

## ลิมิตเกี่ยวกับอนันต์และลบอนันต์

พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{3}{x-2}$$

เมื่อ  $x$  มีค่าเข้าใกล้ 2

$x$	1.5	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.5
$f(x)$	-6	-30	-300	-3000	?	3000	300	30	6

จากตารางจะเห็นได้ว่าเมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 2 จากทางซ้าย ค่า  $f(x)$  ลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด ลักษณะเช่นนี้เราจะกล่าวว่

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty$$

อ่านว่า “ลิมิต  $\frac{3}{x-2}$  เมื่อ  $x \rightarrow 2^-$  เท่ากับลบอนันต์”

$-\infty$  เป็นสัญลักษณ์ (ไม่ใช่จำนวน) ที่แทนพฤติกรรม

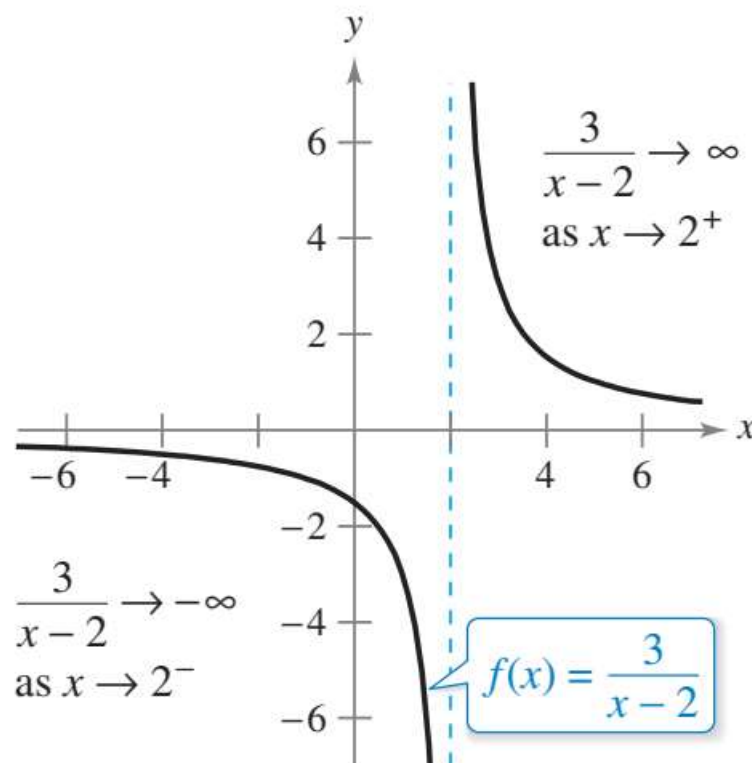
ลิมิตไม่มีค่าชนิดลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด

เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 2 จากทางขวา ค่า  $f(x)$  เพิ่มขึ้น  
 อย่างไม่มีขีดจำกัด ลักษณะเช่นนี้เราจะกล่าวว่

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2} = \infty$$

อ่านว่า “ลิมิต  $\frac{3}{x-2}$  เมื่อ  $x \rightarrow 2^+$  เท่ากับอนันต์”

