บทที่ 1

ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

ได้ว่า $f(x)$ แทนค่า $x = 1$ ไม่ได้นั่นคือ $f(1)$ ไม่มีค่า

x	0.75	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.25
$f(x)$	2.313	2.710	2.970	2.997	?	3.003	3.030	3.310	3.813

จากตารางจะเห็นได้ว่าค่า $f(x)$ มีแนวโน้มเข้าใกล้ 3 เมื่อ x มีค่าใกล้ ๆ 1 ในทางคณิตศาสตร์จะกล่าวว่า

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

อ่านว่า

"ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 เท่ากับ 3"

และเรียก 3 ว่า**ลิมิต**ของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1

บทนิยาม สำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ และจำนวนจริง a ที่กำหนดให้

จะกล่าวว่า "ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a เท่ากับ L" และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

ก็ต่อเมื่อ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a

ตัวอย่าง จงพิจารณาลิมิตของ

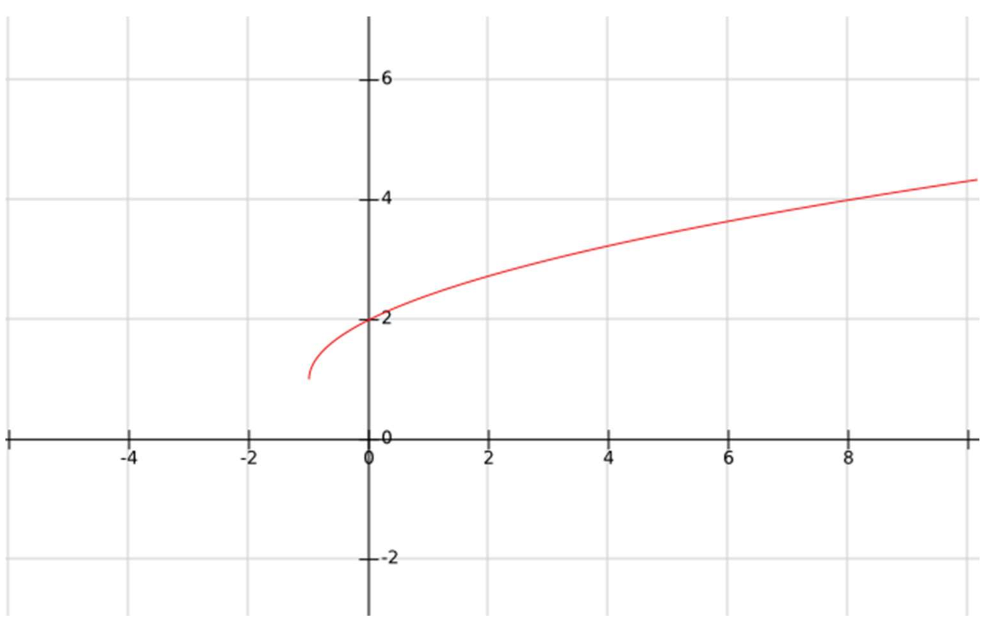
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$$

เมื่อ x เข้าใกล้ 0 โดยใช้ตาราง

x	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01
$f(x)$	1.99499	1.99950	1.99995	?	2.00005	2.00050	2.00499

จากตารางจะเห็นได้ว่า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 2 เมื่อ x เข้าใกล้ 0 เพราะฉะนั้น

