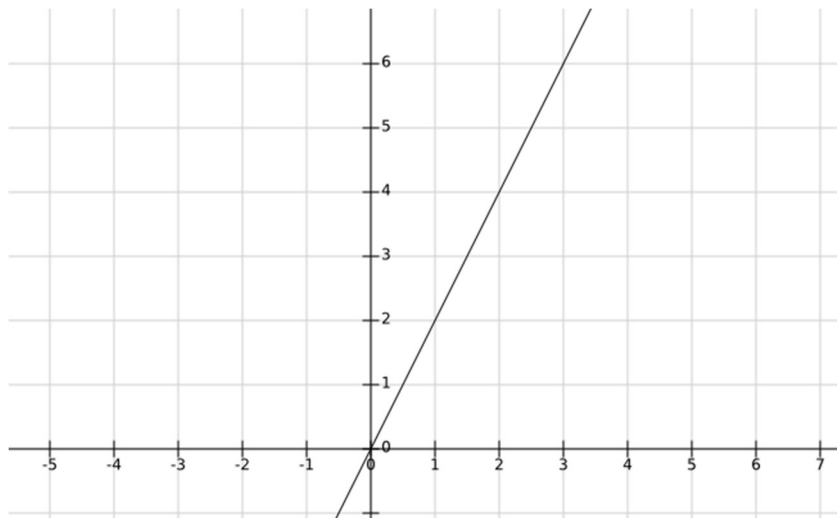


ความยาวเส้นโค้งจากกราฟ

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $f(x) = 2x$ ในช่วง $[0,3]$ ได้ว่ากราฟมีความยาว

$$\sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

โดยสูตรของปีธากอรัส



หากคำนวณอินทิกรัล

$$\int_0^3 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

จะได้

$$\int_0^3 \sqrt{1 + 2^2} dx = 3\sqrt{5}$$

ซึ่งได้ค่าเท่ากับความยาวที่ต้องการ

โดยทั่วไปจะได้ผลลัพธ์ต่อไปนี้

ความยาวเส้นโค้ง

กราฟ $y = f(x)$ ในช่วง $[a, b]$ เท่ากับ

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

กราฟ $x = f(y)$ ในช่วง $[a, b]$ เท่ากับ

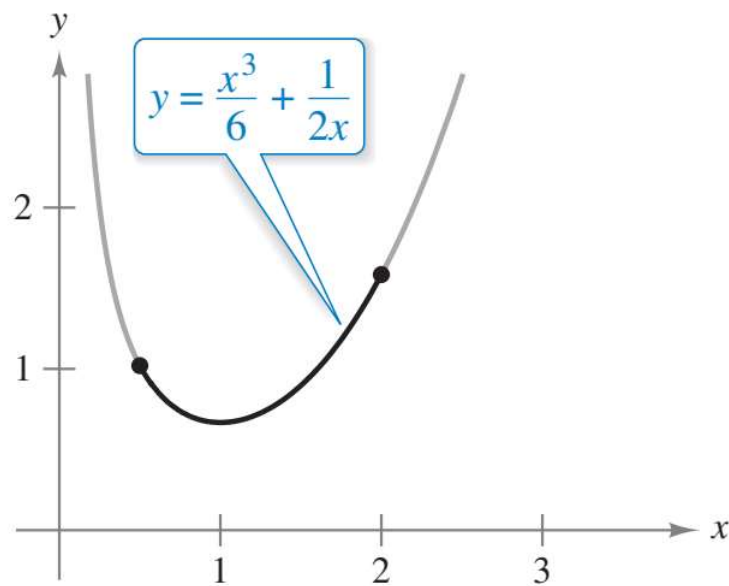
$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(y)]^2} dy$$

