อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

สมมติจำนวนประชากรของหมีขาวเมื่อปี 1975 เท่ากับ 1560 ตัว ต่อมาในปี 2015 นับจำนวนประชากรได้ 1234 ตัว ได้ว่าจำนวนประชากรเปลี่ยนแปลงไป

$$1234 - 1560 = -326 \quad \text{ตัว}$$

(เครื่องหมายลบคือลดลง) โดยเวลาผ่านไป

$$2015 - 1975 = 40 \quad \text{ปี}$$

ดังนั้นจำนวนประชากรเปลี่ยนแปลงด้วย**อัตราเฉลี่ย**

$$\frac{-326}{40} = -8.15 \quad \text{ตัว/ปี}$$

โดยทั่วไปหาก $f(x)$ เป็นแทนปริมาณบางอย่าง ณ เวลา x จะได้ว่าในช่วงเวลา x_1 ถึง x_2 มีจำนวนเปลี่ยนไป

$$f(x_2) - f(x_1)$$

ดังนั้น**อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย**ในช่วง $[x_1, x_2]$ คือ

$$\bar{f}_{[x_1,x_2]} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ถ้า $\bar{f}_{[x_1,x_2]} > 0$ จะได้ว่าจำนวนเฉลี่ยเพิ่มขึ้น

ถ้า $\bar{f}_{[x_1,x_2]} < 0$ จะได้ว่าจำนวนเฉลี่ยลดลง

บทนิยาม ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดให้ และ c เป็นจำนวนจริง

อัตราการเปลี่ยนแปลง(ฉับพลัน)ของ f ที่ c คือ

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

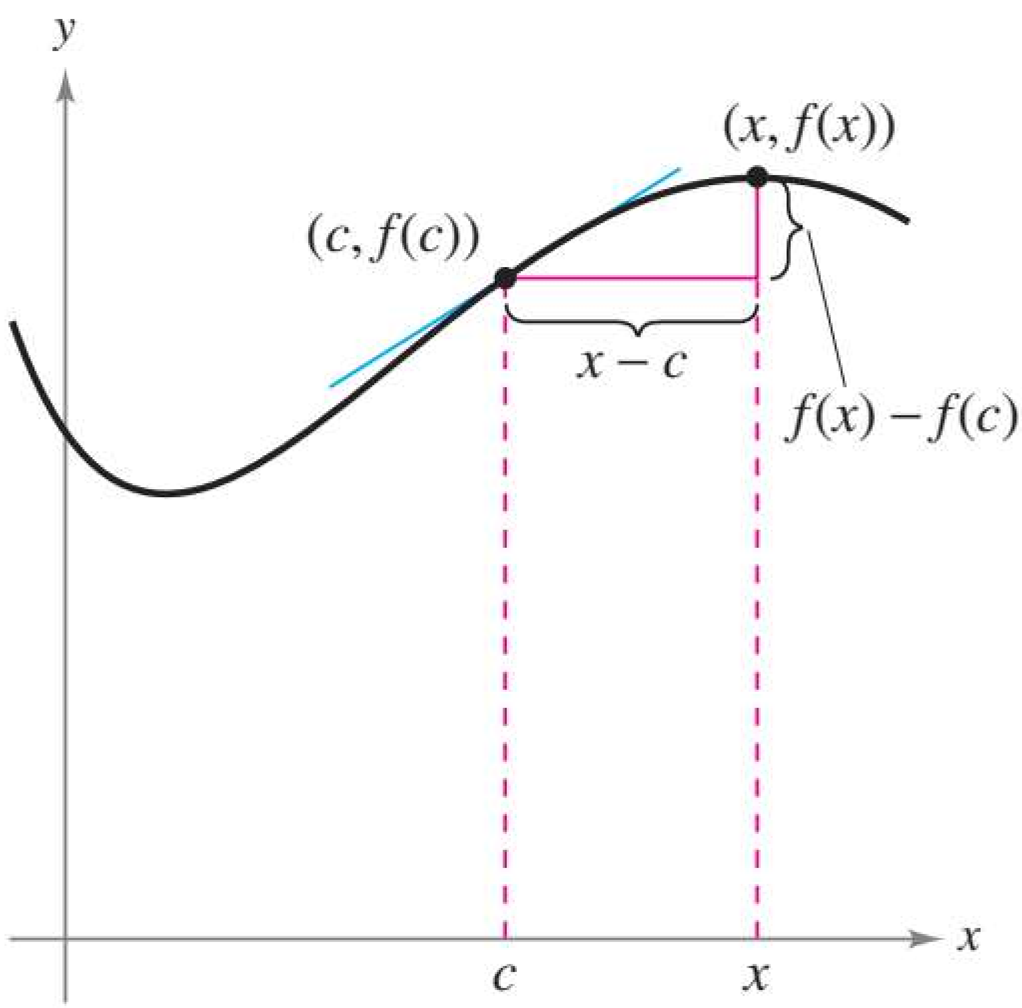
เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$f'(c) \quad \text{หรือ} \quad \frac{df}{dx}(c) \quad \text{หรือ} \quad y'(c) \quad \text{หรือ} \quad \frac{dy}{dx}(c)$$

