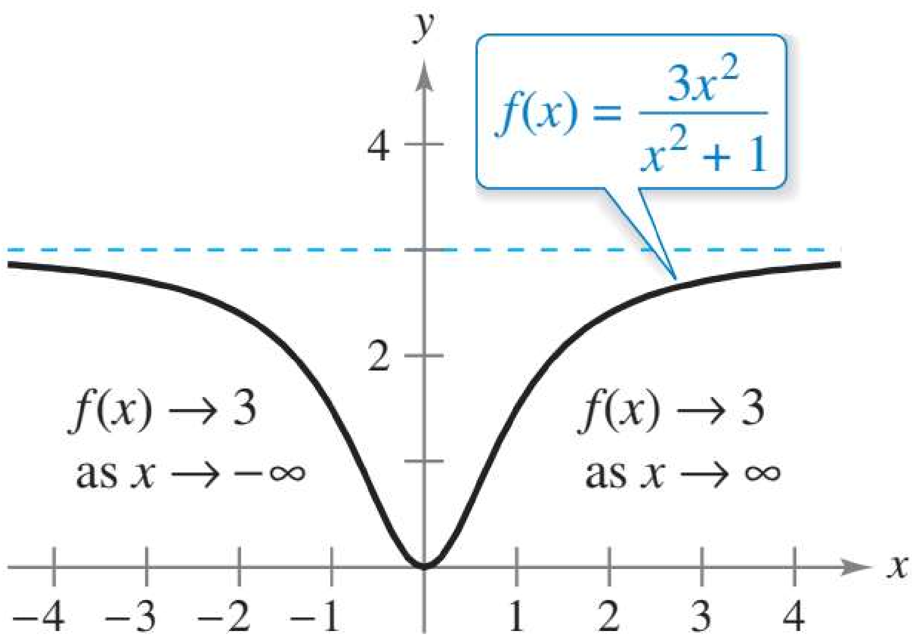
# เส้นกำกับแนวนอนและลิมิตที่อนันต์

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{3x^2}{x^2+1}$




จากกราฟจะเห็นได้ว่า

$f(x)$ เข้าใกล้ 3 เมื่อ $x$ เพิ่มขึ้นอย่างไม่จำกัด

$f(x)$ เข้าใกล้ 3 เมื่อ $x$ น้อยลงอย่างไม่จำกัด

ลักษณะดังกล่าวจะกล่าวว่า

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 3, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$$

*x* decreases without bound. | *x* increases without bound.

| $x$ | $-\infty \leftarrow$ | $-100$ | $-10$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $10$ | $100$ | $\rightarrow \infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $3 \leftarrow$ | 2.9997 | 2.9703 | 1.5 | 0 | 1.5 | 2.9703 | 2.9997 | $\rightarrow 3$ |

$f(x)$ approaches 3. | $f(x)$ approaches 3.

**บทนิยาม** ถ้า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ $L$ เมื่อ $x$ **เพิ่มขึ้น**อย่างไม่จำกัดจะกล่าวว่า

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

ถ้า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ $L$ เมื่อ $x$ **ลดลง**อย่างไม่จำกัดจะกล่าวว่า

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

ถ้ากรณีใดกรณีหนึ่งดังกล่าวเป็นจริงจะเรียกเส้นตรง

$$y = L$$

ว่า**เส้นกำกับแนวนอน**ของกราฟ $y = f(x)$

**กฎการหาเส้นกำกับแนวนอน**

ใช้การจัดรูปพร้อมทั้งกฎการหาลิมิตต่าง ๆ กับสูตร

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

เช่น

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2+1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2/x^2}{(x^2+1)/x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{3}{1+\frac{1}{x^2}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}3}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \\
&= \frac{3}{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}} \\
&= \frac{3}{1+0}=3
\end{aligned}$$

**ตัวอย่าง** จงหาลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2+5}{x^2+3}$

2. $\lim_{x \to \infty} \frac{3-2x}{3x^3-1}$

3. $\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^3+1}{10x^3-3x^2+7}$

<u>วิธีทำ</u>

**ตัวอย่าง** จงหาเส้นกำกับแนวนอนของกราฟของฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{2x}{3x-1}$$

วิธีทำ

**ตัวอย่าง** จงหาเส้นกำกับแนวดิ่งและเส้นกำกับแนวนอนของกราฟของฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 - 4}$$