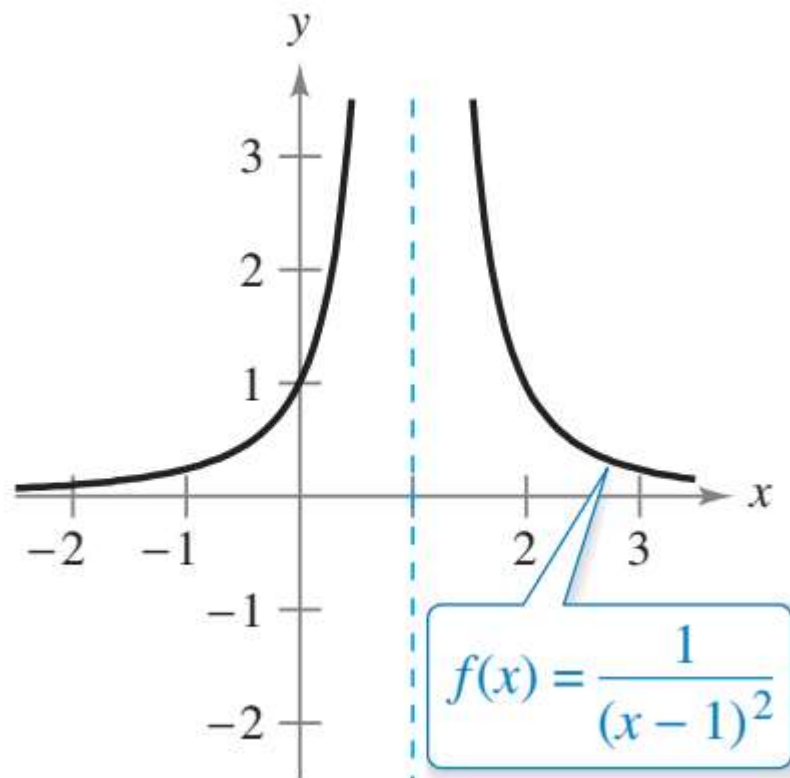
$\infty$  เป็นสัญลักษณ์ (ไม่ใช่จำนวน) ที่แทนพฤติกรรม  
 ลิมิตไม่มีค่าชนิดเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด



พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

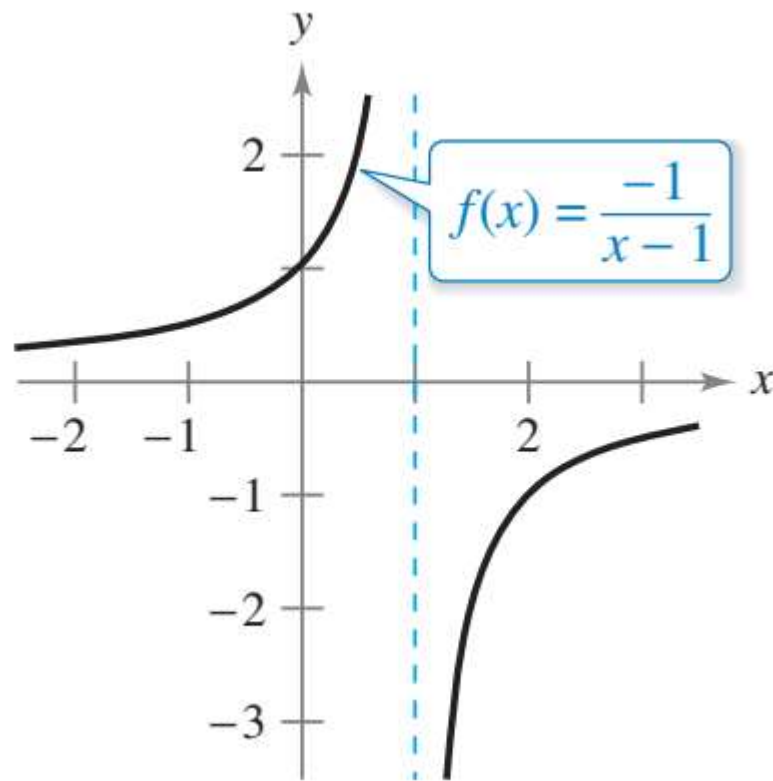
จากกราฟ



จะเห็นได้ว่าเมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 1 (ทั้งทางซ้ายและทางขวา) ค่า  $f(x)$  มีค่ามากขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด ดังนั้นเราจะกล่าวว่

