

สูตรอินทิกรัลฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$1. \int \cos kx \, dx = \frac{1}{k} \sin kx + C$$

$$\left(\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{k} \sin kx \right] = \cos kx \right)$$

$$2. \int \sin kx \, dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C$$

$$\left(\frac{d}{dx} \left[-\frac{1}{k} \cos kx \right] = \sin kx \right)$$

$$3. \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$\left(\frac{d}{dx} [\tan x] = \sec^2 x \right)$$

$$4. \int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$$

$$\left(\frac{d}{dx} [\sec x] = \sec x \tan x \right)$$

$$5. \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

$$\left(\frac{d}{dx} [-\cot x] = \csc^2 x \right)$$

$$6. \int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$$

$$\left(\frac{d}{dx} [-\csc x] = \csc x \cot x \right)$$

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int (5 \cos x + 4 \sin x) dx$

2. $\int (\sec^2 u - \sin u) du$

3. $\int \sec \theta (\tan \theta + \sec \theta) d\theta$

4. $\int \frac{1 + \cos^2 x}{\sin^2 x} dx$

วิธีทำ

สูตรเปลี่ยนตัวแปร

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$$

$$\int f(g(x))A(x) dx = \int f(u) \frac{A(x)}{g'(x)} du$$

เมื่อ $u = g(x)$

ในบางครั้งตัวแปรที่อื่นที่เกเรตอาจจะเป็น

$$u = \sin x$$

$$u = \cos x$$

หรือฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัลต่อไปนี้

$$\int \cos(2x - 5) dx$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัลต่อไปนี้

$$\int \frac{\sec^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัลต่อไปนี้

$$\int \sin x \sqrt{1 + 3 \cos x} dx$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัลต่อไปนี้

$$\int 16 \tan^7 x \sec^2 x \, dx$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัลต่อไปนี้

$$\int \csc^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัลต่อไปนี้

$$\int e^x \sec^2(e^x) dx$$

วิธีทำ

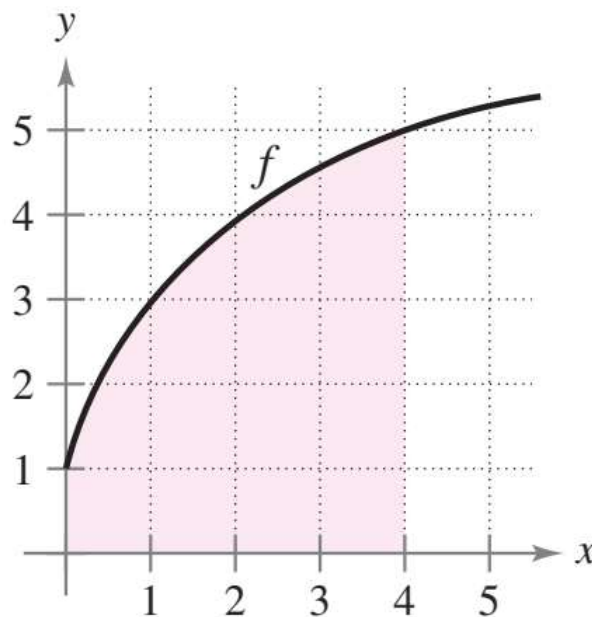
ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัลต่อไปนี้

$$\int \sec^5 x \tan x \, dx$$

วิธีทำ

การหาพื้นที่และอินทิกรัลจำกัดเขต

พิจารณาการประมาณพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชัน f ดังแสดงในบริเวณแรเงาต่อไปนี้