ตัวอย่าง จงหาความยาวเส้นโค้งจากกราฟ

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$$

ในช่วง $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

วิธีทำ



ตัวอย่าง จงหาความยาวเส้นโค้งจากกราฟ

$$x = (y - 1)^{3/2}$$

ในช่วง $\left[1, \frac{7}{3}\right]$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาความยาวเส้นโค้งจากกราฟ

$$y = \ln \cos x$$

ในช่วง $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

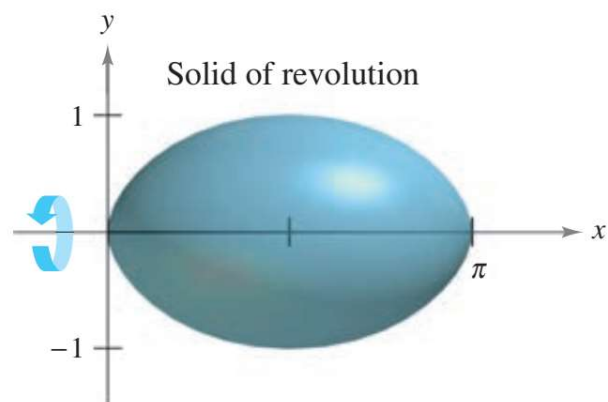
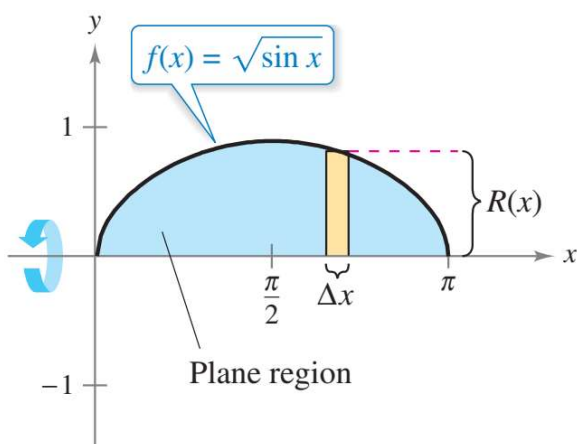
วิธีทำ

ปริมาตรของรูปทรงตันจากการหมุน

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงปริมาตรของรูปทรงตันที่ได้จากการหมุนบริเวณในระนาบรอบแกนหมุนดังต่อไปนี้

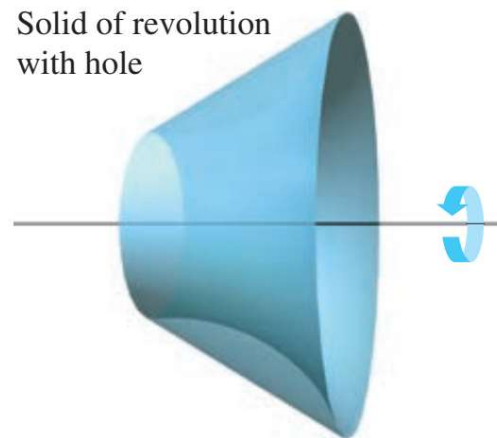
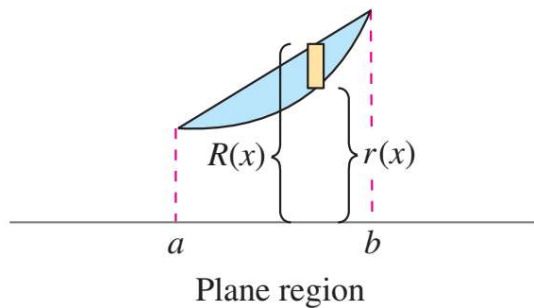
1. แกน x
2. แกน y
3. เส้นตรง $y = c$
4. เส้นตรง $x = c$