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

ตัวอย่าง จากกราฟของฟังก์ชัน

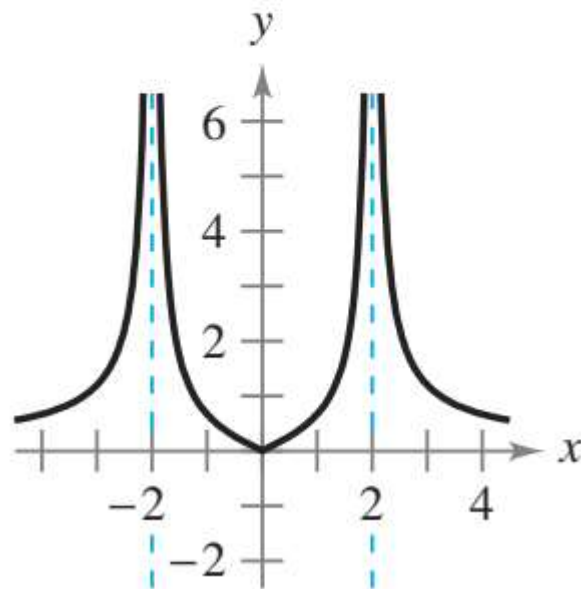


จงพิจารณาลิมิตซ้ายลิมิตขวาและลิมิตเมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 1

วิธีทำ

ตัวอย่าง จากกราฟของฟังก์ชัน

$$f(x) = 2 \left| \frac{x}{x^2 - 4} \right|$$



จงพิจารณาลิมิตซ้ายลิมิตขวาและลิมิตเมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 1

วิธีทำ

กฎลิมิตอนันต์ ( $\infty$ ) พิจารณาลิมิต

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

ให้

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

ถ้าข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้จริง

1.  $L > 0$  และ  $g(x) > 0$  เมื่อ  $x$  มีค่าเข้าใกล้  $a$
2.  $L < 0$  และ  $g(x) < 0$  เมื่อ  $x$  มีค่าเข้าใกล้  $a$

จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5}{(x - 2)^4} = \infty$$

วิธีทำ

กฎลิมิตลบนันต์ ( $-\infty$ ) พิจารณาลิมิต

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

ให้

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

ถ้าข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้จริง

3.  $L > 0$  และ  $g(x) < 0$  เมื่อ  $x$  มีค่าเข้าใกล้  $a$

4.  $L < 0$  และ  $g(x) > 0$  เมื่อ  $x$  มีค่าเข้าใกล้  $a$

จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$



ตัวอย่าง จงหาขีดจำกัด(ถ้ามี)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5 - x}{x^2 - 2x + 1}$$

ในกรณีที่ขีดจำกัดไม่มีค่าให้บอกกว่าขีดจำกัดเป็นอนันต์หรือลบ  
อนันต์หรือไม่

วิธีทำ

หมายเหตุ กฎลิมิตอนันต์ใช้ในการหาลิมิตซ้ายลิมิตขวา  
ได้ด้วย เช่น

ถ้า

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = 0$$

โดย  $L > 0$  และ  $g(x) < 0$  เมื่อ  $x < a$  จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

ถ้า

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$$

โดย  $L < 0$  และ  $g(x) < 0$  เมื่อ  $x < a$  จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

ตัวอย่าง จงหาขีดจำกัด(ถ้ามี)

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{x^2 - 9}, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{x^2 - 9}, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x^2 - 9}$$

ในกรณีที่ขีดจำกัดไม่มีค่าให้บอกกว่าขีดจำกัดเป็นอนันต์หรือลบ  
อนันต์หรือไม่

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาขีดจำกัด(ถ้ามี)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

ในกรณีที่ขีดจำกัดไม่มีค่าให้บอกกว่าขีดจำกัดเป็นอนันต์หรือลบ

อนันต์หรือไม่

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาขีดจำกัด(ถ้ามี)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)$$

ในกรณีที่ขีดจำกัดไม่มีค่าให้บอกกว่าขีดจำกัดเป็นอนันต์หรือลบ  
อนันต์หรือไม่

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาขีดจำกัด(ถ้ามี)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 6 - \frac{1}{x^3} \right)$$

