ความต่อเนื่อง

บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันและ a เป็นจำนวนจริง

ถ้าสมบัติทุกข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1. $f(a)$ มีค่า
2. $\lim_{x\to a^-} f(x)$ มีค่า
3. $\lim_{x\to a^+} f(x)$ มีค่า
4. $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

จะกล่าวว่า $\boldsymbol{f}$ **เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่** $\boldsymbol{a}$

ถ้าข้อใดข้อหนึ่งใน 1-3 อย่างน้อยหนึ่งข้อไม่เป็นจริง

จะกล่าวว่า**ฟังก์ชัน** $\boldsymbol{f}$ **ไม่ต่อเนื่องที่** $\boldsymbol{a}$

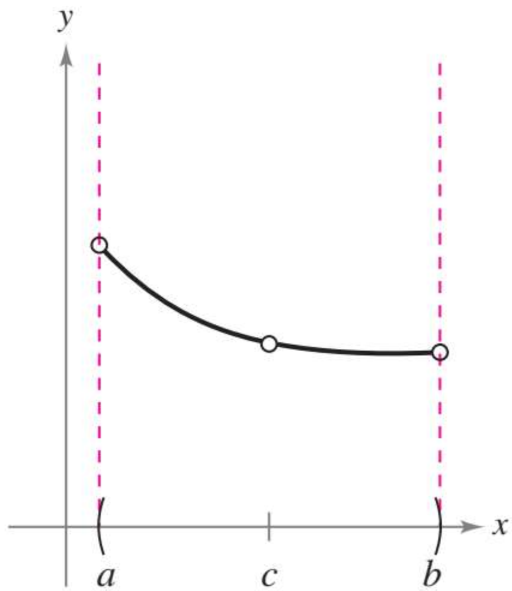
ตัวอย่าง จงพิจารณาความต่อเนื่องของแต่ละฟังก์ชันต่อไปนี้ ณ จุด $x = a$ ที่กำหนดให้

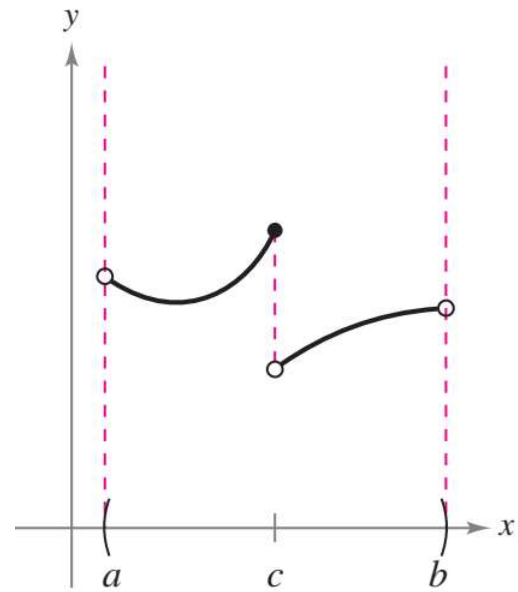
(a) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = 0$

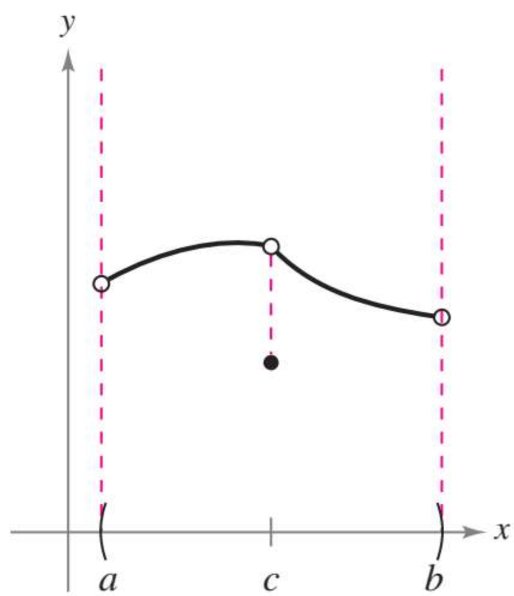
(b) $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}, \quad a = 1$

(c) $h(x) = \begin{cases} x+1 & x \le 0 \\ 3x+1 & x > 0 \end{cases}, \quad a = 0$

