เราได้ให้นิยาม**อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $\boldsymbol{f}$ ที่จุด $\boldsymbol{x_0}$** คือจำนวนจริง $f'(x_0)$ ซึ่งเท่ากับ

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ถ้าลิมิตไม่มีค่าจะกล่าวว่าอนุพันธ์ของ f ไม่มีค่าที่ x_0

บทนิยาม สำหรับฟังก์ชัน f **อนุพันธ์ของ $\boldsymbol{f}$** คือฟังก์ชัน f' นิยามโดย

$$f'(x) = \text{อนุพันธ์ของ } f \text{ ที่ } x$$

เขียนได้เป็น

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 + 2x$

<u>วิธีทำ</u>

กฎการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันมีหลายกฎให้เลือกใช้เพื่อจะได้คำนวณอนุพันธ์ได้อย่างรวดเร็ว และหลีกเลี่ยงการต้องใช้นิยาม

ข้อ 0 ถ้า $\boldsymbol{f}$ ไม่ต่อเนื่องที่ $\boldsymbol{a}$ จะได้ว่า $\boldsymbol{f'(x_0)}$ ไม่มีค่า

ข้อ 1 อนุพันธ์ของค่าคงที่

$$\frac{d}{dx}[c] = 0$$

บทพิสูจน์

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[c] &= \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $y = 7$
2. $f(x) = 0$
3. $y = k\pi^2$ (k เป็นค่าคงตัว)

<u>วิธีทำ</u>

ข้อ 2 ฟังก์ชัน x^n

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

บทพิสูจน์

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

$$(x+h)^2 - x^2 = 2xh + h^2$$

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \frac{(2x+h)h}{h}$$

$$= 2x + h$$

ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}x^2 = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(2x+h)$$

$$= 2x$$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = x^3$
2. $g(x) = \sqrt{x}$
3. $y = \frac{1}{x^2}$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน

$$f(x) = x^4$$

ที่จุดต่อไปนี้

1. $x_0 = -1$
2. $x_0 = 0$
3. $x_0 = 1$

<u>วิธีทำ</u>

ข้อ 3 การคูณค่าคงที่

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$$

บทพิสูจน์

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[cf(x)] &= \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} c\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= cf'(x)\end{aligned}$$

หารด้วยค่าคงที่

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{c}\right] = \frac{f'(x)}{c}$$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $y = 5x^3$
2. $y = \frac{2}{x}$
3. $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{5}$

<u>วิธีทำ</u>

ข้อ 4 บวกหรือลบ

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = f'(x)-g'(x)$$

บทพิสูจน์

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\big(f(x+h)+g(x+h)\big)-(f(x)+g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\big(f(x+h)-f(x)\big)+\big(g(x+h)-g(x)\big)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= f'(x)+g'(x)$$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = x^3 - 4x + 5$
2. $g(x) = -\frac{x^4}{2} + 3x^3 - 2x$
3. $y = \frac{3x^2 - x + 1}{x}$

<u>วิธีทำ</u>

ข้อ 5 กฎดิฟผลคูณ(สองฟังก์ชัน)

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

สำหรับสามฟังก์ชัน

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)]$$
$$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x)$$
$$+f(x)g(x)h'(x)$$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

1. $f(x) = (3x - 2x^2)(5 + 4x)$
2. $g(x) = (2x - 3)(1 - 5x)$
3. $h(x) = (2x^3 + 5x)(x - 3)(x + 2)$

<u>วิธีทำ</u>

ข้อ 6 กฎดิฟผลหาร

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

ฟังก์ชันต่อไปนี้สามารถใช้วิธีอื่นหาอนุพันธ์ได้ง่ายกว่า

$$y = \frac{x^2 + 3x}{6}$$

$$f(x) = \frac{5x^4}{8}$$

$$g(x) = \frac{-3(3x - 2x^2)}{7x}$$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $y = \frac{5x-2}{x^2+1}$
2. $f(x) = \frac{x-4}{x^2-7}$

<u>วิธีทำ</u>