อนุพันธ์ของฟังก์ชันนิยามโดยปริยาย

ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = x^2 + 1$ เรียกว่า**นิยามโดยชัดแจ้ง** แต่สมการในรูป

$$x^2 + y^2 = 1$$

เรียกว่านิยามฟังก์ชัน $y = f(x)$ **โดยปริยาย**

สามารถหาอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx}$ จากสมการได้ดังนี้

1. ใส่อนุพันธ์ $\frac{d}{dx}$ ในสมการที่กำหนดให้
2. คำนวณอนุพันธ์ของพจน์ที่มีแต่ x ด้วยกฎอนุพันธ์ต่าง ๆ ที่ได้เรียนมา
3. สำหรับพจน์ที่มี y ปรากฏจะใช้กฎลูกโซ่
4. จัดรูปโดยดึงพจน์ที่มี $\frac{dy}{dx}$ ด้วยกัน พจน์อื่น ๆ ย้ายไปอีกด้านหนึ่งของสมการ
5. แก้สมการจะได้ $\frac{dy}{dx}$ ตามต้องการ

เช่น จากสมการ $x^2 + y^2 = 1$ ใส่ $\frac{d}{dx}$ ทั้งสองข้างได้

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}1$$

$$\frac{d}{dx}[x^2] + \frac{d}{dx}[y^2] = 0$$

$$2x + \frac{dy^2}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

นั่นคือ

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \ \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Note

$$\frac{d}{dx}[y^n] = ny^{n-1}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\sin y] = (\cos y)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\arcsin y] = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\frac{dy}{dx}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้สมการ

$$y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$$

นิยามฟังก์ชัน $y = f(x)$ โดยปริยาย

จงหาอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2y^2 + 2y - 5}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\sin y = x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ พร้อมทั้งหาอนุพันธ์ที่จุด $(0,0)$

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \sec y$$

$$\frac{dy}{dx}(0,0) = \frac{1}{\cos 0} = 1$$

ตัวอย่าง ให้

$$x^3 - xy + y^2 = 7$$

จงหาอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 3x^2}{2y - x}$$

ตัวอย่าง ให้

$$7xy + \sin x = 2$$

จงหาอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u>

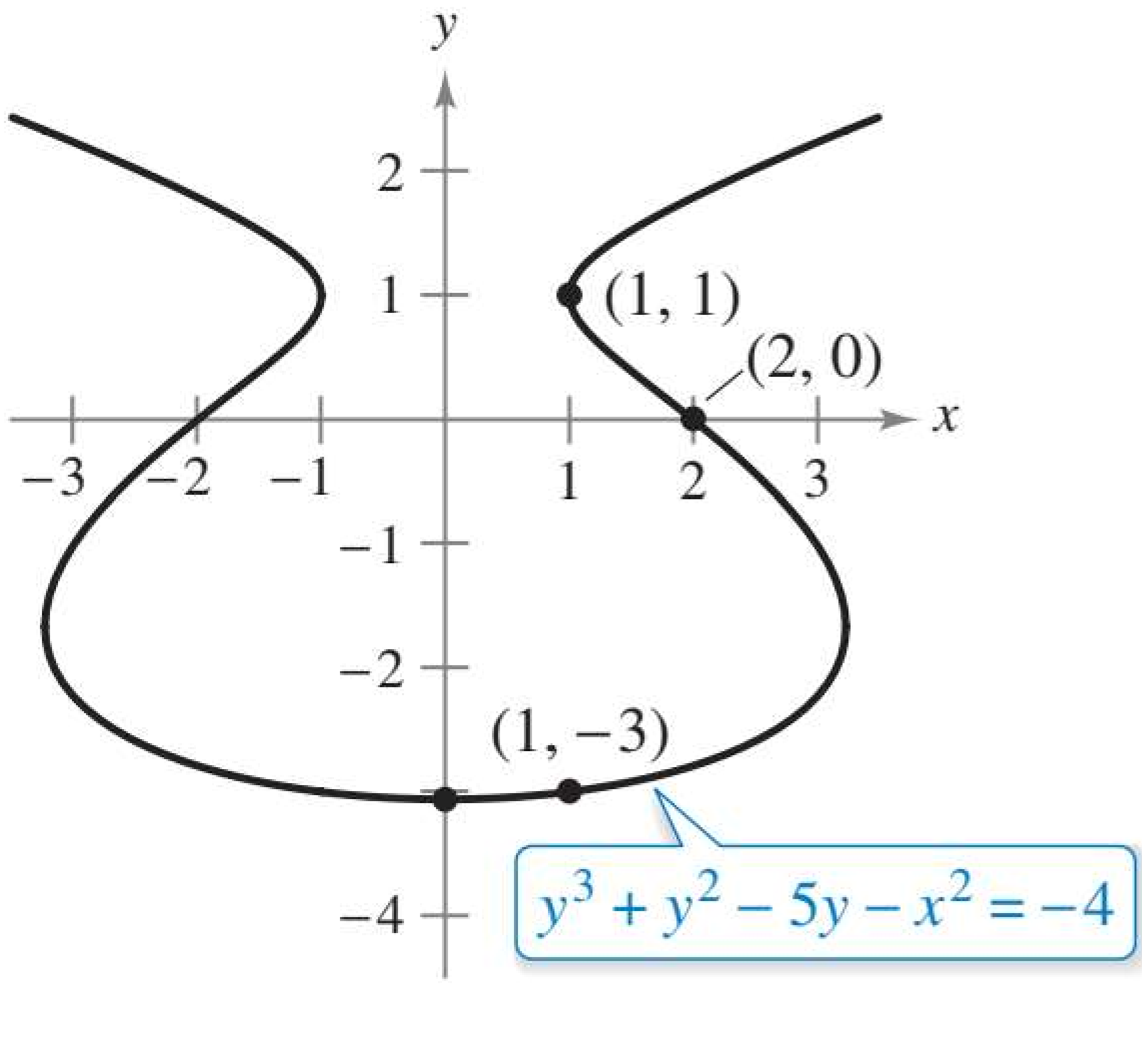
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{7(x+y)}$$