รูปทรงตันไม่กลวง



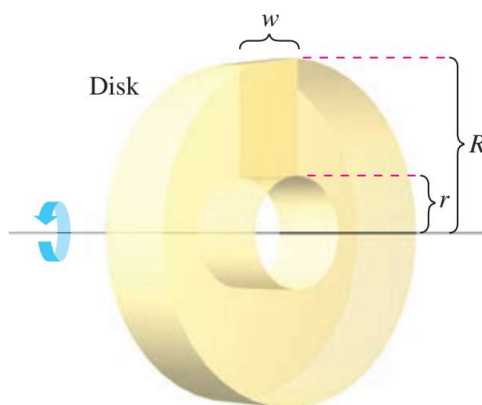
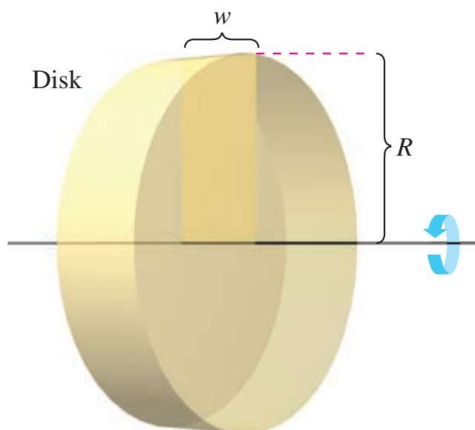
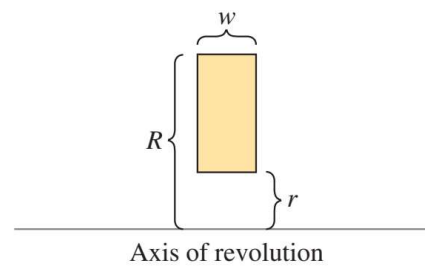
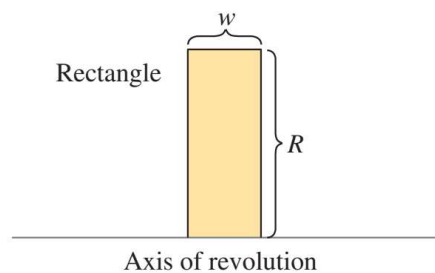
เกิดขึ้นเมื่อแกนหมุนเป็นขอบหนึ่งของบริเวณที่จะหมุน