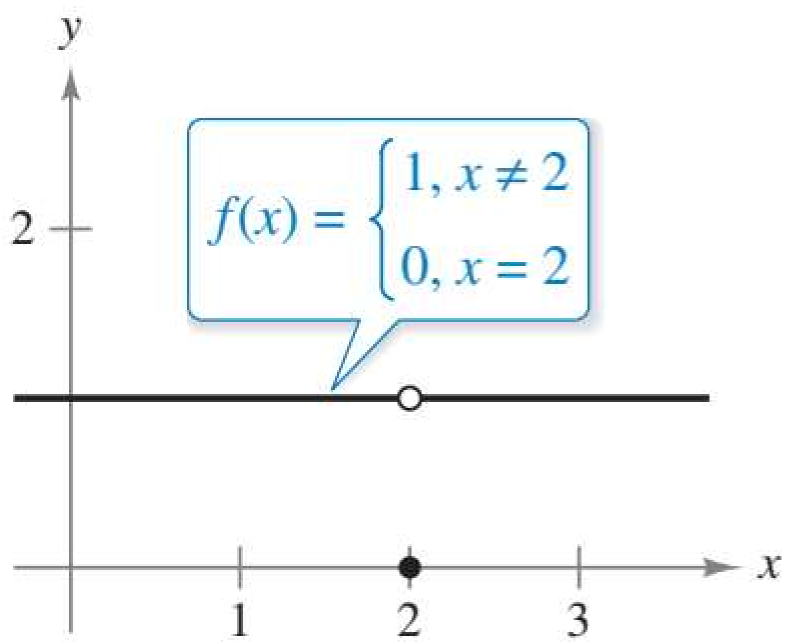
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 2$$



ตัวอย่าง จงพิจารณาลิมิตของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x \neq 2 \\ 0 & \text{ถ้า } x = 2 \end{cases}$$

เมื่อ x เข้าใกล้ 2



จากรูปจะเห็นได้ว่า

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 1$$

ข้อสังเกต ค่า $f(2)$ ไม่มีผลต่อการหาลิมิต

บทนิยาม สำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ และจำนวนจริง a ที่กำหนดให้

จะกล่าวว่า

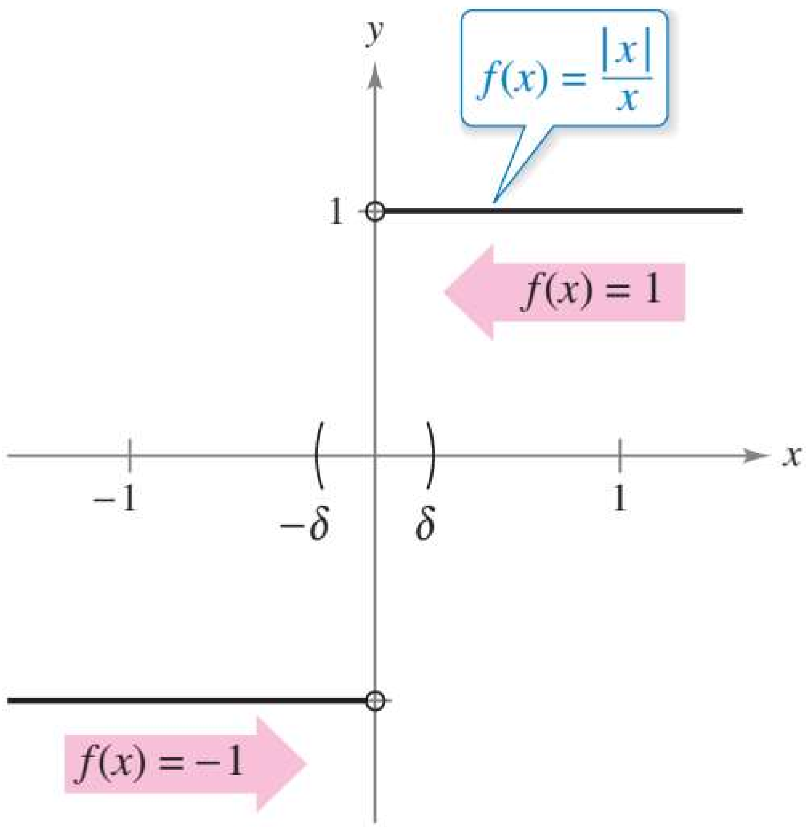
$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ ไม่มีค่า}$$

ก็ต่อเมื่อค่าของ $f(x)$ ไม่เข้าใกล้จำนวนจริงใดเลย หรือไม่เข้าใกล้จำนวนจริงใดจำนวนจริงหนึ่งเพียงจำนวนเดียวเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a

ตัวอย่าง (แนวโน้มซ้ายขวาไม่เท่ากัน) จงพิจารณาลิมิตของฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0



