

สูตรอินทิกรัล ให้ $k > 0$

$$\int \frac{1}{x^2 + k^2} dx = \frac{1}{k} \arctan\left(\frac{x}{k}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{(ax + b)^2 + k^2} dx = \frac{1}{ak} \arctan\left(\frac{ax + b}{k}\right) + C$$

ที่มาสูตร สูตรแรกได้จากสูตรที่สอง พิจารณาสูตรที่สอง

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{ak} \arctan\left(\frac{ax + b}{k}\right) \right] &= \frac{1}{ak} \frac{d}{dx} [\arctan u] \\ &= \frac{1}{ak} \frac{1}{1 + u^2} u' \end{aligned}$$

โดย $u = (ax + b)/k$ ดังนั้น $u' = a/k$ และจะได้

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{ak} \arctan\left(\frac{ax + b}{k}\right) \right] &= \frac{1}{ak} \frac{1}{1 + \frac{(ax + b)^2}{k^2}} \frac{a}{k} \\ &= \frac{1}{(ax + b)^2 + k^2} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

1. $\int \frac{1}{x^2+4} dx$

2. $\int \frac{1}{x^2+5} dx$

3. $\int \frac{1}{(2x+1)^2+9} dx$

4. $\int \frac{1}{x^2-4x+5} dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int \frac{x + 2}{x^2 + 1} dx$$

วิธีทำ

เศษส่วนย่อยที่มีพจน์กำลังสอง

สำหรับอินทิกรัล

$$\int \frac{2}{(x-1)(x^2+1)} dx$$

พจน์กำลังสอง $x^2 + 1$ แยกตัวประกอบไม่ได้ พจน์ที่แยกไม่ได้อีกนี้เรียกว่าพจน์กำลังสอง

สูตรแยกเศษส่วนย่อยคือ

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{c_1}{x-1} + \frac{ax+b}{x^2+1}$$

และหา c_1, a, b ได้โดยวิธีที่สองคือจัดรูปให้ส่วนหายไป

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int \frac{5}{(x-1)(x^2+4)} dx$$

วิธีทำ

โดยทั่วไปพจน์กำลังสองลดทอนไม่ได้อยู่ในรูป

$$x^2 + k^2, \quad (ax + b)^2 + k^2$$

โดย $k > 0$

ในกรณีนี้เทอมในเศษส่วนย่อยที่ได้จากพจน์นี้คือ

$$\frac{cx + d}{x^2 + k^2}, \quad \frac{cx + d}{(ax + b)^2 + k^2}$$

ตามลำดับ

ถ้าพจน์กำลังสองลดทอนไม่ได้เกิดซ้ำ เช่น

$$(x^2 + k^2)^2$$

จะได้เศษส่วนย่อยจากพจน์นี้คือ

$$\frac{c_1x + d_1}{x^2 + k^2} + \frac{c_2x + d_2}{(x^2 + k^2)^2}$$

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int \frac{x + 1}{x(x^2 + 1)} dx$$

วิธีทำ