รูปทรงตันกลวง



เกิดขึ้นเมื่อแกนหมุนไม่ได้เป็นเส้นขอบของบริเวณในระนาบที่จะหมุน

แนวคิดพื้นฐาน



กรณีไม่กลวงได้ปริมาตร

$$V = \pi R^2 w$$

กรณีกลวงได้ปริมาตร

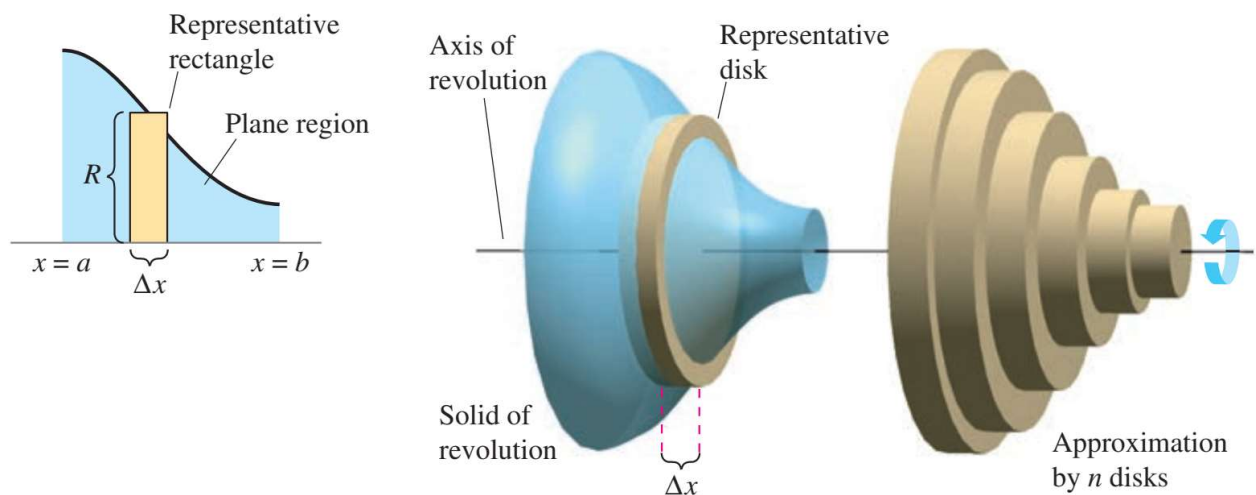
$$V = \pi(R^2 - r^2)w$$

โดย R คือรัศมีนอกวัดตั้งฉากกับแกนหมุน

r คือรัศมีในวัดตั้งฉากกับแกนหมุน

w คือความหนาวัดตามแกนหมุน

วิธีแบบจาน (รอบแกน x)



งานย่อยจากการหมุนมีปริมาตร $V_i = \pi[R(x_i)]^2 \Delta x$

รวมทุกแผ่นได้ค่าประมาณ

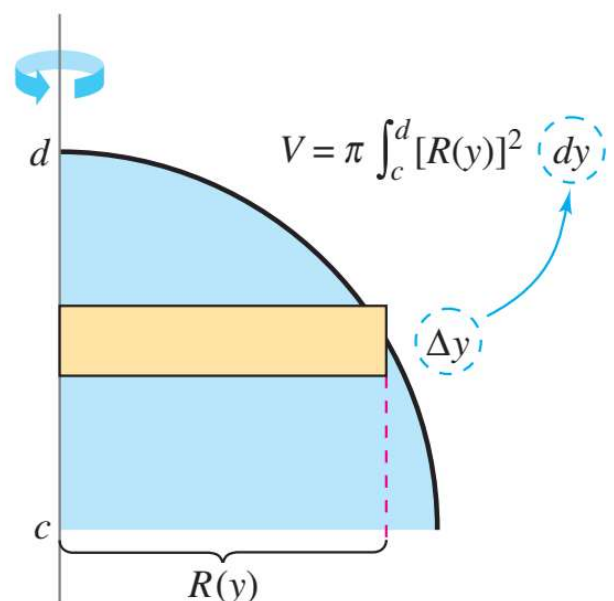
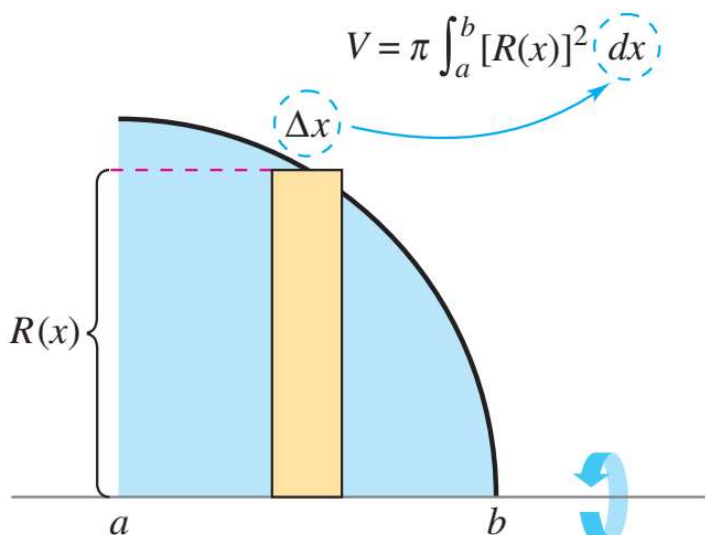
$$V \approx \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n \pi[R(x_i)]^2 \Delta x$$