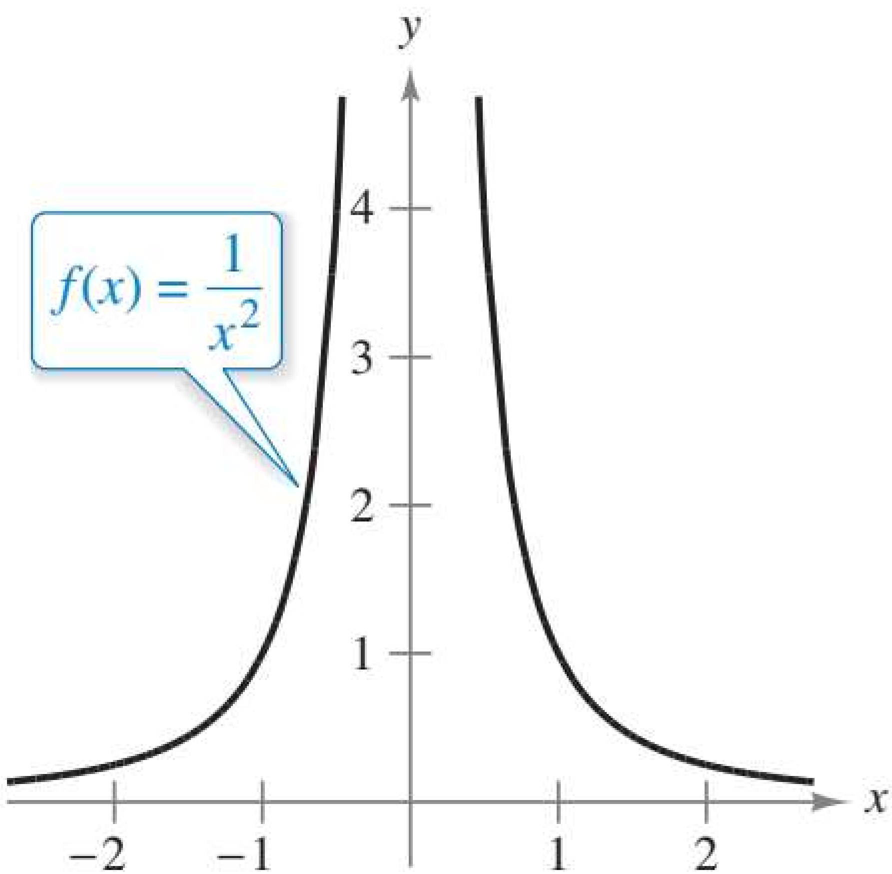
จากกราฟจะได้ว่า

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \quad \text{ไม่มีค่า}$$

ตัวอย่าง (แนวโน้มมีค่ามากไม่มีขอบเขต) จงพิจารณาลิมิตของฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0

