

## การอินทิเกรตทีละส่วน

สำหรับอินทิกรัลที่เกี่ยวข้องกับผลคูณสองฟังก์ชัน

$$\int x \ln x \, dx, \quad \int x^2 e^x \, dx, \quad \int e^x \sin x \, dx$$

หรืออินทิกรัล

$$\int \ln x \, dx, \quad \int \arctan x \, dx$$

วิธีอินทิเกรตก่อนหน้าไม่สามารถช่วยหาอินทิกรัลได้

เทคนิคต่อไปนี้เป็นเทคนิคสำคัญที่เสริมเทคนิคก่อนหน้า และใช้ในกรณีที่เทคนิคอื่น ๆ ทำไม่ได้

ให้  $u, v$  เป็นฟังก์ชันใด ๆ ของ  $x$  และ

$$du = u' dx$$

$$dv = v' dx$$

กฎการอินทิเกรตทีละส่วน

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

หรือ

$$\int uv' \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

ที่มาของสูตร

จากสูตรดิฟเฟอเรนเชียล

$$\frac{d}{dx} [uv] = u'v + uv'$$

ได้

$$\begin{aligned} uv &= \int \frac{d}{dx} [uv] \, dx \\ &= \int (vu' + uv') \, dx \\ &= \int vu' \, dx + \int uv' \, dx \\ \therefore \int uv' \, dx &= uv - \int vu' \, dx \end{aligned}$$

## การใช้กฎการอินทิเกรตทีละส่วน

โดยทั่วไปอินทิกรัลที่จะใช้สูตรนี้จะอยู่ในรูป

$$\int f(x)g(x) dx$$

กำหนด  $u, v$  ขึ้นมาโดยให้

**แบบที่ 1**  $u = f(x)$  และ  $dv = g(x)dx$

**แบบที่ 2**  $u = g(x)$  และ  $dv = f(x)dx$

อย่างใดอย่างหนึ่ง

$dv = g(x)dx$  คือหา  $v$  จาก

$$v = \int g(x) dx$$

$dv = f(x)dx$  คือหา  $v$  จาก

$$v = \int f(x) dx$$

**แบบที่ 1** คือ  $u = f(x)$  = ก่อนแรก

และอินทิเกรตก่อนที่สอง  $v = \int g(x) dx$

แบบที่ 2 คือ  $u = g(x) =$  ก้อนที่สอง

และอินทิเกรตก้อนแรก  $v = \int f(x) dx$

เมื่อเลือกแบบใดแบบหนึ่งในสองแบบดังกล่าวแล้วให้นำไปเข้าสู่สูตรอินทิเกรต

$$\int u dv = uv - \int v du$$

อีกครั้งหนึ่ง

### หลักสำคัญในการเลือก $u, v$

ต้องหา  $v$  โดยการอินทิเกรตได้ง่ายและเมื่อนำไปใช้ในสูตรอินทิเกรตที่ละส่วนแล้วอินทิกรัลที่สองต้องง่ายขึ้น

อินทิกรัลที่ใช้หา  $v$

$$v = \int g(x) dx, \quad v = \int f(x) dx$$

ในแบบที่ 1 และ 2 ตามลำดับไม่ต้องบวกค่าคงตัว  $C$

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int x e^x dx$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int x \ln x \, dx$$

วิธีทำ

**Note** เปรียบเทียบอินทิกรัลในตัวอย่างนี้กับอินทิกรัล

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx$$

ซึ่งใช้การเปลี่ยนตัวแปร

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int x \cos x \, dx$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int x \sin x \, dx$$

วิธีทำ



สำหรับอินทิกรัลที่มีก่อนเดียว

$$\int f(x) dx$$

ที่จะใช้สูตรอินทิเกรตทีละส่วนจะกำหนดให้อีกก่อน

$$g(x) = 1$$

นั่นคือเขียนอินทิกรัลในรูป

$$\int f(x) \cdot 1 dx$$

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int \ln x \, dx$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int \arcsin x \, dx$$

ให้สูตรดิฟ  $\frac{d}{dx} [\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

วิธีทำ

สำหรับอินทิกรัลบางอันอาจจะต้องทำอินทิเกรตทีละส่วนมากกว่าหนึ่งครั้ง เช่น

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

โดยสูตรอินทิเกรตทีละส่วนและต้องหาอินทิกรัลทางขวา

ด้วยสูตรอินทิเกรตทีละส่วน

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2x e^x + \int e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + e^x + C \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int x^2 \cos x \, dx$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int (\ln x)^2 dx$$

วิธีทำ

## แนวทางในการเลือก $u, v$

1.  $\int x^n e^{ax} dx, \int x^n \cos ax dx, \int x^n \sin ax dx$   
จะกำหนดให้

$$u = x^n$$

และให้  $v$  โดยอินทิเกรตอีกก่อนหนึ่ง

2.  $\int x^n \ln x dx, \int x^n \arcsin x dx, \int x^n \arctan x dx$   
จะกำหนดให้

$$u = \ln x, \arcsin x, \arctan x$$

$$v = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

3.  $\int e^{ax} \sin bx dx, \int e^{ax} \cos bx dx$   
จะกำหนดให้

$$u = e^{ax}$$

และให้  $v$  โดยการอินทิเกรตอีกก่อน

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int x e^{9x} dx$$

วิธีทำ



ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int e^x \sin x \, dx$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int (2x + 1) \sin 4x \, dx$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int \sec^3 x \, dx$$

วิธีทำ