Fourier Integrals and Fourier Transform

ต่อไปจะกล่าวถึง**ฟูเรียร์อินทิกรัล**ซึ่งเป็นการแปลงฟังก์ชัน $f: (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ ในรูปอินทิกรัลเทียบกับตัวแปรใหม่ $\omega \in (0, \infty)$

ในเชิงคณิตศาสตร์ประยุกต์ผลลัพธ์ดังกล่าวจะมองเป็นการกระจายสเปกตรัมของฟังก์ชันออกเป็นความถี่ ω ต่าง ๆ

ด้วยเทคนิกขยายเป็นฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่จะได้ว่าฟังก์ชัน $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ สามารถแปลงเป็นการอินทิกรัลเทียบกับความถี่ ω ได้ในทำนองเดียวกัน อินทิกรัลที่ได้จากเรียกว่า**ฟูเรียร์โคไซน์อินทิกรัล**และ**ฟูเรียร์ไซน์อินทิกรัล**ตามลำดับ

ให้ $f: (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ มี f, f' ต่อเนื่องเป็นช่วง ให้ $L > 0$

ฟังก์ชัน f บนช่วง $[-L, L]$ กระจายอนุกรมฟูเรียร์ตรีโกณมิติได้เป็น

$$\widetilde{f_L}(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty}(a(\omega_n)\cos\omega_n x + b(\omega_n)\sin\omega_n x)$$

โดย

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx, \quad \omega_n = \frac{n\pi}{L}$$

และ

$$a(\omega_n) = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(y)\cos\omega_n y\,dy$$
$$b(\omega_n) = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(y)\sin\omega_n y\,dy$$

ให้

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{L}$$

ได้

$$\widetilde{f_L}(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(y)\,dy + \sum_{n=1}^{\infty}[a(\omega_n)(\cos\omega_n x) + (\sin\omega_n x)b(\omega_n)]\Delta\omega$$

โดยอนุกรมลู่เข้าสำหรับ $x \in [-L, L]$

กำหนดให้ f สอดคล้องเงื่อนไข

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|\,dy < \infty$$

พิจารณาลิมิต $L \to \infty$ จะได้

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(y)\,dy = 0$$

$$\omega_n \to \omega$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\cdots]\,\Delta\omega \to \int_0^{\infty}[\cdots]\,d\omega$$

โดยผลบวกรีมันน์

สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ ใด ๆ จะได้อินทิกรัล

$$\widetilde{f_L}(x) = \int_0^\infty [a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x]\,d\omega$$

โดย

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos\omega y\,dy$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\sin\omega y\,dy$$

สูตรนี้เรียกว่า**ฟูเรียร์อินทิกรัล**ของ f

จากผลลัพธ์การลู่เข้าของอนุกรมฟูเรียร์ได้ว่า

ทฤษฎีบท ให้ $f: (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ มี f, f' ต่อเนื่องเป็นช่วงและ $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$ จะได้ว่า

$$\widetilde{f_L}(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

ตัวอย่าง ให้

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

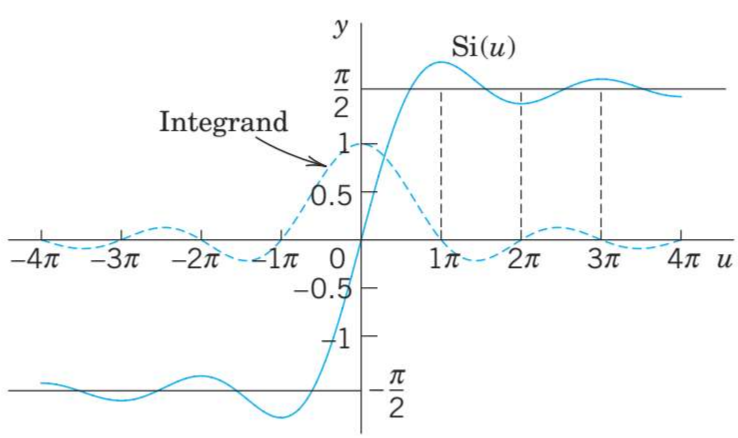
1. จงแสดงว่าฟูเรียร์อินทิกรัลของ f คือ

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos \omega x \sin \omega}{\omega} d\omega$$

2. จงพิสูจน์ค่าอินทิกรัล

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}$$

<u>วิธีทำ</u>



$Si(u) = \int_0^u \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega$ เรียกว่า**ไซน์อินทิกรัล**

ในกรณีที่ $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ จะมีฟูเรียร์อินทิกรัลโดยวิธีขยายฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่

กำหนดให้ $f_e, f_o:(-\infty,\infty)\to\mathbb{R}$ นิยามโดย

$$f_e(x)=\begin{cases} f(x), & x\ge 0\\ f(-x), & x<0\end{cases}$$

$$f_o(x)=\begin{cases} f(x), & x> 0\\ 0, & x=0\\ -f(-x), & x<0\end{cases}$$

จะได้ว่า f_e เป็นฟังก์ชันคู่ f_o เป็นฟังก์ชันคี่

ฟูเรียร์อินทิกรัลของ f_e เท่ากับ

$$\tilde{f}_e(x)=\int_0^\infty a(\omega)\cos\omega x\,d\omega$$

$$a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx$$

เรียกว่า**ฟูเรียร์โคไซน์อินทิกรัล** ของ f

ฟูเรียร์อินทิกรัลของ f_o เท่ากับ

$$\widetilde{f_o}(x) = \int_0^\infty b(\omega) \sin \omega x \, d\omega$$

$$b(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \sin \omega x \, dx$$

เรียกว่า**ฟูเรียร์ไซน์อินทิกรัล** ของ f

จากผลลัพธ์การลู่เข้าได้ว่า

$$\widetilde{f_e}(x) = \widetilde{f_o}(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