วิธีแรกคือประมาณด้วยแท่งสี่เหลี่ยมฐาน 1 หน่วย ส่วนสูงคือค่าน้อยสุดของ f ในแต่ละช่วงได้

$$1 \times 1 + 1 \times 3 + 1 \times 4 + 1 \times 4 = 12$$

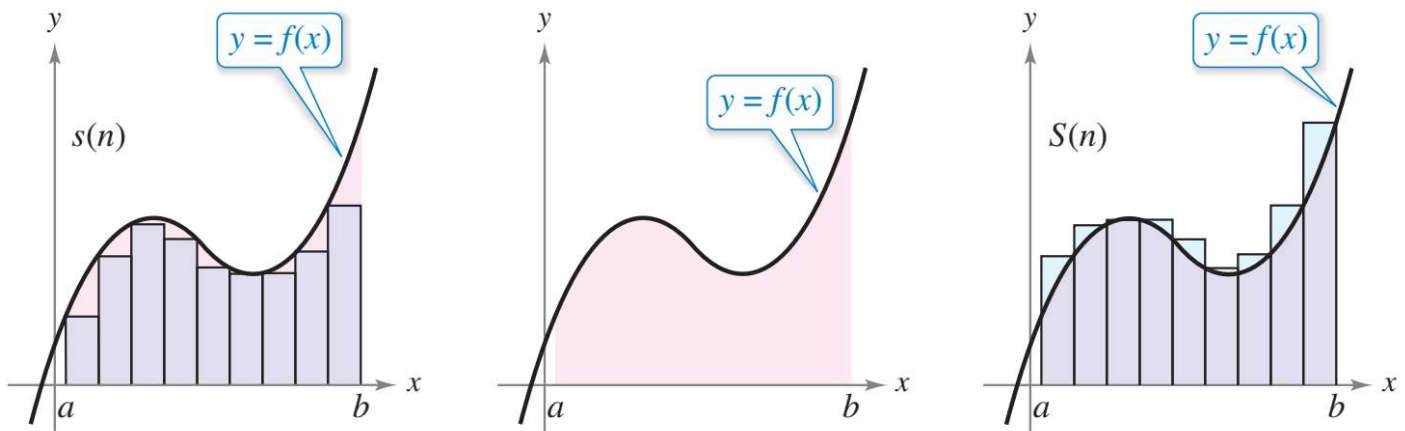
อีกแบบคือประมาณด้วยแท่งสี่เหลี่ยมฐานยาว 1 หน่วย ส่วนสูงคือค่ามากที่สุดของ f ในแต่ละช่วงได้

$$1 \times 3 + 1 \times 4 + 1 \times 4.5 + 1 \times 5 = 16.5$$

ดังนั้นพื้นที่ใต้กราฟของ f (บริเวณแรเงา)

$$12 < A < 16.5$$

หากแบ่งออกเป็นแท่งสี่เหลี่ยมจำนวนมากขึ้นจะได้
ค่าประมาณที่ใกล้เคียงพื้นที่จริงมากยิ่งขึ้นไปด้วย



ในกรณีทั่วไปถ้า $f(x) \geq 0$ ในช่วง $[a, b]$ แบ่ง
บริเวณใต้กราฟออกเป็น n แท่งแต่ละแท่งมีฐานยาว

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

มีส่วนสูง $f(m_i), f(M_i)$ คือค่าน้อยสุดและค่ามากสุดใน
แต่ละช่วงตามลำดับจะได้

$$L(n) = \sum_{i=1}^n f(m_i) \Delta x$$

$$U(n) = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta x$$

เป็นค่าประมาณล่างและบนตามลำดับ ดังนั้นพื้นที่

$$L(n) < A < U(n)$$

ทฤษฎีบท ถ้า $f(x) \geq 0$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ จะได้ว่าพื้นที่

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} L(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(n)$$

