Solving PDE by Fourier Series Method

หัวข้อที่แล้วเราได้ศึกษาสมการต้นแบบ 3 สมการต่อไปนี้

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{(wave equation)}$$

$$u_t = k u_{xx} \quad \text{(heat equation)}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{(Laplace equation)}$$

และได้ใช้วิธีการแปลงฟูเรียร์แก้ปัญหาค่าเริ่มต้น (IVP) สำหรับสมการความร้อน

ในหัวข้อนี้จะศึกษาการแก้ปัญหาเมื่อสมการมีตัวแปรเชิงพื้นที่อยู่ในช่วงจำกัด

$$0 < x < L$$

$$0 < x < L, \;\; 0 < y < M$$

และใช้อนุกรมฟูเรียร์

ในที่นี้จะศึกษา**เงื่อนไขค่าขอบเอกพันธ์** และจะศึกษาเฉพาะ Dirichlet หรือ Neumann เท่านั้น

1. **อนุกรมฟูเรียร์ไซน์**สอดคล้องค่าขอบเอกพันธ์ Dirichlet นั่นคือ

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin\frac{n\pi x}{L}$$

จะได้ว่า

$$u(0,t) = 0, \;\; u(L,t) = 0 \;\; \forall\, t$$

2. **อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์**สอดคล้องค่าขอบเอกพันธ์ Neumann นั่นคือ

$$u(x,t) = \frac{A_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \cos\frac{n\pi x}{L}$$

จะได้ว่า

$$u_x(0,t) = 0, \;\; u_x(L,t) = 0 \;\; \forall\, t$$

เพราะฉะนั้นโดยการกระจายผลเฉลยของ PDE ในรูปอนุกรมที่เหมาะสมจะได้ว่าเงื่อนไขค่าขอบเป็นจริงโดยอัตโนมัติ

เมื่อแทนอนุกรมของผลเฉลย u ใน PDE จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ของสัมประสิทธิ์ A_n, B_n

เมื่อแทนอนุกรมของผลเฉลย u ในเงื่อนไขอื่น ๆ จะได้ค่าเริ่มต้นหรือค่าขอบของ A_n, B_n ด้วย

ตัวอย่าง ให้ f เป็นฟังก์ชันบนช่วง $[0,\pi]$ ที่กระจายอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ได้

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n \sin nx$$

จงแก้ปัญหาคลื่น

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx} \quad x\in(0,\pi), t>0 \\ u(x,0)=0,\ \ u_t(x,0)=f(x) \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง $[0,\pi]$ โดย กระจายอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ได้

$$f(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos nx$$

จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นค่าขอบ

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} \quad x\in(0,\pi), t>0 \\ u(x,0)=f(x) \\ u_x(0,t)=u_x(L,t)=0 \end{cases}$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง $[0, \pi]$ โดย กระจายอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ได้

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin ny$$

จงแก้ปัญหาค่าขอบของสมการลาปลาซ

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x \in (0,\pi), y \in (0,\pi) \\ \quad u(0,y) = 0, \ \ u(\pi,y) = f(y) \\ \quad u(x,0) = u(x,M) = 0 \end{cases}$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงแก้ IBVP ต่อไปนี้

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad x \in (0,\pi), t > 0 \\ u(x,0) = 1 + \cos x \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

<u>วิธีทำ</u>

$$u(x,t) = 1 + e^{-t}\cos x$$

ตัวอย่าง จงแก้ปัญหาค่าขอบต่อไปนี้

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \sin x\,, \quad x \in (0,\pi), y \in (0,1) \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \\ u_y(x,0) = u(x,1) = 0 \end{cases}$$

<u>วิธีทำ</u>

$$u(x,y) = \left(\frac{e^{-y} + e^{y}}{e^{-1} + e} - 1\right)\sin x$$

Separation of Variables Technique

พิจารณา IBVP ของสมการความร้อน

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_x, \quad x \in (0,\pi), t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

ในสมการนี้มีการพาความร้อน (convection)