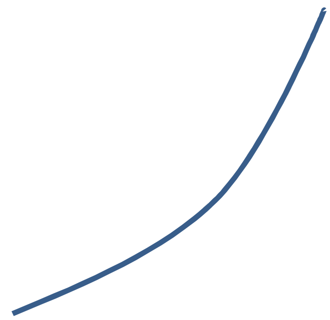
วิธีทำ

# การร่างกราฟ

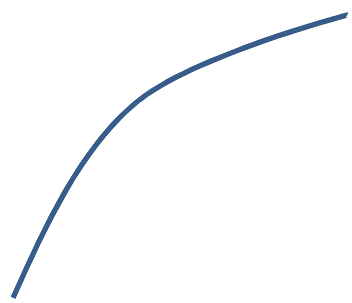
ในการร่างกราฟ $y = f(x)$ จะทำตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. หาโดเมน $D_f$
2. หาจุดตัดแกน $x$ และจุดตัดแกน $y$
3. หาเส้นกำกับแนวดิ่ง $x = a$ ทั้งหมด
   รวมทั้ง $\lim_{x \to a^-} f(x)$ , $\lim_{x \to a^+} f(x)$
   หาเส้นกำกับแนวนอน $y = L$ ทั้งหมด
4. หาจุดสุดขีดสัมพัทธ์จากจุดวิกฤติ $c \in D_f$
   ** **ไม่ต้องคิดจุดวิกฤติที่ไม่อยู่ในโดเมน** **
5. หาช่วงที่ $f$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม/ฟังก์ชันลด
6. หาช่วงที่กราฟเว้าอยู่บน/เว้าอยู่ล่าง
7. หาจุดเปลี่ยนเว้า

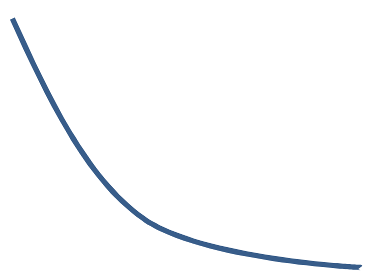
## เพิ่มและเว้าอยู่บน



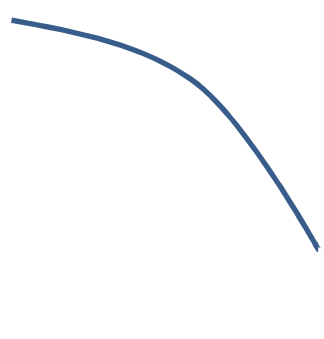
## เพิ่มและเว้าอยู่ล่าง



## ลดและเว้าอยู่บน



## ลดแล้วเว้าอยู่ล่าง



**ตัวอย่าง** จงวิเคราะห์และเขียนกราฟของ $f(x) = \frac{3x}{x-1}$

<u>วิธีทำ</u>

**ตัวอย่าง** จงวิเคราะห์และเขียนกราฟของ $f(x) = \frac{x}{9-x^2}$

วิธีทำ

## โจทย์ปัญหา

บทประยุกต์สุดท้ายคือการนำความรู้เรื่องอนุพันธ์ไปแก้ปัญหาสูงสุดต่ำสุดของโจทย์ปัญหา

โจทย์ปัญหาจะให้หาปริมาณใดปริมาณหนึ่งที่มีค่ามากที่สุดหรือน้อยที่สุดภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดให้ ในการนี้จะต้องรู้สูตรของปริมาณที่สนใจนั้น ๆ

ถ้าปริมาณที่สนใจคือพื้นที่จะใช้สูตร

$$A = xy$$

เมื่อ $x$ คือความกว้าง $y$ คือความยาว

ถ้าเป็นปริมาตรของกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉากจะใช้สูตร

$$V = xyh$$

โดย $x$ คือความกว้างที่ฐาน $y$ คือความยาวที่ฐาน และ $h$ คือส่วนสูงของกล่อง

หากเป็นกล่องที่มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจะได้

$$V = x^2 h$$

จากตัวอย่างจะเห็นได้ว่ามีตัวแปรมากกว่าหนึ่งตัว ตัวแปรเหล่านี้บางตัวจะสามารถขจัดได้โดยใช้สถานการณ์ที่โจทย์กำหนด

เช่นหากโจทย์กำหนดให้ส่วนสูงของกล่องฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสต้องเป็นสองเท่าของความยาวด้านฐานจะได้