หากแบ่งละเอียดขึ้น $\Delta x \rightarrow 0$ จะได้ผลลัพธ์ต่อไปนี้

ปริมาตรโดยวิธีแบบจาน (หมุนรอบแกน x)

$$V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 dx$$

ถ้าเส้นโค้งคือกราฟ $y = f(x)$ จะได้ $R(x) = f(x)$



ปริมาตรโดยวิธีแบบจาน (หมุนรอบแกน y)

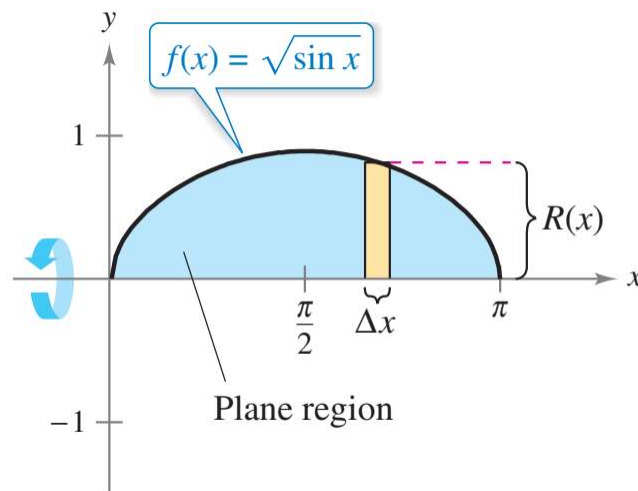
$$V = \pi \int_a^b [R(y)]^2 dy$$

ถ้าเส้นโค้งคือกราฟ $x = f(y)$ จะได้ $R(y) = f(y)$

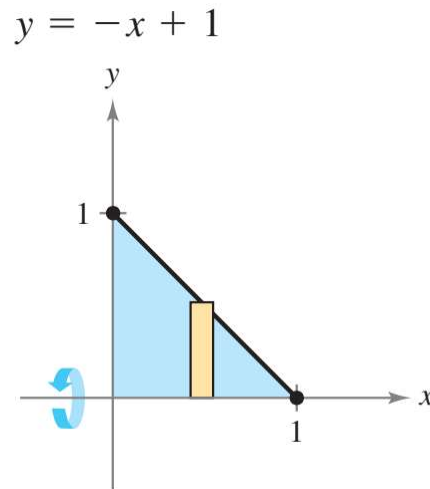
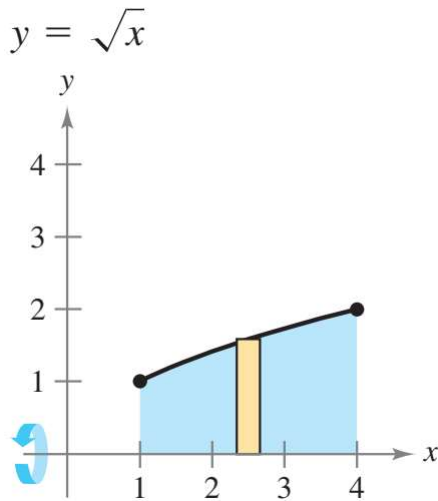
ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงตันจากการหมุนบริเวณ

