กฎของโลปิตาล

พิจารณาลิมิต

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-2}{x+1}$$

หากพิจารณาลิมิตเศษและลิมิตส่วนจะได้

$$\frac{\lim_{x\to -1}(2x^2-2)}{\lim_{x\to -1}(x+1)}=\frac{0}{0}$$

ซึ่งเรียกว่า**รูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$** (เรียกสั้น ๆ ว่า IF $\frac{0}{0}$)

กล่าวคือยังกำหนดไม่ได้ว่าลิมิตหาค่าได้หรือไม่

ลิมิตดังกล่าวหาได้โดย**การแยกตัวประกอบ**ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{2x^2-2}{x+1}&=\frac{2(x^2-1)}{x+1}\\&=\frac{2(x-1)(x+1)}{x+1}\\&=2(x-1)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to -1}\frac{2x^2-2}{x+1}=\lim_{x\to -1}2(x-1)=-4$$

หากพิจารณาอนุพันธ์ของเศษและอนุพันธ์ของส่วนจะได้

$$(2x^2-2)' = 4x$$
$$(x+1)' = 1$$

และ

$$\lim_{x\to -1}\frac{(2x^2-2)'}{(x+1)'} = \lim_{x\to -1}\frac{4x}{1} = -4$$

ซึ่งได้ผลลัพธ์เท่ากับวิธีก่อนหน้า

กฎของโลปิตาล ให้ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ เป็นรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$

กล่าวคือ

$$\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{0}{0}$$

จะได้ว่า

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Note กฎของโลปิตาลใช้ในการหาลิมิตซ้าย ลิมิตขวาได้

ตัวอย่าง จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{11}-1}{x^4-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{x+10}-4}{x-6}$

<u>วิธีทำ</u>

ประโยชน์ที่สำคัญของกฎของโลปิตาลคือสามารถหาลิมิตของฟังก์ชันที่ซับซ้อนมาก ๆ และเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันอื่น ๆ เช่น ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันเอกโพเนนเชียล หรือฟังก์ชันลอกการิทึม เป็นต้น

ทบทวนสูตรอนุพันธ์

$$(\sin u)' = (\cos u)u'$$
$$(\cos u)' = -(\sin u)u'$$
$$(e^u)' = e^u u'$$
$$(a^u)' = a^u(\ln a)u'$$
$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$
$$(\log_a u)' = \frac{1}{\ln a}\frac{u'}{u}$$

ค่าที่สำคัญ

$$\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1$$

$$e^0 = 1, \quad \ln 1 = 0$$

ตัวอย่าง จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-2\cos x}{6x}$

<u>วิธีทำ</u>

พิจารณาลิมิต

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{2x^2+1}$$

หากหาลิมิตเศษและลิมิตส่วนจะได้

$$\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2-1)}{\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2+1)}=\frac{\infty}{\infty}$$

เรียกลิมิตลักษณะนี้ว่ารูปแบบไม่กำหนด $\frac{\infty}{\infty}$ (หรือ IF $\frac{\infty}{\infty}$)

การหาลิมิตนี้ทำได้โดยการหารทั้งเศษและส่วนด้วย x^2 นั่นคือ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{3}{2}$$

ถ้าหาอนุพันธ์ของเศษและส่วนแล้วหาลิมิตจะได้

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2-1)'}{(2x^2+1)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

กฎของโลปิตาล ให้ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ เป็นรูปแบบไม่กำหนด $\frac{\infty}{\infty}$ กล่าวคือ

$$\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

จะได้ว่า

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ หมายความว่า $f(x)$ มีค่ามาก (+) หรือน้อย (−) ไม่มีขีดจำกัดเมื่อ x เข้าใกล้ a

$$k+\infty=\infty, \qquad k-\infty=-\infty$$

$$\infty+\infty=\infty, \quad -\infty-\infty=-\infty$$

$$k\cdot\infty=\begin{cases}\infty & (k>0)\\ -\infty & (k<0)\end{cases}, \quad \frac{k}{\infty}=\frac{k}{-\infty}=0$$

$$e^{\infty}=\infty, \ \ e^{-\infty}=0, \quad \infty^n=\infty$$

$$\ln\infty=\infty, \quad \ln 0=-\infty$$

ตัวอย่าง จงหาลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1}$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาลิมิต

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}}$$

<u>วิธีทำ</u>

รูปแบบไม่กำหนดอื่น ๆ

1. $\boxed{\infty - \infty}$ $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\right)$
2. $\boxed{0 \cdot \infty}$ $\lim_{x\to \infty} e^{-x}x$
3. $\boxed{1^\infty}$ $\lim_{x\to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
4. $\boxed{0^0}$ $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x$

การหาลิมิตสำหรับรูปแบบไม่กำหนด 1 & 2 จะจัดรูปให้เป็นรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$

สำหรับ 3 & 4 จะใช้เอกลักษณ์ $A^B = e^{B\ln A}$ เช่น

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

และ

$$\lim_{x\to a} e^u = e^{\lim_{x\to a} u}$$

ตัวอย่าง จงหาลิมิต $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} \right)$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาลิมิต $\lim_{x \to \infty} e^{-x} x$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาลิมิต $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาลิมิต $\lim_{x \to 0^+} (\sin x)^x$

วิธีทำ