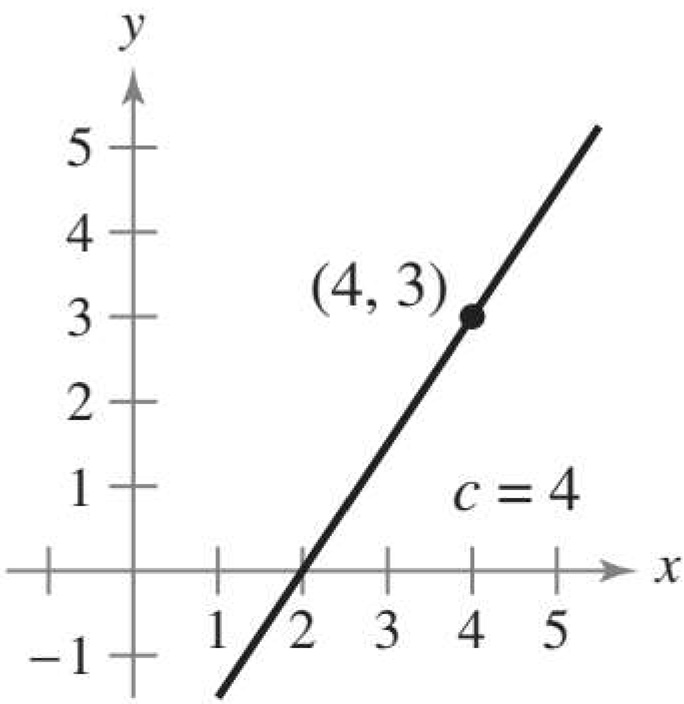
วิธีทำ

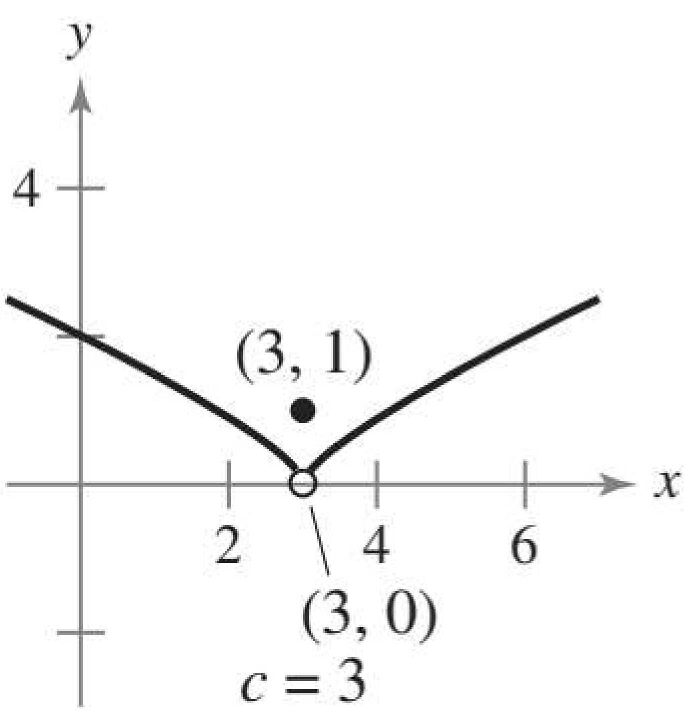

y
x
a
c
b


y
x
a
c
b

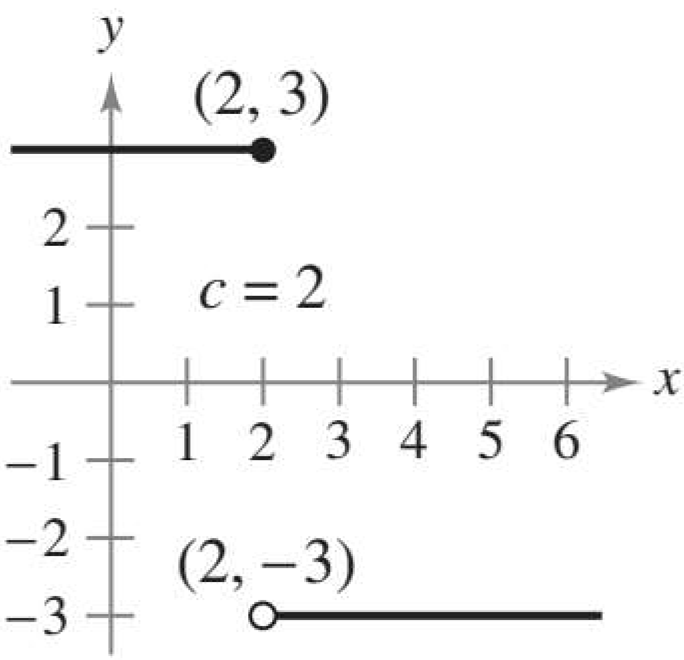

y
x
a
c
b

ตัวอย่าง จากกราฟของฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงพิจารณาความต่อเนื่อง ณ จุด c ที่กำหนดให้