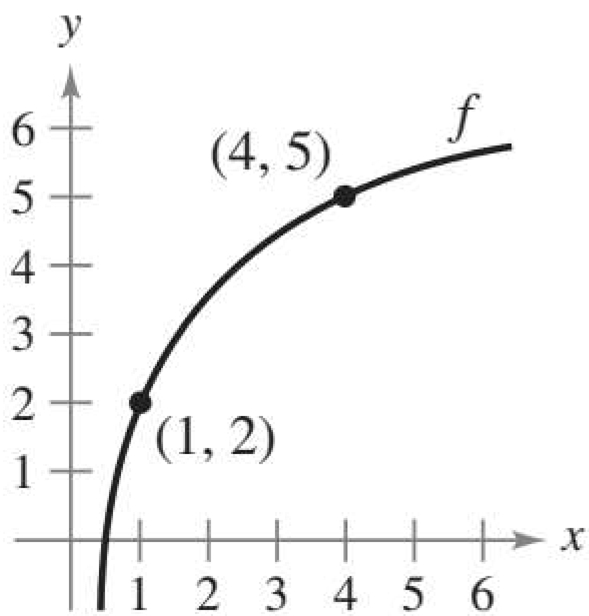
เรียกอีกอย่างหนึ่งว่า**อนุพันธ์ของ f ที่ c**

ข้อสังเกตุ อนุพันธ์ที่ c เท่ากับลิมิตเมื่อ x เข้าใกล้ c ของอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f ในช่วง $[c, x]$

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \bar{f}_{[c,x]}$$



ตัวอย่าง กำหนดให้กราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นดังรูป จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f ในช่วง $[1,4]$



<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = 3x^2 + 1$ จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ 2

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 2 \\ 4x - 3 & x > 2 \end{cases}$$

จงหา $f'(2)$

<u>วิธีทำ</u>

บทนิยาม ถ้าลิมิต

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \quad \text{ไม่มีค่า}$$

จะกล่าวว่า **อนุพันธ์ของ $\boldsymbol{f}$ ไม่มีค่าที่ $\boldsymbol{c}$** หรือ $f'(c)$ **ไม่มีค่า**

ข้อสังเกตุ $f'(c)$ ไม่มีค่าเมื่อข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้ อย่างน้อยหนึ่งเป็นจริง

1. $f(c)$ ไม่มีค่า
2. $\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ ไม่มีค่า
3. $\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ ไม่มีค่า
4. $\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \neq \lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$

ตัวอย่าง กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 & x < 2 \\ \sqrt{2x} & x \geq 2 \end{cases}$$