ถ้ากระจายอนุกรมฟูเรียร์ไซน์

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)\phi_n, \quad \phi_n = \sin nx$$

เมื่อแทนลงใน PDE จะได้

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n'\phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-n^2 B_n)\phi_n + \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \cos nx$$

ซึ่งไม่สามารถเทียบสัมประสิทธิ์ได้

ปัญหาคืออนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเมื่อกระทำกับ $\phi_n = \sin nx$ จะได้ฟังก์ชัน $\cos nx$:

$$\frac{d}{dx}\phi_n = n\cos nx$$

ไม่ใช่ฟังก์ชันเดิมคือ ϕ_n แตกต่างจากอนุพันธ์อันดับที่สองที่กระทำกับ ϕ_n ได้ฟังก์ชันเดิม:

$$\frac{d^2}{dx^2}\sin nx = -n^2 \sin nx$$

ให้ $\mathcal{L}$ เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์

$$\mathcal{L}\phi(x) = \frac{d^2}{dx^2}\phi + \frac{d}{dx}\phi$$

จะได้ว่าปัญหา PDE ข้างบนเขียนได้เป็น

$$\begin{cases} u_t = \mathcal{L}u, \quad 0 < x < \pi, > 0 \\ \quad u(x,0) = f(x) \\ \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

แนวคิดในการแก้ปัญหาความร้อนดังกล่าวนี้ คือ หาฟังก์ชัน $\phi(x)$ และจำนวนจริง λ ซึ่งสอดคล้อง

$$\begin{cases} \mathcal{L}\phi = -\lambda\phi, \quad 0 < x < \pi \\ \phi(0) = \phi(\pi) = 0 \end{cases}$$

กล่าวคือ

$$\begin{cases} \phi'' + \phi' = -\lambda\phi, \quad 0 < x < \pi \\ \phi(0) = \phi(\pi) = 0 \end{cases}$$

สมการนี้เรียกว่า**ปัญหาค่าเจาะจง**

จากทฤษฎี Sturm-Liouville ได้ว่าจะมี

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$
$$\phi_1, \quad \phi_2, \quad \dots \quad , \quad \phi_n \quad , \quad \dots$$

ที่สมนัยกันซึ่งสอดคล้องกับปัญหาค่าเจาะจง ที่สำคัญคือการกระจายอนุกรมของฟังก์ชัน $f: [0, L] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(x)$$

เพราะฉะนั้นเราจะสามารถแก้ IBVP ของสมการคามร้อน โดยกระจายอนุกรมของผลเฉลย u เทียบ $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(t)\phi_n(x)$$

ปัญหาค่าเจาะจงนี้ได้มาอีกวิธีโดยเทคนิคสำคัญในการแก้ PDE เรียกว่า**เทคนิคแยกตัวแปร** (Separation of variables technique) ซึ่งมีหลักการง่าย ๆ คือ

``PDE มีตัวแปร x,t หา $u(x,t)=\phi(x)T(t)\neq 0$”

``PDE มีตัวแปร x,y หา $u(x,y)=\phi(x)\psi(y)\neq 0$”

เทคนิคแยกตัวแปรสามารถใช้แก้ PDE ได้หลากหลายและเงื่อนไขค่าขอบทั่วไป ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง พิจารณา IBVP

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_x, \ \ x \in (0,\pi), t > 0 \\ \quad u(x,0) = f(x) \\ \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

ถ้าผลเฉลย $u(x,t)$ เขียนได้ในรูป

$$u(x,t) = \phi(x)T(t)$$

โดย $\phi \neq 0$ จงแสดงว่า ϕ สอดคล้องปัญหาค่าเจาะจง

$$\begin{cases} \phi'' + \phi' = -\lambda\phi, \quad 0 < x < \pi \\ \quad \phi(0) = \phi(\pi) = 0 \end{cases}$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง พิจารณาปัญหาค่าขอบ

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < L, 0 < y < M \\ u(0, y) = u(L, y) = 0 \\ u(x, 0) = f(x),\ \ u(x, M) = g(x) \end{cases}$$

