

อินทิกรัล

ในบทนี้จะศึกษาการอินทิเกรต (Integration) ซึ่งเป็นกระบวนการทำย้อนกลับของอนุพันธ์ หรือเป็นการหาฟังก์ชันที่มีอัตราการเปลี่ยนแปลงเท่ากับฟังก์ชันที่กำหนดให้

พิจารณาคำถามต่อไปนี้

“จงหาฟังก์ชัน $F(x)$ ซึ่งมีอนุพันธ์เท่ากับ x ” นั่นคือ

$$\frac{d}{dx} F(x) = x$$

จากสูตร $\frac{d}{dx} [x^n] = nx^{n-1}$ เมื่อ $n = 2$ จะได้

$$\frac{d}{dx} [x^2] = 2x \quad \therefore \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} x^2 \right] = x$$

จึงได้ว่า

$$F(x) = \frac{1}{2} x^2$$

เป็นคำตอบหนึ่ง

แต่จากสูตร $\frac{d}{dx}[C] = 0$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัวจะได้

$$F_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1, \quad F_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2, \dots$$

เป็นคำตอบด้วย

$F_1(x), F_2(x), \dots$ เขียนรวมได้

$$F(x) + C$$

- F, F_1, F_2, \dots เรียกว่า **ปฏิยานุพันธ์** ของ x^2
- $F(x) + C$ เรียกว่า **ปฏิยานุพันธ์ทั่วไป** ของ x^2

บทนิยาม ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดให้

ถ้า $F(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์เท่ากับ $f(x)$ นั่นคือ

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$$

เรียก $F(x)$ ว่า **ปฏิยานุพันธ์**(หนึ่ง)ของ $f(x)$

เรียก $F(x) + C$ ว่า **ปฏิยานุพันธ์ทั่วไป**ของ $f(x)$

สัญลักษณ์ นิยมใช้

$$\int f(x) dx$$

แทนปริยานุพันธ์ทั่วไปของ $f(x)$

ดังนั้นถ้า $F(x)$ เป็นปริยานุพันธ์(หนึ่ง)ของ $f(x)$ จะ
ได้ปริยานุพันธ์ทั่วไป

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

โดย C เป็นค่าคงตัวใด ๆ

- \int เรียกว่าเครื่องหมายอินทิกรัล
- $f(x)$ เรียกว่าตัวถูกอินทิเกรต
- x เรียกว่าตัวแปรของการอินทิเกรต
- C เรียกว่าค่าคงตัวของอินทิเกรต

นอกจากเรียก $\int f(x) dx$ ว่าปริยานุพันธ์ทั่วไปของ
 $f(x)$ แล้วยังเรียกว่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตด้วย

ในคำถามที่ได้กล่าวไปข้างต้นจะได้

$$\int x^2 dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

จาก $\frac{1}{2}x^2 + 1$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ x^2 จะได้ว่า

$$\int x^2 dx = \frac{1}{2}x^2 + 1 + C$$

ทั้งสองสูตรให้ปฏิยานุพันธ์ทั้งหมดเหมือนกัน(แต่แทนค่า C ต่างกัน เช่น $F_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ ได้จากสูตรแรกโดยแทน $C = 2$ แต่ได้จากสูตรที่สองโดยแทน $C = 1$)

ดังนั้นทั้งสองสูตรถือว่าเป็นปฏิยานุพันธ์ทั่วไปแต่สูตรแรกเขียนกระชับกว่า

กฎการทำย้อนกลับ

$$\int f'(x) dx = f(x) + C$$

$$\frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \right] = f(x)$$

ตัวอย่าง จงหาปฏิยานุพันธ์ทั่วไปของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = 3$

2. $g(x) = 6x^5$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขต

$$\int 4x^3 dx$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงแก้สมการหาฟังก์ชัน y ซึ่งสอดคล้อง

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

โดยตอบในรูปทั่วไป

วิธีทำ

สูตรอินทิกรัล

$$1. \int 0 \, dx = C$$

$$\left(\frac{d}{dx} [0] = 0\right)$$

$$2. \int k \, dx = kx + C$$

$$\left(\frac{d}{dx} [kx] = k\right)$$

$$3. \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\left(\frac{d}{dx} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right] = x^n\right)$$

$$4. \int kf(x) \, dx = k \int f(x) \, dx$$

$$5. \int [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$$

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\int 3x \, dx$

2. $\int \frac{1}{x^3} \, dx$

3. $\int \sqrt{x} \, dx$

4. $\int (x + 2) \, dx$

5. $\int (3x^4 - 5x^2 + x) \, dx$

วิธีทำ

เทคนิคการอินทิเกรต 0

จัดรูปตัวถูกอินทิเกรตก่อนทำการอินทิเกรต

เช่น

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}, \quad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{A + B + \dots}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C} + \dots$$

$$A(B + C + \dots) = AB + AC + \dots$$

$$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$$

$$(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD$$

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขต

$$\int \frac{x + 1}{\sqrt{x}} dx$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขต

$$\int (t^2 + 3)^2 dt$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน

$$f(x) = \sqrt{x}(x - 4)$$

วิธีทำ

สูตรอินทิกรัล

$$6. \int e^{kx} dx = \left(\frac{1}{k}\right) e^{kx} + C \quad (k \neq 0)$$

$$\left(\frac{d}{dx} \left[\left(\frac{1}{k}\right) e^{kx} \right] = e^{kx}\right)$$

$$7. \int a^{kx} dx = \left(\frac{1}{k \ln a}\right) a^{kx} + C \quad (a \neq 1)$$

$$\left(\frac{d}{dx} \left[\left(\frac{1}{k \ln a}\right) a^{kx} \right] = a^{kx}\right)$$

$$8. \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\left(\frac{d}{dx} [\ln|x|] = \frac{1}{x}\right)$$

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int (e^x - x) dx$

2. $\int \frac{x^2 - 5}{x} dx$

3. $\int 2^{3x+5} dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัลต่อไปนี้

$$\int \frac{e^x + 2}{2e^{4x}} dx$$

วิธีทำ