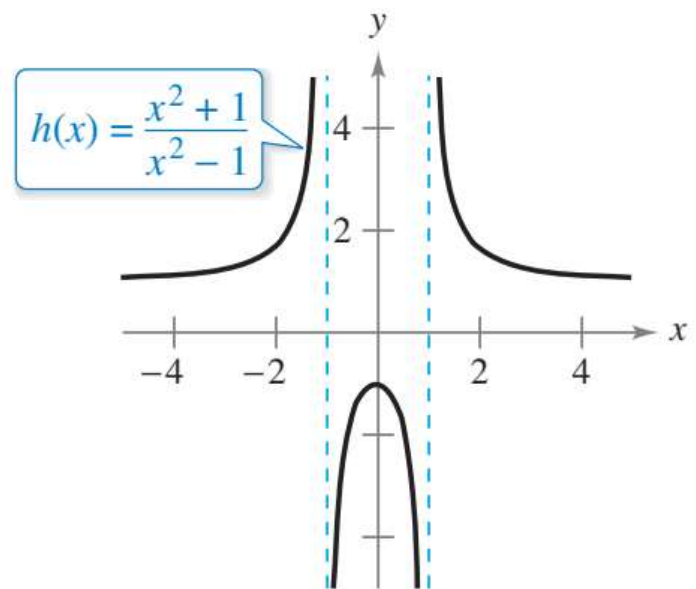
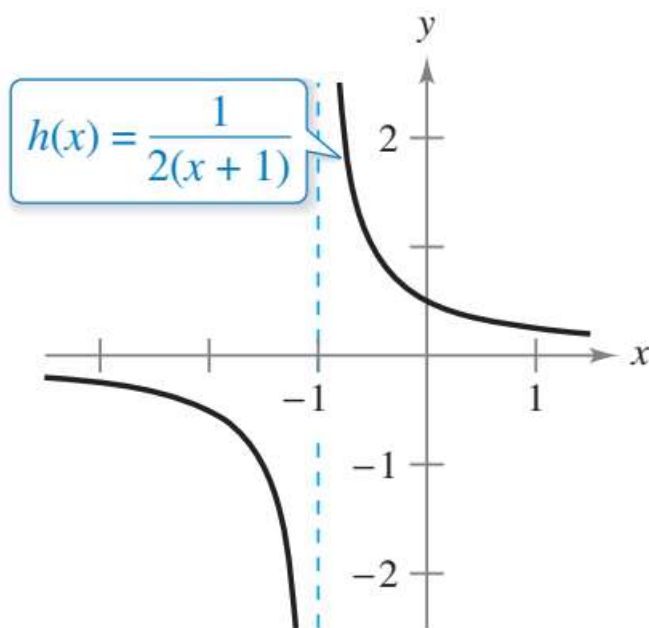
ในกรณีที่ขีดจำกัดไม่มีค่าให้บอกว่าเป็นอนันต์หรือลบ  
อนันต์หรือไม่

วิธีทำ

**บทนิยาม** ถ้าฟังก์ชัน  $f(x)$  มีลิมิตซ้าย หรือ ลิมิตขวา หรือลิมิต เมื่อ  $x$  เข้าใกล้  $a$  เป็น  $\infty$  หรือ  $-\infty$

จะเรียกเส้นตรงในแนวตั้งที่  $x = a$  ว่าเส้นกำกับ

แนวตั้งของกราฟของ  $f$



ตัวอย่าง จงหาเส้นกำกับแนวตั้งทั้งหมดของกราฟของ

$$f(x) = \frac{4}{x^2 - x}$$

วิธีทำ



ตัวอย่าง จงหาเส้นกำกับแนวตั้งทั้งหมดของกราฟของ

$$f(x) = \frac{3}{x^2 + x - 2}$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาเส้นกำกับแนวตั้งทั้งหมดของกราฟของ

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1}$$

วิธีทำ