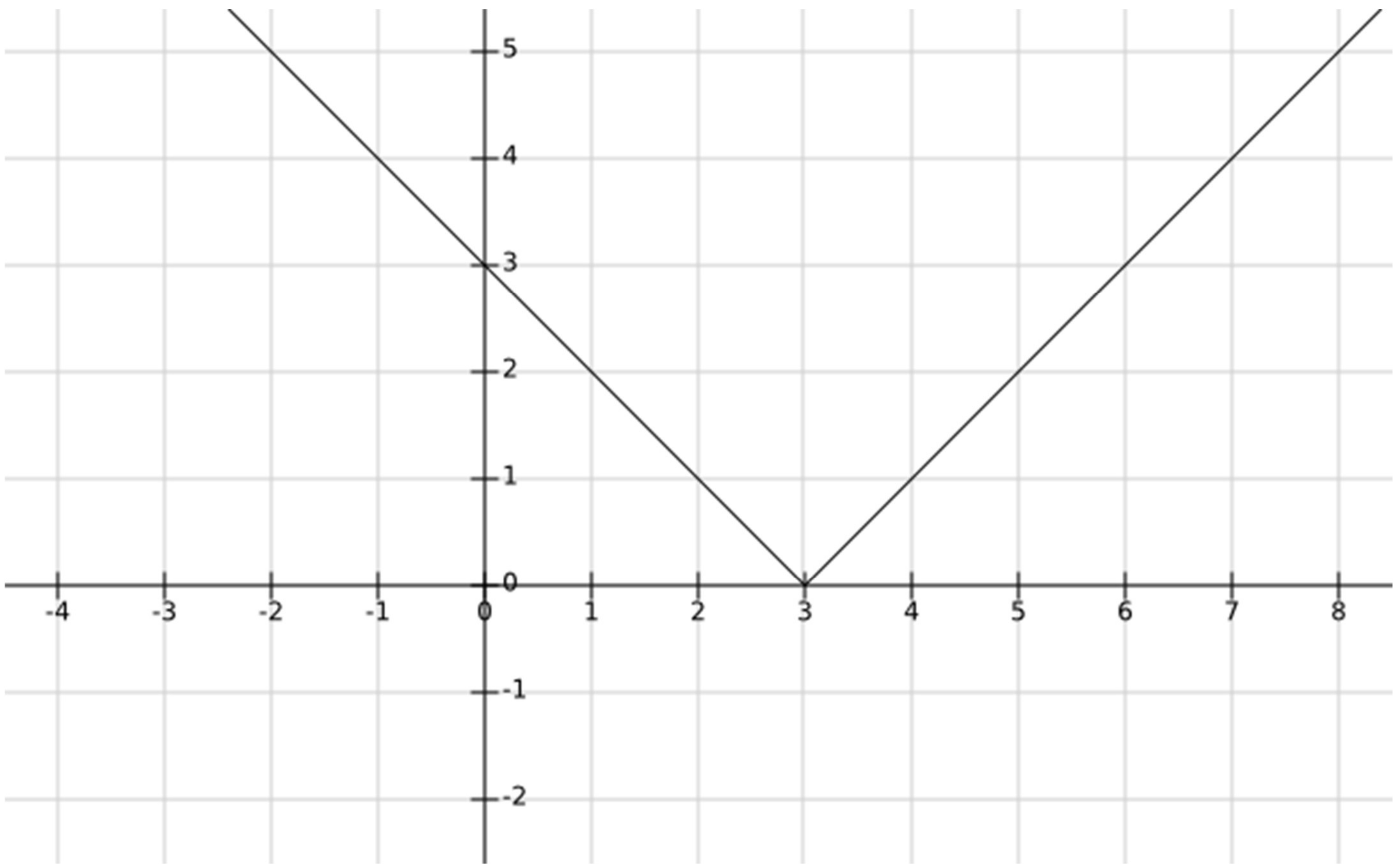
จงหา $f'(2)$ (ถ้ามี)