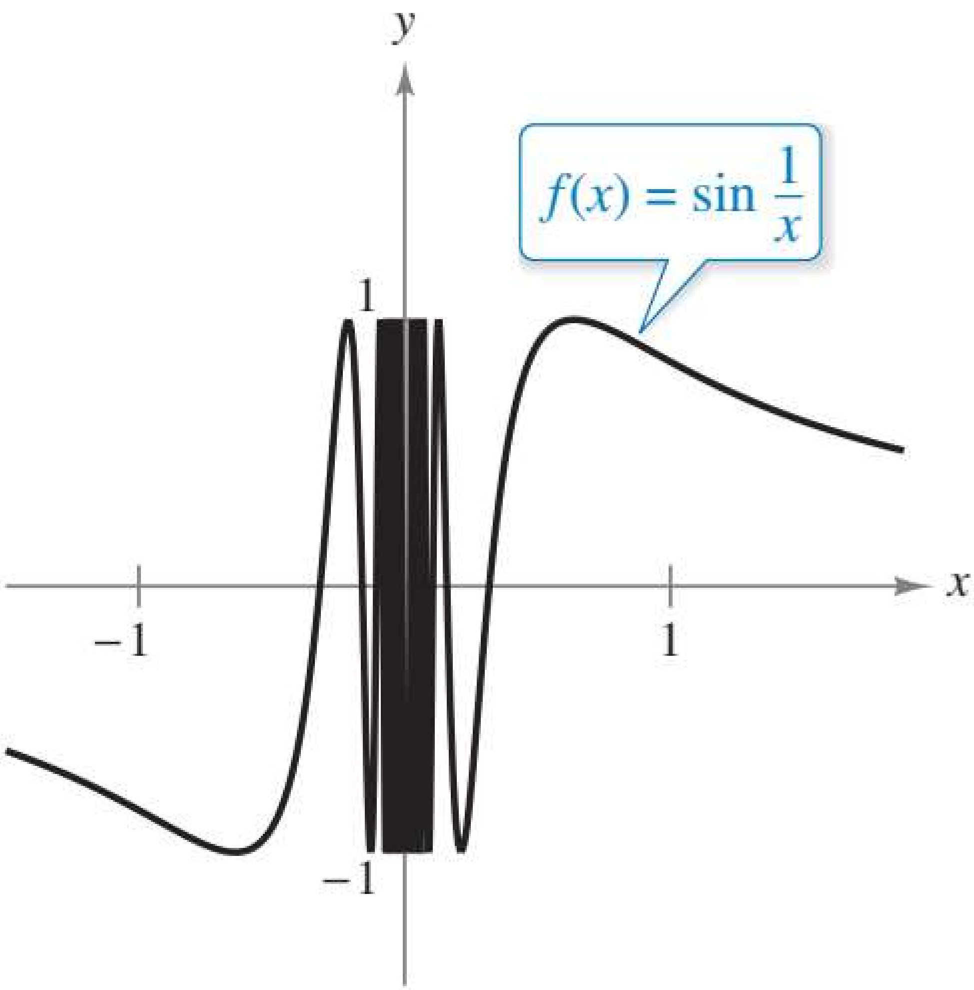


จากกราฟจะเห็นว่า

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \text{ ไม่มีค่า}$$

ตัวอย่าง (สั่น) พิจารณาลิมิต

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$



จากกราฟจะเห็นได้ว่า

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} \quad \text{ไม่มีค่า}$$

บทนิยาม สำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ และจำนวนจริง a ที่กำหนดให้

ถ้า $f(x)$ เข้าใกล้ L_1 เมื่อ x เข้าใกล้ a โดย $x < a$ จะเรียก L_1 ว่า**ลิมิตซ้าย** เขียนแทนด้วย

$$L_1 = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

ถ้า $f(x)$ เข้าใกล้ L_2 เมื่อ x เข้าใกล้ a โดย $x > a$ จะเรียก L_2 ว่า**ลิมิตขวา** เขียนแทนด้วย

$$L_2 = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

ทฤษฎีบท $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ

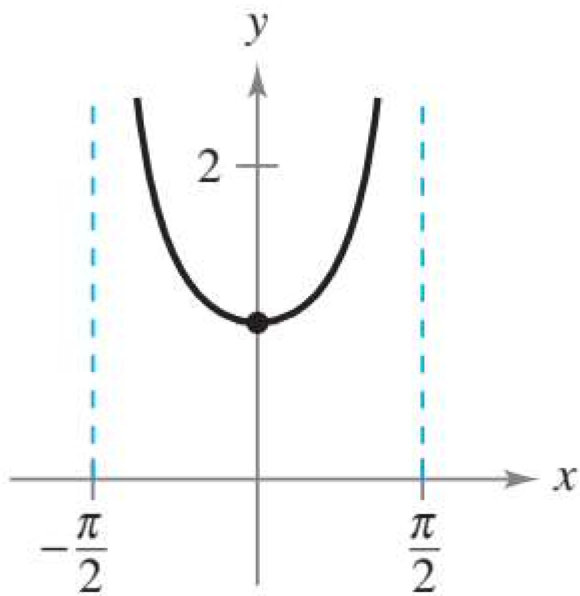
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