ยิ่งกว่านั้นถ้า $f(c_i)$ เป็นค่าใด ๆ ในแต่ละช่วงจะได้

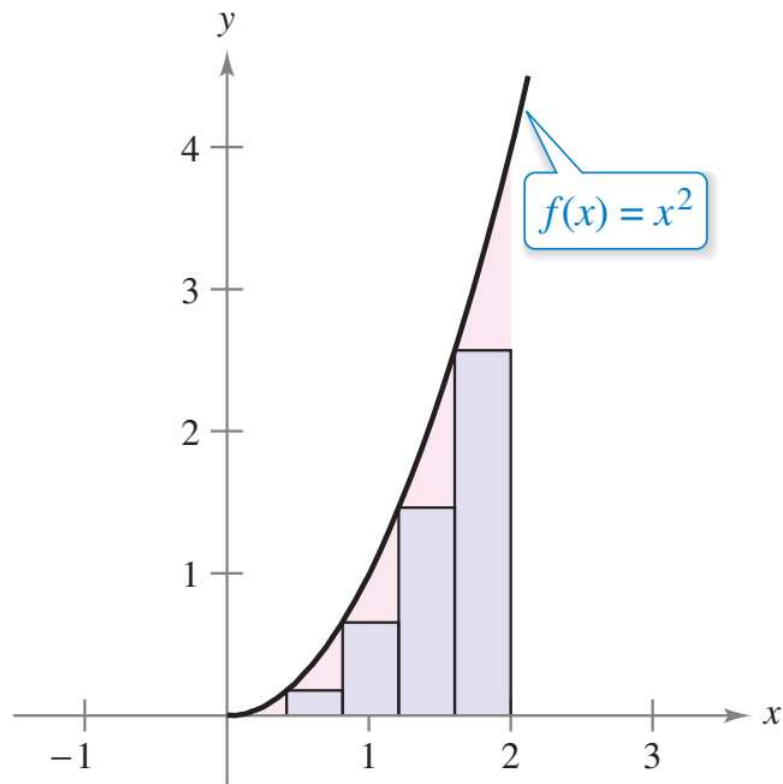
$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$$

ตัวอย่าง จงหาพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชัน

$$f(x) = x^2$$

ในช่วง $x \in [0, 2]$

วิธีทำ



พิจารณาฟังก์ชัน $f(x)$ ใด ๆ (อาจมีค่าเป็นลบ) บนช่วง $[a, b]$ แบ่ง $[a, b]$ ออกเป็น n ช่วง ยาวช่วงละ Δx_i และในแต่ละช่วงพิจารณาค่า $f(c_i)$ ใด ๆ

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

เรียกว่าผลบวกรีมันน์

บทนิยาม ถ้าลิมิตของผลบวกรีมันน์

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \quad \text{ลู่เข้า}$$

ค่าลิมิตจะเขียนแทนด้วย

$$\int_a^b f(x) dx$$

เรียกว่าอินทิกรัลจำกัดเขตของ $f(x)$ บนช่วง $[a, b]$

เรียก a ว่าลิมิตล่างของการอินทิเกรต

เรียก b ว่าลิมิตบนของการอินทิเกรต

Note คำศัพท์

อินทิกรัล = ปริพันธ์

การอินทิเกรต = การหาปริพันธ์

อินทิกรัลไม่จำกัดเขต = ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

อินทิกรัลจำกัดเขต = ปริพันธ์จำกัดเขต

ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และให้ $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ จะได้

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Note $F(x)$ ได้จากอินทิกรัลไม่จำกัดเขต $\int f(x) dx$

โดยให้ค่าคงตัว $C = 0$ ดังนั้น

$$\int_a^b f(x) dx = \left[\int f(x) dx \right]_a^b$$

ตัวอย่าง จงหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\int_1^2 (x^2 - 3) dx$

2. $\int_1^4 3\sqrt{x} dx$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาปริพันธ์จำกัดเขต

1. $\int_0^1 (2t^2 - 1)^2 dt$

2. $\int_1^4 \frac{u-2}{\sqrt{u}} du$

3. $\int_0^\pi \sin x dx$

วิธีทำ

พื้นที่ใต้กราฟเท่ากับอินทิกรัลจำกัดเขต

ถ้า $f(x) \geq 0$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ จะได้ว่าพื้นที่ใต้กราฟในช่วงนี้คือ

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

ตัวอย่าง จงหาพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชัน $y = 5x^2 + 2$
บนช่วง $[0, 2]$ ที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $y = 0$

วิธีทำ