เทคนิกการอินทิเกรต

1. จัดรูป
2. เปลี่ยนตัวแปร

$$\int f\big(g(x)\big)A(x)\,dx = \int f(u)\frac{A(x)}{g'(x)}\,du$$

โดย $u = g(x)$

3. อินทิเกรตทีละส่วน ในการอินทิเกรต

$$\int f(x)g(x)\,dx$$

ใช้สูตรอินทิเกรตทีละส่วน

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

เมื่อ

$$u = f(x), v = \int g(x)\,dx$$

$$u = g(x), v = \int f(x)\,dx$$

ตัวอย่าง สำหรับแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาวิธีที่เหมาะสมที่สุดในการหาอินทิกรัล

1. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$
2. $\int \frac{1}{e^{4x}}\,dx$
3. $\int xe^{2x}\,dx$
4. $\int \frac{e^{1/t}}{t^2}\,dt$
5. $\int t\ln(t+1)\,dt$
6. $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$
7. $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$
8. $\int x\sqrt{x-5}\,dx$
9. $\int \frac{2x}{\sqrt{1-6x}}\,dx$

<u>วิธีทำ</u>

การอินทิเกรตโดยแยกเศษส่วนย่อย

สำหรับอินทิกรัล

$$\int \frac{1}{x-2}\,dx$$

แทนตัวแปร $u = x - 2$ ได้

$$\int \frac{1}{x-2}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$$
$$= \ln|x-2| + C$$

แต่หากเป็นอินทิกรัล

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,dx$$

จะเห็นว่าการแทนตัวแปร $u = x - 2$ จะได้

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,dx = \int \frac{1}{u(u-1)}\,du$$

ซึ่งไม่สามารถอินทิเกรตต่อได้ด้วยเทคนิกก่อนหน้า

สำหรับอินทิกรัลนี้สังเกตว่า

$$1 = (x-2) - (x-3)$$

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x-2)-(x-3)}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{x-2}{(x-2)(x-3)} - \frac{x-3}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-3)}dx = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{x-3}dx - \int \frac{1}{x-2}dx$$

$$= \ln|x-3| - \ln|x-2| + C$$

การจัดรูป $\frac{1}{(x-2)(x-3)}$ เป็น $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$ เรียกว่า**การแยกเศษส่วนย่อย** กล่าวคือเดิมเศษส่วนเป็นฟังก์ชันที่ซับซ้อนแต่สามารถแยกให้เป็นเศษส่วนย่อย ๆ ได้

สูตรแยกเศษส่วนย่อย โดยทั่วไปถ้า

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}$$

โดย $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงแตกต่างกันและ $p(x)$ เป็นพหุนามระดับขั้น k

$$p(x) = b_k x^k + \cdots + b_1 x + b_0$$

โดย $k < n$ จะได้ว่า $f(x)$ สามารถแยกเศษส่วนย่อยได้

$$f(x) = \frac{c_1}{x-a_1} + \frac{c_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{c_n}{x-a_n}$$

โดย

$$c_1 = \frac{p(a_1)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)}$$

$$c_2 = \frac{p(a_2)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)}$$

$$\vdots$$

$$c_n = \frac{p(a_n)}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})}$$

สูตรที่น่าสนใจ

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a| + C$$

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int \frac{x+5}{x(x-1)}\,dx$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int \frac{10}{(x-3)(2x-1)}\,dx$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int \frac{12}{(x-1)x(x+2)}\,dx$$

<u>วิธีทำ</u>

ในกรณีฟังก์ชัน $f(x)$ อยู่ในรูปเศษส่วนของพหุนาม

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

โดย $q(x)$ เป็นพหุนามระดับขั้น n จะแยกตัวประกอบพหุนาม $q(x)$

ในกรณีที่แยกตัวประกอบได้

$$q(x) = m(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

โดย $a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นจำนวนจริงแตกต่างกัน จะได้

$$\int f(x)\, dx = \frac{1}{m} \int \frac{p(x)}{(x - a_1) \cdots (x - a_n)} dx$$

ซึ่งสามารถใช้การแยกเศษส่วนย่อยได้

สังเกตว่า $a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นรากของพหุนาม $q(x)$

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int \frac{8}{x^3 - 4x}\,dx$$

วิธีทำ

สูตรหาสัมประสิทธิ์ (II) การหา $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ทำได้อีกวิธีคือเขียนฟังก์ชันในรูปเศษส่วนย่อยที่ต้องการ

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{c_1}{x-a_1} + \frac{c_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{c_n}{x-a_n}$$

ใหม่โดยการคูณ $q(x)$ ทั้งสองข้าง จากนั้นแทนค่า x ด้วยรากของ $q(x)$ หรือจำนวนจริงอื่นที่เหมาะสม

ตัวอย่างเช่น

$$\frac{x}{(x+2)(x-1)} = \frac{c_1}{x+2} + \frac{c_2}{x-1}$$

คูณทั้งสองข้างด้วย $(x+2)(x-1)$ ได้

$$x = c_1(x-1) + c_2(x+2) \tag{1}$$

รากของ $q(x) = (x+2)(x-1)$ คือ -2 และ 1

แทน x ด้วย -2 ในสมการ (1) ได้

$$\begin{aligned} -2 &= c_1(-2-1) + c_2(-2+2) \\ &= c_1(-3) + c_2(0) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad c_1 = \frac{2}{3}$$

แทน x ด้วย 1 ในสมการ (1) ได้

$$\begin{aligned} 1 &= c_1(1-1) + c_2(1+2) \\ &= c_1(0) + c_2(3) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad c_2 = \frac{1}{3}$$

ดังนั้น

$$\frac{x}{(x+2)(x-1)} = \frac{2/3}{x+2} + \frac{1/3}{x-1}$$

สูตรที่น่าสนใจ

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int \frac{3-x}{3x^2-2x-1}\,dx$$

วิธีทำ

รากซ้ำ ถ้าฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

โดย $q(x)$ มีรากบางตัวซ้ำ เช่น

$$\begin{aligned} q(x) &= x^2(x-1)^3 \\ &= (x)(x)(x-1)(x-1)(x-1) \end{aligned}$$

มี $a_1 = a_2 = 0, a_3 = a_4 = a_5 = 1$

พจน์ที่เป็นรากซ้ำจะทำให้เกิดเศษส่วนย่อยในรูป

$$\frac{d_1}{x-a} + \frac{d_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{d_r}{(x-a)^r}$$

เช่นสำหรับ $q(x) = (x+2)(x-1)^3$ จะได้

$$f(x) = \frac{c}{x+2} + \frac{e_1}{x-1} + \frac{e_2}{(x-1)^2} + \frac{e_3}{(x-1)^3}$$

การคำนวณค่าคงตัว c, e_1, e_2, e_3 สามารถใช้วิธีที่สองคือจัดรูปเศษส่วนย่อยด้วยการคูณ $q(x)$ แล้วแทนค่า x ด้วยรากของ $q(x)$ และค่าอื่น ๆ ที่เหมาะสม

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x(x+1)^2} dx$$

วิธีทำ