ทบทวน

สำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ ที่กำหนดให้ $F(x)$ ที่มีสมบัติว่า

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$$

เรียกว่า**ปฏิยานุพันธ์**ของ $f(x)$ และ

$$F(x) + C$$

เรียกว่า**ปฏิยานุพันธ์ทั่วไป**ของ $f(x)$ หรือ**อินทิกรัลไม่จำกัดเขต**ของ $f(x)$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\int f(x)\,dx$$

สูตรอินทิกรัล

1. $\int 0\,dx = C$

2. $\int k\,dx = kx + C$

3. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$

4. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

5. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

6. $\int e^{kx}\,dx = \left(\frac{1}{k}\right)e^{kx} + C \quad (k \neq 0)$

7. $\int a^{kx}\,dx = \left(\frac{1}{k\ln a}\right)a^{kx} + C \ (a \neq 1)$

8. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

เทคนิกการอินทิเกรต 0

จัดรูปตัวถูกอินทิเกรตก่อนทำการอินทิเกรต

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$
2. $\int (e^x + 1)^2\,dx$
3. $\int \frac{3x^2-2}{x}\,dx$
4. $\int 5^{x+1}\,dx$

<u>วิธีทำ</u>

การอินทิเกรตโดยแทนค่าด้วยตัวแปร

พิจารณาการอินทิเกรตต่อไปนี้

$$\int (x^2+1)^2 2x\,dx$$

โดยการกระจายกำลังสองได้

$$\int (x^4+2x^2+1)2x\,dx = \int (2x^5+4x^3+2x)\,dx$$
$$= \frac{x^6}{3} + x^4 + x^2 + C$$

แต่หากจะอินทิเกรต

$$\int (x^2+1)^5 2x\,dx$$

จะเห็นว่าวิธีกระจายกำลังจะยุ่งยากมาก ในกรณีนี้อาจพิจารณาได้ดังนี้

จากนิยามของอินทิกรัลจะต้องหาฟังก์ชัน $H(x)$ ซึ่ง

$$\frac{d}{dx}[H(x)] = (x^2+1)^5 2x$$

แล้วจะได้

$$\therefore \int (x^2+1)^5 2x\,dx = H(x) + C$$

ฟังก์ชัน $(x^2+1)^5$ เป็นฟังก์ชันประกอบ

$$(x^2+1)^5 = u^5, \quad u = x^2+1$$

และสังเกตว่า

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

ดังนั้นหากเขียนในรูปตัวแปร u จะได้

$$(x^2+1)^5 2x = u^5 \frac{du}{dx}$$

ปฏิยานุพันธ์อันหนึ่งของ u^5 เทียบตัวแปร u ได้แก่ $\frac{u^6}{6}$ นั่นคือ

$$\frac{d}{du}[u^6/6] = u^5$$

ดังนั้น

$$(x^2+1)^5 2x = \frac{d(u^6/6)}{du}\frac{du}{dx}$$

จากกฎลูกโซ่

$$\frac{dF(u)}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}[F(u)]$$

ทำให้ได้

$$(x^2+1)^5 2x = \frac{d}{dx}\left[\frac{u^6}{6}\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{(x^2+1)^6}{6}\right]$$

หรือ

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(x^2+1)^6}{6}\right] = (x^2+1)^5 2x$$

แสดงว่าปฏิยานุพันธ์อันหนึ่งของ $(x^2+1)^5 2x$ คือ

$$H(x) = \frac{(x^2+1)^6}{6}$$

และได้

$$\int (x^2+1)^5 2x\,dx = \frac{(x^2+1)^6}{6} + C$$

กฎการอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปร

สำหรับอินทิกรัลที่อยู่ในรูป

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx$$

ให้ $u = g(x)$ และปฏิยานุพันธ์อันหนึ่งของ $f(u)$ เทียบตัวแปร u คือ $F(u)$ กล่าวคือ

$$\frac{d}{du}[F(u)] = f(u)$$

จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}[F(u)] = f\big(g(x)\big)g'(x)$$

ดังนั้น

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big) + C$$

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int \frac{-4x}{(1-2x^2)^2}\,dx$$

วิธีทำ

สูตรเปลี่ยนตัวแปร

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big) + C$$

โดย $\frac{d}{du}[F(u)] = f(u)$ สามารถใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ช่วยให้ใช้งานได้ดียิ่งขึ้นดังนี้

กำหนดตัวแปร $u = g(x)$ โดยนิยาม

$$du = g'(x)dx$$

แทน $g(x)$ ด้วย u ใน $f\big(g(x)\big)$ และแทน $g'(x)dx$ ด้วย du จะได้

กฎการเปลี่ยนตัวแปร(ค่าเชิงอนุพันธ์)

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int (5x^2+1)^2 10x\,dx$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int \frac{4x^3}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$$

<u>วิธีทำ</u>

การเปลี่ยนตัวแปรที่ใช้ค่าเชิงอนุพันธ์นอกจากช่วยในการเขียนสูตร

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

แล้วยังใช้ในการอินทิเกรต

$$\int f\big(g(x)\big)A(x)\,dx$$

ในกรณีทั่วไปดังนี้

กำหนดให้

$$u = g(x), \quad x = B(u) \text{ (ถ้ามี)}$$

1. แทน $g(x)$ ด้วย u ใน $f\big(g(x)\big)$
2. แทน $A(x)dx = \frac{A(x)}{g'(x)}du$ และ
3. แปลง $\frac{A(x)}{g'(x)}$ ให้อยู่ในรูปของ u โดยใช้ $x = B(u)$
4. เมื่ออินทิเกรตเทียบ du ได้แล้วให้แทน $u = g(x)$

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int \frac{3+x}{(x+1)^2}\,dx$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$$

<u>วิธีทำ</u>