ใต้กราฟ $y = \sqrt{\sin x}$ เมื่อ $0 \leq x \leq \pi$ รอบแกน x

วิธีทำ



ตัวอย่าง จากรูปจงหาปริมาตรของทรงตันจากการหมุน
บริเวณปิดล้อมด้วยกราฟดังรูป

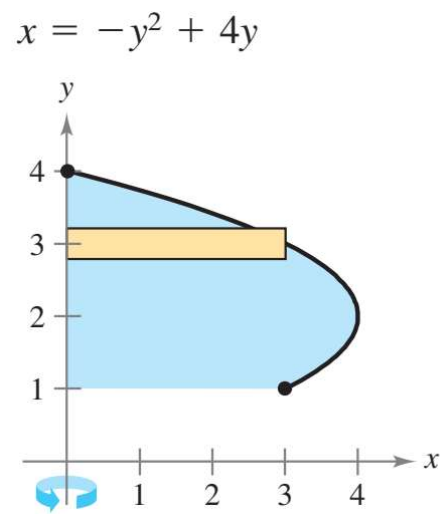
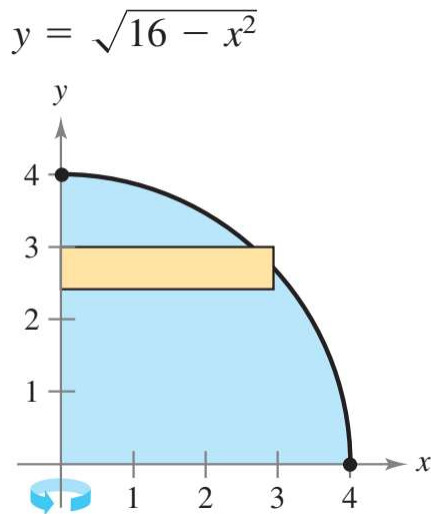


วิธีทำ

$$V_1 = \pi \int_1^4 [\sqrt{x}]^2 dx$$

$$V_2 = \pi \int_0^1 [-x + 1]^2 dx$$

ตัวอย่าง จากรูปจงหาปริมาตรของทรงตันจากการหมุน
บริเวณปิดล้อมด้วยกราฟดังรูป



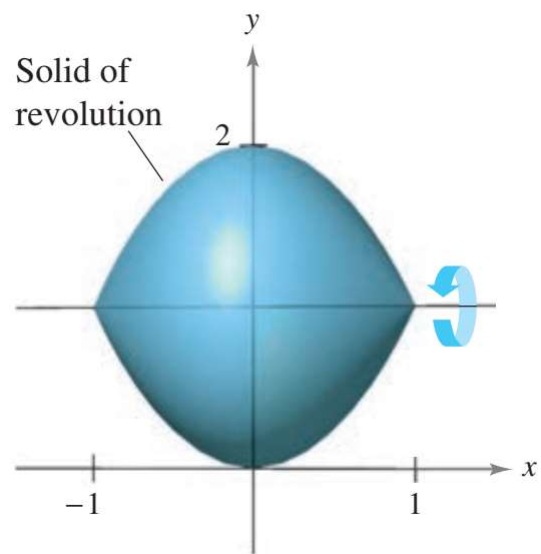
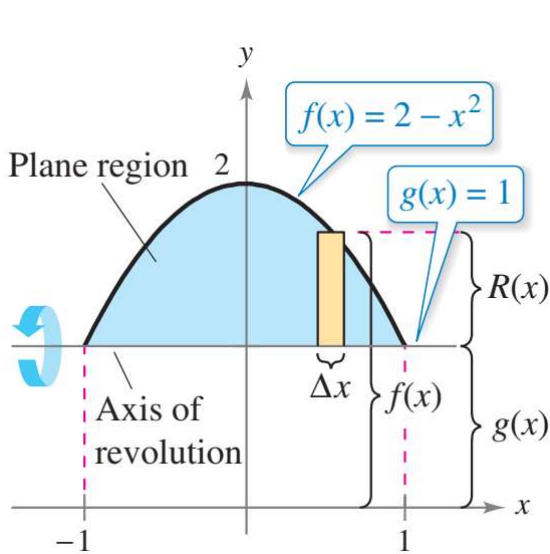
วิธีทำ

$$V_1 = \pi \int_0^4 \left[\sqrt{16 - y^2} \right]^2 dy$$

$$V_2 = \pi \int_1^4 \left[-y^2 + 4y \right]^2 dy$$

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงตันที่ได้จากการหมุน
 บริเวณปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 2 - x^2$ เส้นตรง $y = 1$
 รอบแกนหมุนคือ $y = 1$