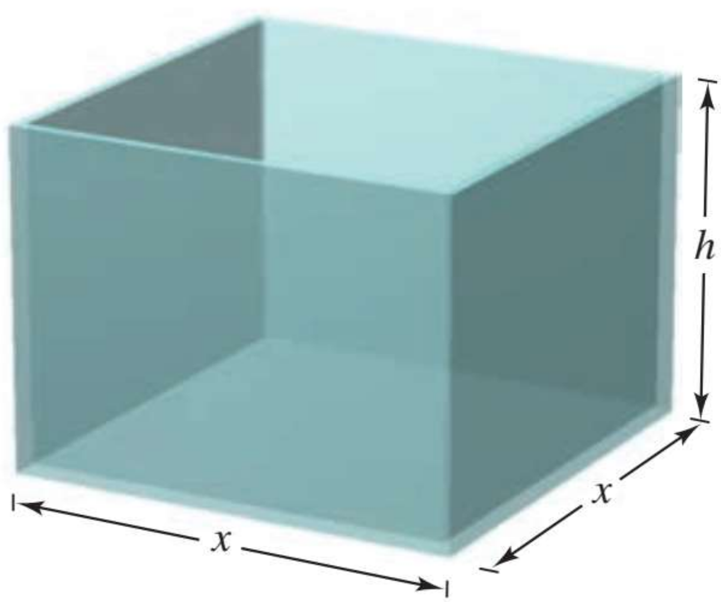
$$V = x^2(2x) = 2x^3$$

ทำให้ได้ $V$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียวคือ $x$ ดังนั้นจะสามารถหาค่าสุดขีดของ $V$ ได้โดยใช้อนุพันธ์

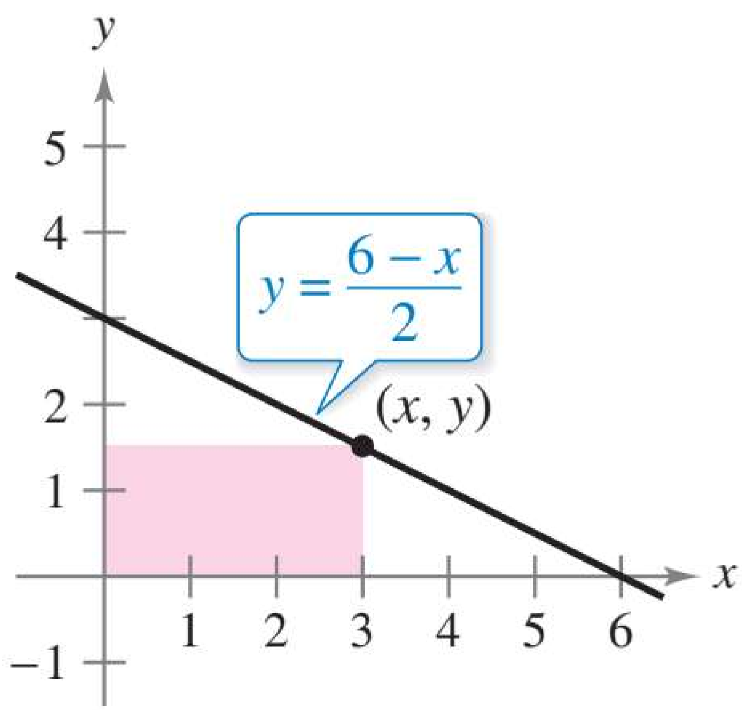
**ตัวอย่าง** ต้องการออกแบบกล่องที่ไม่มีฝาปิด ฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยให้มีพื้นที่ผิวของกล่องเท่ากับ 108 ตารางนิ้ว กำหนดให้ความยาวด้านที่ฐานมีค่าไม่น้อยกว่า 3 นิ้วแต่ไม่เกิน 9 นิ้ว

จงหาว่ากล่องจะมีปริมาตรมากที่สุดและน้อยสุดเป็นเท่าใด

วิธีทำ



**ตัวอย่าง** ต้องการสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งอยู่ใต้กราฟ $y = (6 - x)/2$ อยู่ในจตุภาคที่หนึ่ง และด้านขนานกับแกนดังรูป จะได้พื้นที่มากที่สุดเท่าใด?




<u>วิธีทำ</u>