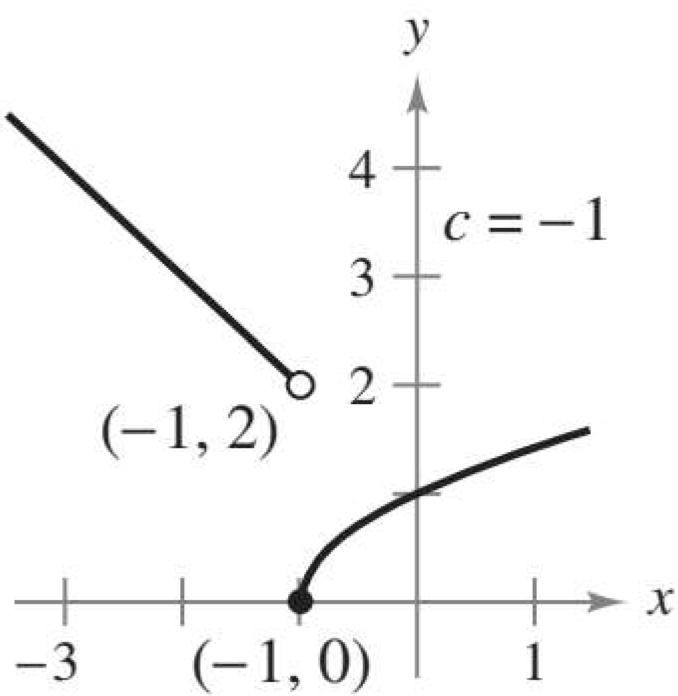
1. 

2. 

3.



4.



ตัวอย่าง ให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} & x \neq 4 \\ 0.25 & x = 4 \end{cases}$

จงพิจารณาความต่อเนื่องของ f ที่จุด $a = 4$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง ให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

จงพิจารณาความต่อเนื่องของ f ที่จุด $a = 0$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง ให้ $f(x)=\begin{cases} x^3 & x\le 2 \\ cx^2 & x>2 \end{cases}$

จงหาค่า c ที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $a=2$

<u>วิธีทำ</u>

บทนิยาม f จะกล่าวว่า**ต่อเนื่องบนช่วงเปิด** $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องที่ทุกจุด $a \in (c, d)$

บทนิยาม f จะกล่าวว่า**ต่อเนื่องบนช่วงปิด** $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]$ ก็ต่อเมื่อสมบัติทุกข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1. f ต่อเนื่องที่ทุกจุด $a \in (c, d)$
2. $f(c) = \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$
3. $f(d) = \lim\limits_{x \to d^-} f(x)$

ตัวอย่าง จงพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

$$f(x) = \sqrt{49 - x^2}$$

บนช่วงปิด $[-7,7]$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

บนช่วงปิด $[-1,2]$

<u>วิธีทำ</u>

สมบัติของความต่อเนื่อง

ให้ f, g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ จะได้ว่า

1. $f(x) + g(x), f(x) - g(x)$ ต่อเนื่องที่ $x = a$
2. $f(x)g(x)$ ต่อเนื่องที่ $x = a$
3. $\frac{f(x)}{g(x)}$ ต่อเนื่องที่ $x = a$ ซึ่ง $g(a) \neq 0$

จากกฎ

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n$$

ทำให้ได้ว่าสำหรับพหุนาม

$$p(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$$

จะได้

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$$

นั่นคือ**พหุนาม $\boldsymbol{p(x)}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจำนวนจริง $\boldsymbol{a}$**

ในทำนองเดียวกันได้ว่า

$$\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(a)}{q(a)},\quad q(a)\neq 0$$

นั่นคือ**เศษส่วนของพหุนาม $\boldsymbol{p(x)/q(x)}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก $\boldsymbol{x=a}$ ซึ่ง $\boldsymbol{q(a)\neq 0}$**

ตัวอย่าง จงพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

$$f(x) = x^3 + 5x - 3$$

บนช่วงปิด $[0,1]$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง ให้

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-3x-10}$$

จงหาช่วง I ของจุด a ทั้งหมดซึ่ง f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน I

วิธีทำ