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = |x - 3|$

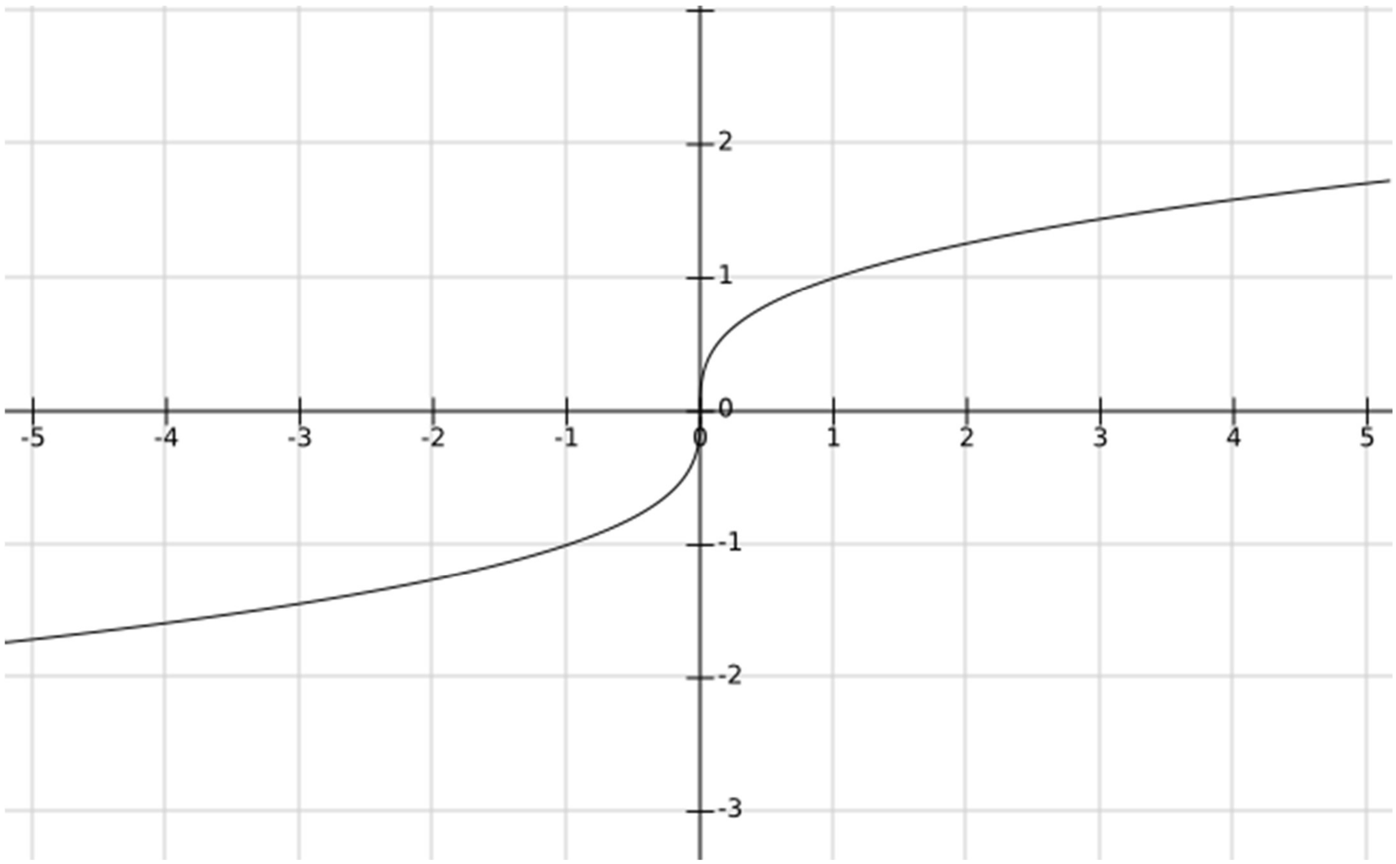
จงหา $f'(3)$ (ถ้ามี)

<u>วิธีทำ</u>



ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = x^{1/3}$ มีกราฟดังรูป

จงหา $f'(0)$ (ถ้ามี)



วิธีทำ

กฎอนุพันธ์ไม่มีค่า ถ้า f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = c$ จะได้ว่า $f'(c)$ ไม่มีค่า

หมายเหตุ กฎข้างบนใช้ในการสรุปฟังก์ชันไม่มีอนุพันธ์เท่านั้น ไม่สามารถนำไปสู่การสรุปว่าอนุพันธ์มีค่าไม่ว่ากรณีใดทั้งสิ้น