และ

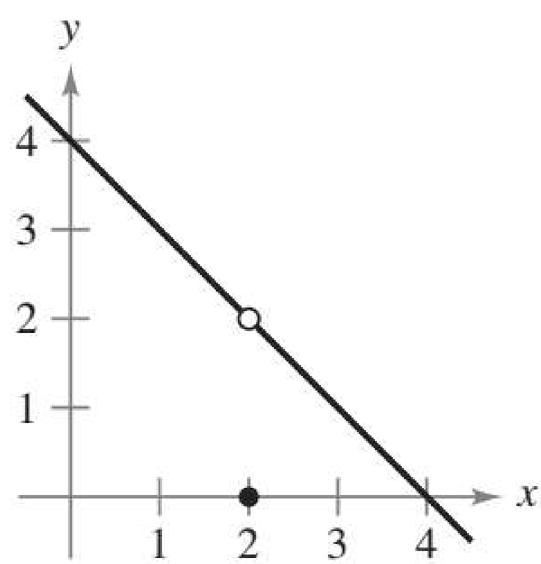
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

ตัวอย่าง จากกราฟที่กำหนดให้ของแต่ละฟังก์ชัน จงหาลิมิตซ้าย ลิมิตขวา และลิมิต ที่จุดที่กำหนดให้

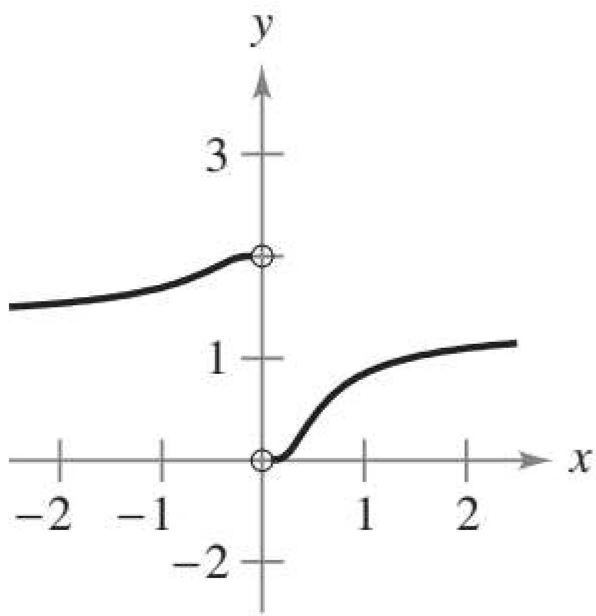
1. $\lim\limits_{x\to 0} \sec x$



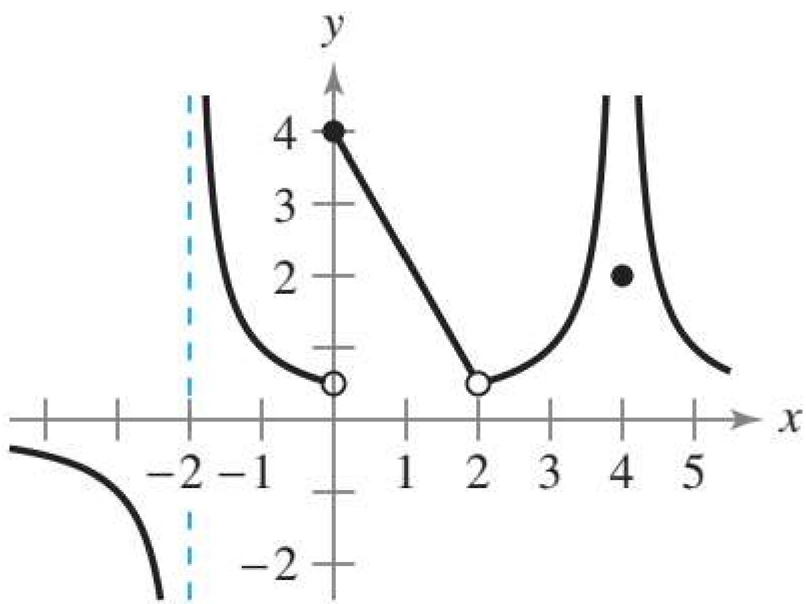
2. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} 4-x & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$



3. $\lim_{x\to 0} \frac{4}{2+e^{1/x}}$



ตัวอย่าง จากกราฟของ $f(x)$ ที่กำหนดให้



จงหาค่า

(a) $f(-2)$

(b) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

(c) $f(0)$

(d) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

(e) $f(2)$

(f) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

(g) $f(4)$

(h) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$