ถ้าผลเฉลย u เขียนได้ในรูป

$$u(x, y) = \phi(x)Y(y)$$

โดย $\phi \neq 0$ จงพิสูจน์ว่า ϕ สอดคล้องกับปัญหาค่า

เจาะจง

$$\begin{cases} \phi'' = -\lambda\phi, \quad 0 < x < L \\ \phi(0) = \phi(L) = 0 \end{cases}$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง กำหนดให้ปัญหาค่าเจาะจง

$$\begin{cases} \phi'' + \phi' = -\lambda\phi, & 0 < x < \pi \\ \quad \phi(0) = \phi(\pi) = 0 \end{cases}$$

มีค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงทั้งหมดคือ

$$\lambda_n = \frac{1}{4} + n^2, \quad \phi_n = e^{-\frac{x}{2}} \sin nx$$

โดย $n = 1,2,\ldots$

จงแก้ IBVP

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_x, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ \quad u(x,0) = e^{-x/2} \sin x \\ \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

<u>วิธีทำ</u>

$$u(x,t) = e^{-\left(\frac{5}{4}t + \frac{x}{2}\right)} \sin x$$

ตัวอย่าง จงแก้ BVP

$$\begin{cases} \Delta u + u_x = e^{-x/2}\sin x\,, \quad x \in (0,\pi), y \in (0,1) \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \\ u(x,0) = u_y(x,1) = 0 \end{cases}$$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $\mathcal{L}$ เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์

$$\mathcal{L}\phi = \phi'' + \phi'$$

PDE ในตัวอย่างนี้คือ

$$\mathcal{L}u + u_{yy} = e^{-\frac{x}{2}}\sin x$$

ให้ $\lambda_n = \frac{1}{4} + n^2, \phi_n = e^{-x/2}\sin nx$ กระจายอนุกรมของผลเฉลย $u(x,y)$ ในตัวแปร x เทียบ $\{\phi_n\}$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(y)\phi_n(x)$$

ในรูปอนุกรมนี้จะได้ว่า $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$ เป็นจริง

แทนอนุกรมใน PDE ได้

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-\lambda_n B_n)\phi_n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n''\phi_n = \phi_1$$

เทียบสัมประสิทธิ์ได้

$$B_1'' - \lambda_1 B_1 = 1$$

$$B_n'' - \lambda_n B_n = 0, \quad n = 2,3,\dots$$

แทนอนุกรมในเงื่อนไขค่าขอบที่เหลือ

$$u(x,0) = 0\colon \ \sum_{n=1}^{\infty} B_n(0)\phi_n = 0$$

$$\therefore B_n(0) = 0 \quad n = 1,2,\dots$$

$$u_y(x,1) = 0\colon \ \sum_{n=1}^{\infty} B_n'(1)\phi_n = 0$$

$$\therefore B_n'(1) = 0 \quad n = 1,2,\dots$$

แก้ปัญหา ODE

$$\begin{cases} B_1'' - \frac{5}{4}B_1 = 1, \;\; 0 < y < 1 \\ B_1(0) = B_1'(1) = 0 \end{cases}$$

ได้

$$B_1(y) = C_1 e^{\frac{\sqrt{5}}{2}y} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}y} - \frac{4}{5}$$

$$C_1 = \frac{4}{5\left(1 + e^{\sqrt{5}}\right)}, \quad C_2 = \frac{4e^{\sqrt{5}}}{5\left(1 + e^{\sqrt{5}}\right)}$$

แก้ปัญหา ODE

$$\begin{cases} B_n'' - \lambda_n B_1 = 0, \;\; 0 < y < 1 \\ B_n(0) = B_n'(1) = 0 \end{cases}$$

ได้ $B_n(y) = 0$ สำหรับทุก $n = 2,3, \ldots$ เพราะฉะนั้น

$$u(x,y) = \frac{4}{5}\left[\frac{e^{\frac{\sqrt{5}}{2}y} + e^{\sqrt{5}\left(1 - \frac{y}{2}\right)}}{1 + e^{\sqrt{5}}} - 1\right] e^{-\frac{x}{2}} \sin x$$