ในกรณีที่ f ต่อเนื่องที่ c อนุพันธ์ของ f ที่ c อาจจะไม่มีค่า เช่น

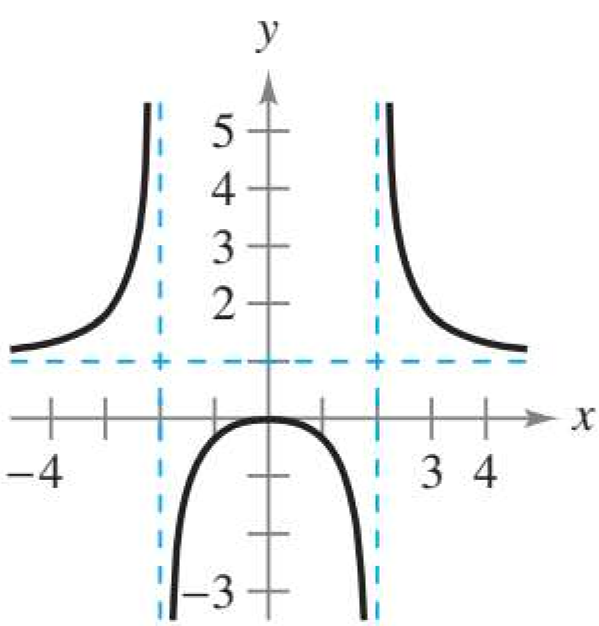
$$f(x) = |x - 3|$$

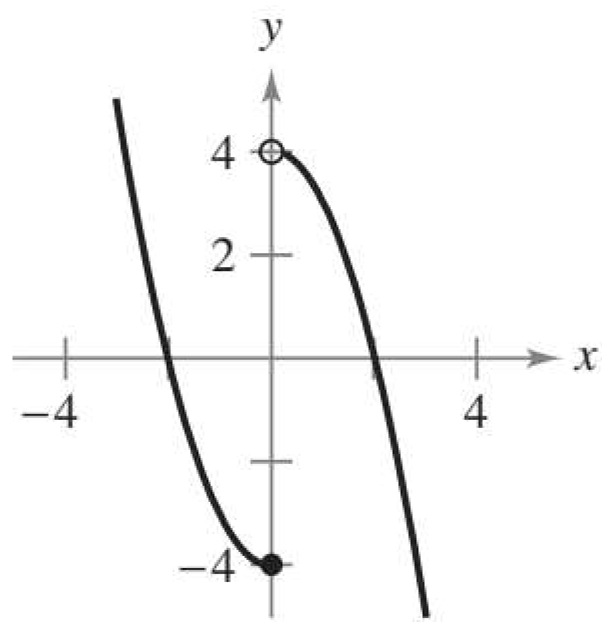
เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ 3 แต่ $f'(3)$ ไม่มีค่า

ตัวอย่าง จากรูปเป็นกราฟของฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x \le 0 \\ 4-x^2 & x > 0 \end{cases}$$

ตามลำดับ สามารถสรุปได้ว่าฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่จุดใดบ้าง





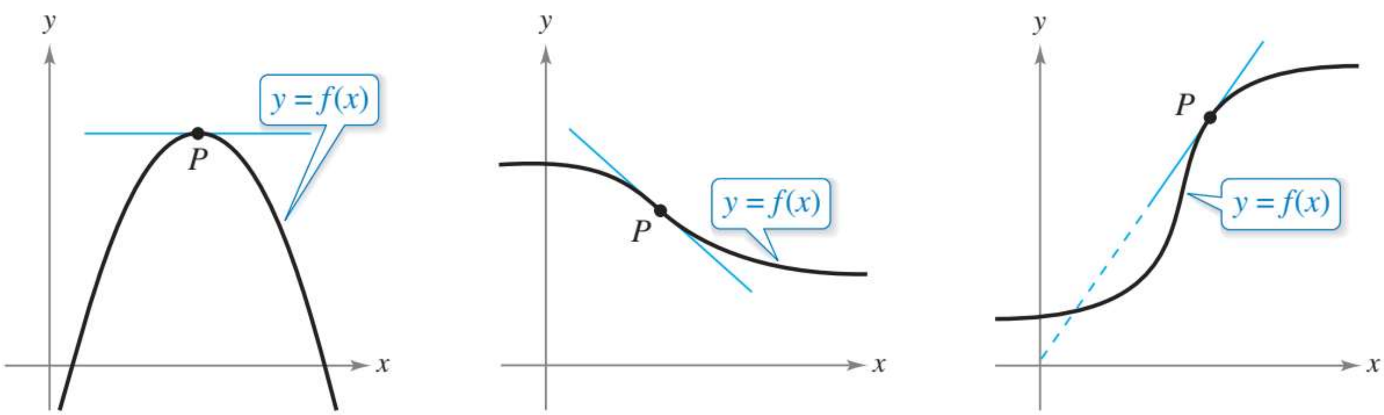
<u>วิธีทำ</u>

อนุพันธ์และความชันเส้นโค้ง

ถ้า $f'(c)$ มีค่าจะได้ว่ามีเส้นตรงสัมผัสกราฟ

$$y = f(x)$$

ที่จุด $\big(c, f(c)\big)$ ยิ่งกว่านั้นความชันของเส้นตรงนี้เท่ากับ $f'(c)$ เส้นตรงนี้เรียกว่า**เส้นสัมผัสกราฟ $\boldsymbol{y = f(x)}$**



หมายเหตุ เส้นตรงคือกราฟที่เขียนได้ในรูป

$$y = mx + d$$

โดยจำนวนจริง m เรียกว่า**ความชัน**ของเส้นตรง

สมการเส้นตรงสัมผัสกราฟ $y = f(x)$ คือ

$$y = f'(c)(x - c) + f(c)$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 1$

จงหาความชันของเส้นสัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ที่จุด $(0,1)$ และที่จุด $(-1,2)$ พร้อมทั้งหาสมการเส้นสัมผัส

<u>วิธีทำ</u>