ์

$C_p[a,b]$ คือเซตของ $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ซึ่ง f, f' เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วง



การกระจายอนุกรมฟูเรียร์ทั่วไปของ $f \in C_p[a,b]$ เทียบกับ $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ จะได้ฟังก์ชันผลบวกอนุกรมคือ

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

โดย

$$c_n = \frac{1}{\int_a^b \phi_n(x)^2\,dx} \int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx$$

ทฤษฎีบท ให้ $f \in C_p[a,b]$ และ $x_0 \in (a,b)$

1. ถ้า f ต่อเนื่องที่จุด x_0 จะได้

$$f(x_0) = \hat{f}(x_0)$$

2. ถ้า f ไม่ต่อเนื่องที่จุด x_0 จะได้

$$\frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2} = \hat{f}(x_0)$$

ในหัวข้อตั้งแต่นี้ไปจะพิจารณาเฉพาะอนุกรมฟูเรียร์ (ตรีโกณมิติ) อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ และอนุกรมฟูเรียร์ไซน์เท่านั้น

เราจะศึกษาการลู่เข้าที่ขอบของช่วง $[a, b]$

ทฤษฎีบท

1. อนุกรมฟูเรียร์บนช่วง $[-L, L]$ จะได้ว่า

$$\hat{f}(-L) = \hat{f}(L) = \frac{f((-L)^+) + f(L^-)}{2}$$

2. อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์บนช่วง $[0, L]$ จะได้ว่า

$$\hat{f}(0) = f(0^+), \quad \hat{f}(L) = f(L^-)$$

3. อนุกรมฟูเรียร์ไซน์บนช่วง $[0, L]$ จะได้ว่า

$$\hat{f}(0) = \hat{f}(\pi) = 0$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x) = x + \frac{x^2}{4}$ บนช่วง $[-\pi, \pi]$ กระจายอนุกรมฟูเรียร์ได้

$$\hat{f}(x) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}[\cos nx - 2n \sin nx]$$

จงใช้การลู่เข้าของผลบวกอนุกรมฟูเรียร์พิสูจน์ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง กำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x) = |\sin x|$ บนช่วง $[-\pi, \pi]$ กระจายอนุกรมฟูเรียร์ได้

$$\hat{f}(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx$$

จงใช้การลู่เข้าของผลบวกอนุกรมฟูเรียร์พิสูจน์ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{16n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง กำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x) = \pi - x$ บนช่วง $[0, \pi]$ กระจายอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ได้

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin nx$$

จงใช้การลู่เข้าของผลบวกอนุกรมฟูเรียร์ไซน์พิสูจน์ว่า

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

<u>วิธีทำ</u>

บทตั้ง ให้ $f \in C_p[-L, L]$ กระจายอนุกรมฟูเรียร์ได้

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

1. ถ้า f เป็นฟังก์ชันคู่จะได้ว่า

$$b_n = 0 \quad n = 1,2,3, \dots$$

กล่าวคืออนุกรมฟูเรียร์เท่ากับอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์

2. ถ้า f เป็นฟังก์ชันคี่จะได้ว่า

$$a_n = 0, \quad n = 0,1,2, \dots$$

กล่าวคืออนุกรมฟูเรียร์เท่ากับอนุกรมฟูเรียร์ไซน์

<u>บทพิสูจน์</u> ใช้สมบัติว่า

$$\int_{-L}^{L} g(x)\, dx = 0$$

ถ้า g เป็นฟังก์ชันคี่ และ

$$\int_{-L}^{L} g(x)\, dx = 2\int_{0}^{L} g(x)\, dx$$

ถ้า g เป็นฟังก์ชันคู่

ตัวอย่าง จงกระจายอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน

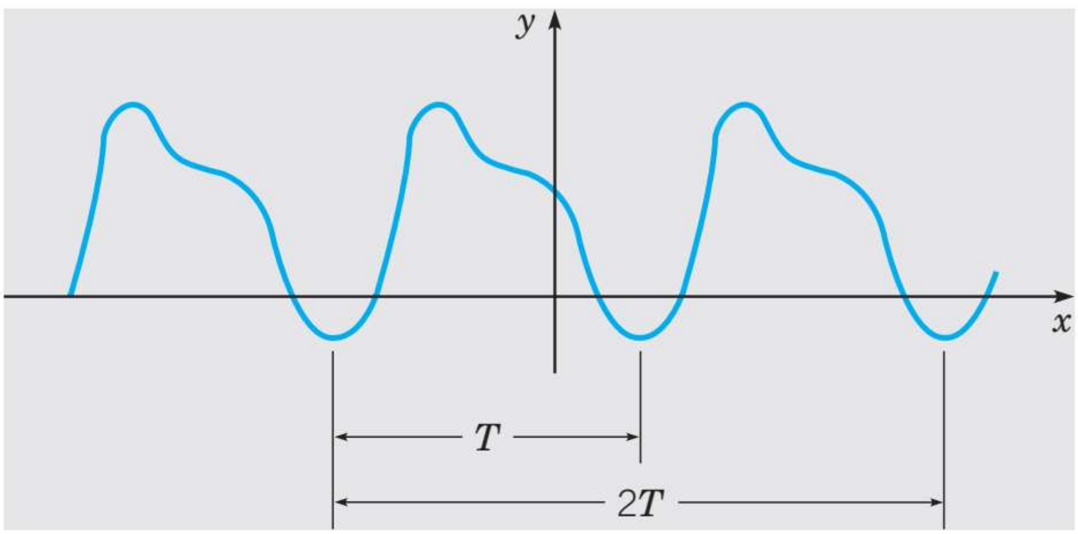
$$f(x) = x^2, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

วิธีทำ

ประยุกต์ของอนุกรมฟูเรียร์

ให้ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันคาบที่มีคาบยาว $2L$ นั่นคือ f สอดคล้องเอกลักษณ์

$$f(x + 2L) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$



ดังนั้นค่าของฟังก์ชันจะถูกกำหนดโดยค่า $f(x)$ ในช่วง

$$[-L, L]$$

และสามารถกระจายอนุกรมฟูเรียร์ได้

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

พิจารณา ODE

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

ในปรากฏการณ์ธรรมชาติมักจะสนใจผลเฉลย y ที่เป็นฟังก์ชันคาบ $2L$ ด้วย ดังนั้นในที่นี้จะหาผลเฉลยเฉพาะที่เป็นฟังก์ชันคาบและในหนึ่งคาบกระจายอนุกรมฟูเรียร์ได้

$$y(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi x}{L} + B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

หาอนุพันธ์ได้

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}\left(-A_n \sin\frac{n\pi x}{L} + B_n \cos\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\left(A_n \cos\frac{n\pi x}{L} + B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

แทนใน ODE จะได้สมการเพื่อหา A_n, B_n ได้

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยของ ODE

$$y'' + 3y = f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi < x < 0 \\ 2 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

กำหนดให้ $f(x)$ กระจายอนุกรมฟูเรียร์ได้

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยของ ODE

$$y'' + 5y = f(x) = x, \quad x \in (-2,2)$$

กำหนดให้ $f(x)$ กระจายอนุกรมฟูเรียร์ได้

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$$

<u>วิธีทำ</u>