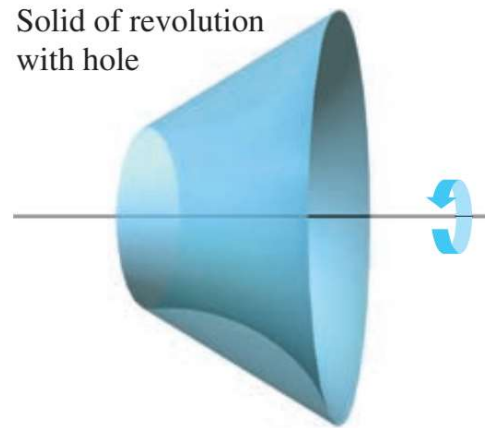
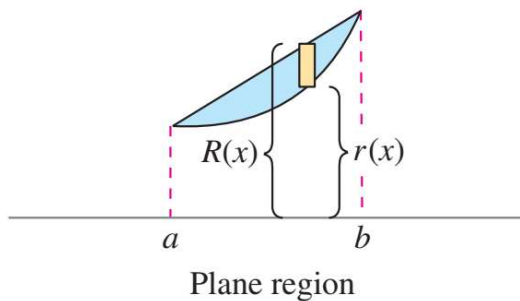
วิธีทำ



ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงตันที่ได้จากการหมุน
บริเวณปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 2x^2$ เส้นตรง $y = 0$
เส้นตรง $x = 2$ รอบแกนหมุนคือ $x = 2$

วิธีทำ

วิธีแบบจานกลวง (รอบแกน x)



ปริมาตรจานกลวง (แกน x)