ตัวอย่าง ให้ $f(x) = e^{-ax}$ บนช่วง $x > 0$ โดย a เป็นจำนวนจริงบวกค่าคงที่

จงหาฟูเรียร์โคไซน์อินทิกรัลและฟูเรียร์ไซน์อินทิกรัลของ f คือ

<u>วิธีทำ</u>

$$e^{-ax} = \frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{a^2+\omega^2}\,d\omega$$

$$e^{-ax} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega\sin\omega x}{a^2+\omega^2}\,d\omega$$

ดังนั้น

$$\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{a^2+\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi}{2a}e^{-ax}$$

$$\int_0^\infty \frac{\omega\sin\omega x}{a^2+\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi}{2}e^{-ax}$$

สูตรที่ได้นี้เรียกว่า**ลาปลาซอินทิกรัล**

สำหรับหัวข้อสุดท้ายจะกล่าวถึง**การแปลงฟูเรียร์** ที่จะมีประโยชน์ต่อไปในการแก้ ODE และ PDE

การแปลงฟูเรียร์เป็นการเขียนฟูเรียร์อินทิกรัล โดยใช้จำนวนเชิงซ้อนและฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน

ทฤษฎีบท ให้ $f: (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ มี f, f' ต่อเนื่องเป็นช่วง และ $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$ จะได้ว่าฟูเรียร์อินทิกรัลของ f เขียนได้เป็น

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\omega(x-y)}\, dy\, d\omega$$

เรียกว่า**ฟูเรียร์อินทิกรัลรูปเชิงซ้อน**

<u>บทพิสูจน์</u> จากฟูเรียร์อินทิกรัลได้ว่า

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos(\omega x - \omega y)\, dy\, d\omega$$

จาก $f(y)\sin(\omega x - \omega y)$ เป็นฟังก์ชันคี่ใน ω ได้

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\sin(\omega x - \omega y)\,dy\,d\omega = 0$$

สูตรของออยเลอร์

$$e^{iA} = \cos A + i\sin A$$

ดังนั้นฟูเรียร์อินทิกรัลของ f เขียนได้อีกอย่างเป็น

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i\omega(x-y)}\,dy\,d\omega$$

ข้อสังเกตุ สูตรฟูเรียร์อินทิกรัลในรูปเชิงซ้อนจัดรูปได้เป็น

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega y}\,dy\right]e^{i\omega x}\,d\omega$$

ซึ่งนำไปสู่บทนิยามของ**การแปลงฟูเรียร์**ต่อไปนี้

บทนิยาม ให้ $f:(-\infty,\infty)\to\mathbb{R}$ มี f,f' ต่อเนื่องเป็นช่วง และ $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx<\infty$

- **การแปลงฟูเรียร์**ของ f คือฟังก์ชัน $\mathcal{F}[f]$ นิยามโดย

$$\mathcal{F}[f](\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,dx$$

- **การแปลงฟูเรียร์ผกผัน**ของฟังก์ชัน $g(\omega)$ คือฟังก์ชัน $\mathcal{F}^{-1}[g]$ นิยามโดย

$$\mathcal{F}^{-1}[g](x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$$

สัญลักษณ์

$$\hat{f}(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]$$
$$\check{g}(x)=\mathcal{F}^{-1}[g(\omega)]$$

ทฤษฎีบท ให้ $f:(-\infty,\infty)\to\mathbb{R}$ มี f,f' ต่อเนื่องเป็นช่วง และ $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx<\infty$

จะได้ฟูเรียร์อินทิกรัลในรูปเชิงซ้อนคือ

$$\tilde{f}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$$

หรือ

$$\tilde{f}(x)=\mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[f]\big](x)$$

โดย

$$\tilde{f}(x)=\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$$

ตัวอย่าง ให้

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของ f

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง ให้

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของ f

<u>วิธีทำ</u>

สมบัติของการแปลงฟูเรียร์

1. สมบัติเชิงเส้น

$$\mathcal{F}[af + bg] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g]$$

2. การแปลงฟูเรียร์ของอนุพันธ์

$$\mathcal{F}[f'] = i\omega\mathcal{F}[f]$$

3. การสังวัตนาการ

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$$

Note ในข้อ 2 ฟังก์ชัน f ต้องมีสมบัติว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง f' ต่อเนื่องเป็นช่วง $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ และ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|\, dx < \infty$$

การสังวัตนาการนิยามโดย

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y)\, dy$$

ตัวอย่าง ให้สูตรการแปลงฟูเรียร์

$$\mathcal{F}\left[e^{-x^2}\right] = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

จงใช้สูตรที่ให้หาการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชัน

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง ให้สูตรการแปลงฟูเรียร์

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+a^2}\right]=\frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}\quad (a>0)$$

จงใช้สูตรที่ให้แสดงว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=\frac{\pi}{ab(a+b)}$$

เมื่อ $a>0, b>0$

<u>วิธีทำ</u>