ตัวอย่าง จงหาความชันของเส้นสัมผัสกราฟ

$$y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$$

ที่จุด $(1, -3)$

<u>วิธีทำ</u>



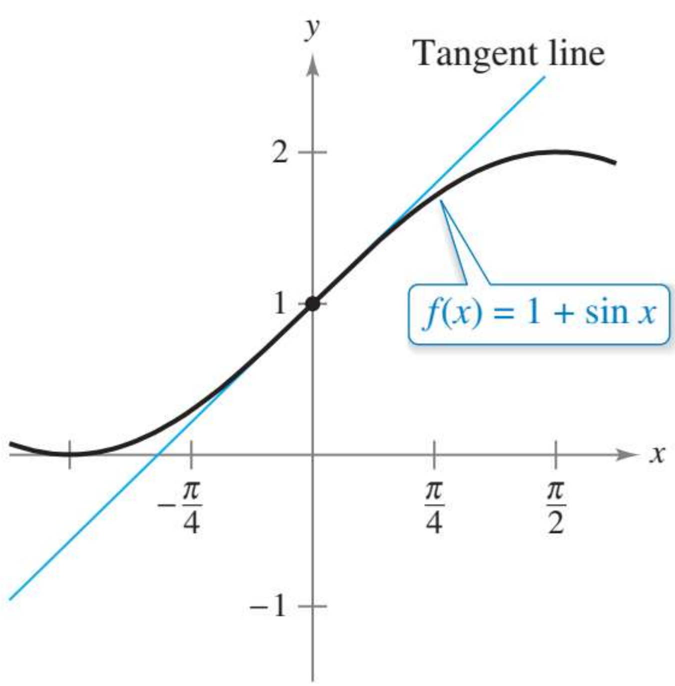
การประมาณค่าเชิงเส้นและค่าเชิงอนุพันธ์

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = 1 + \sin x$ ที่จุด $x_0 = 0$ ได้

$$f(x_0) = 1, \quad f'(0) = \cos 0 = 1$$

ดังนั้นเส้นตรงสัมผัสกราฟคือ

$$y = L(x) = 1 + x$$



จากกราฟเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 จะได้ว่ากราฟทั้งสองชิดกันมากหรือกล่าวได้ว่า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ $L(x)$

ผลลัพธ์ดังกล่าวเห็นได้จากตารางค่าของ $f(x)$ และ $y = L(x)$ ที่ x ต่าง ๆ กัน

x	-0.5	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1	0.5
$f(x) = 1 + \sin x$	0.521	0.9002	0.9900002	1	1.0099998	1.0998	1.479
$y = 1 + x$	0.5	0.9	0.99	1	1.01	1.1	1.5

ในหัวข้อนี้จะเขียนแทนข้อความ "x มีค่าเข้าใกล้ 0" ด้วย

$$x \approx 0$$

ดังนั้น "$f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ $L(x) = 1 + x$" เขียนแทนด้วย

$$f(x) \approx 1 + x$$

บทนิยาม สำหรับฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่จุด $\big(x_0, f(x_0)\big)$ มีเส้นสัมผัสกราฟคือ

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

เมื่อ $x \approx x_0$ จะได้ว่า

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

เรียกว่า**การประมาณเชิงเส้น**

การประมาณเชิงเส้นเขียนได้อีกแบบเป็น

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x)\Delta x$$

โดย

$$\Delta x = x - x_0$$

ตัวอย่าง จงใช้การประมาณเชิงเส้นหาค่าประมาณค่าของ $\sqrt{16.5}$

วิธีทำ จากการประมาณเชิงเส้นได้

$$\sqrt{16.5} \approx 4.0625$$

จากการกดเครื่องคำนวณได้

$$\sqrt{16.5} = 4.0620192$$

ตัวอย่าง จงใช้การประมาณเชิงเส้นหาค่าประมาณค่าของ $\tan 0.05$

<u>วิธีทำ</u>

บทนิยาม สำหรับฟังก์ชัน $y = f(x)$

ค่าเชิงอนุพันธ์ของ $\boldsymbol{x}$ คือจำนวนจริงใด ๆ เขียนแทนด้วย

$$dx$$

ค่าเชิงอนุพันธ์ของ $\boldsymbol{y}$ คือ

$$dy = f'(x)dx$$

ค่าเชิงอนุพันธ์จะช่วยในการคำนวณอินทิกรัลต่อไป

ตัวอย่าง จงหาค่าเชิงอนุพันธ์ dy ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $y = x^2$
2. $y = \sqrt{x}$
3. $y = 2\sin x$
4. $y = \sqrt{x^2 + 1}$
5. $y = x \arcsin x$
6. $y = \arctan(x - 2)$

<u>วิธีทำ</u>