$$V = \pi \int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2) dx$$

โดย $R(x)$ คือรัศมีวงนอกวัดตั้งฉากกับแกน x

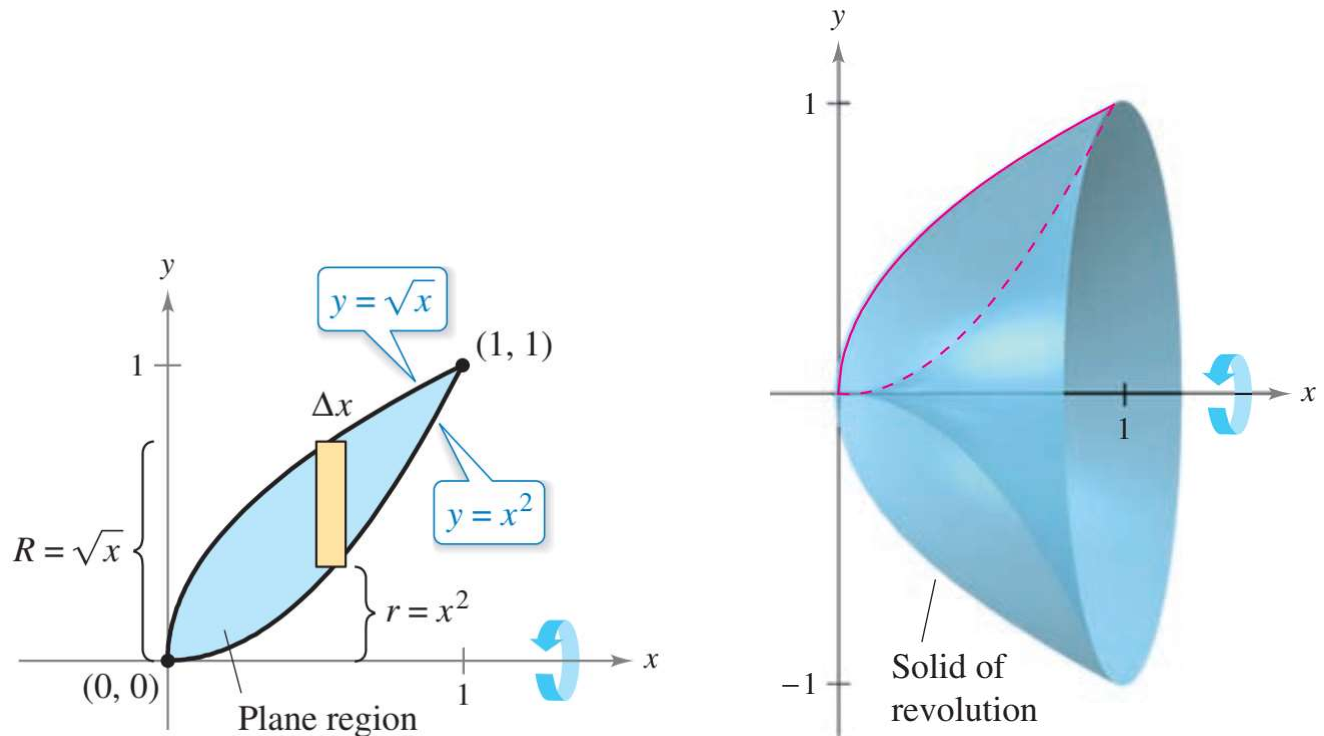
$r(x)$ คือรัศมีวงในวัดตั้งฉากกับแกน x

ถ้าบริเวณล้อมด้วยกราฟ $y = f(x)$, $y = g(x)$

$$V = \pi \int_a^b (\text{บน}^2 - \text{ล่าง}^2) dx$$

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงตันจากการหมุนบริเวณ
ปิดล้อมด้วย $y = \sqrt{x}$ และ $y = x^2$ โดยหมุนรอบแกน x

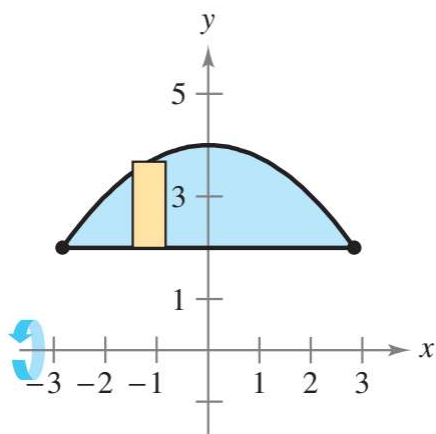
วิธีทำ



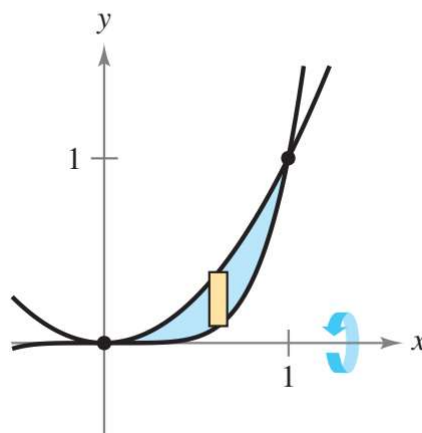
ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงตันจากการหมุนบริเวณ

ดังรูป

$$y = 2, \quad y = 4 - \frac{x^2}{4}$$



$$y = x^2, \quad y = x^5$$



วิธีทำ

ปริมาตรจานกลวง (แกน y)

$$V = \pi \int_a^b ([R(y)]^2 - [r(y)]^2) dy$$

โดย $R(y)$ คือรัศมีวงนอกวัดตั้งฉากกับแกน y

$r(y)$ คือรัศมีวงในวัดตั้งฉากกับแกน y

ถ้าบริเวณล้อมด้วยกราฟ $x = f(y)$, $x = g(y)$

$$V = \pi \int_a^b (\text{ขวา}^2 - \text{ซ้าย}^2) dy$$

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงตันจากการหมุนบริเวณ
ปิดล้อมด้วยกราฟ $y = x^2$ เส้นตรง $x = 1$ และ $y = 4$
โดยหมุนรอบแกน y

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงตันจากการหมุนบริเวณ

ปิดล้อมด้วย

$$y = x^2 + 1, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$$

โดยหมุนรอบแกน y

วิธีทำ

