อินทิกรัลไม่ตรงแบบ

พิจารณาอินทิกรัลสองอันต่อไปนี้

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx, \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

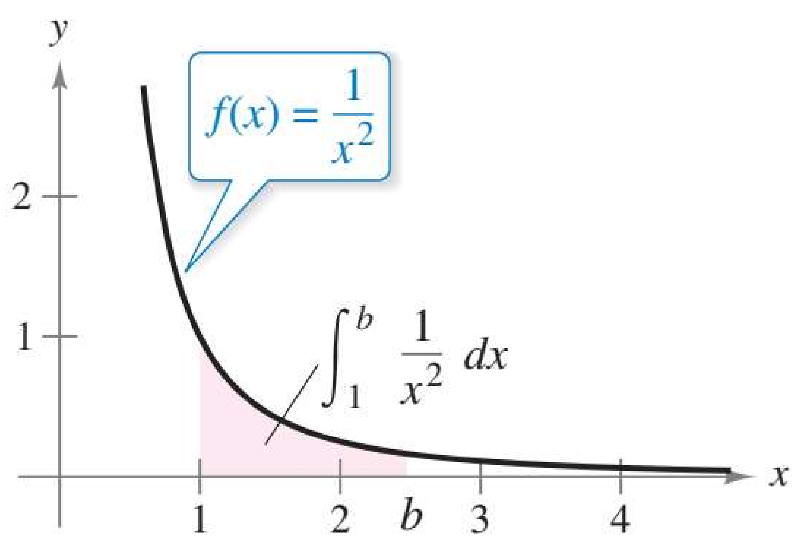
อินทิกรัลแรกทำบนช่วงจำกัด $[1, b]$

อินทิกรัลสองทำบนช่วงอนันต์ $[1, \infty)$

ทั้งสองอินทิกรัลมีฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตเดียวกันคือ

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[1, b]$ และ $[1, \infty)$



เนื่องจาก $f(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0$ ดังนั้นอินทิกรัลทั้งสองคือพื้นที่ใต้กราฟ

โดยการคำนวณจะได้อินทิกรัลแรก

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \left[\int \frac{1}{x^2}\,dx\right]_1^b$$
$$= \left(-\frac{1}{x}\right)_1^b$$
$$= 1 - \frac{1}{b}$$

อินทิกรัลที่สองคือพื้นที่ใต้กราฟเมื่อให้ลิมิต $b \to \infty$ ของอินทิกรัลแรก ดังนั้นคำนวณจะได้

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left(1 - \frac{1}{b}\right)$$
$$= 1$$

อินทิกรัลที่สองดังกล่าวเรียกว่า**อินทิกรัลไม่ตรงแบบ**

อินทิกรัลไม่ตรงแบบบนช่วงอนันต์

1. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,\infty)$ ให้

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

2. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty,b]$ ให้

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

3. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty,\infty)$ ให้

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx$$

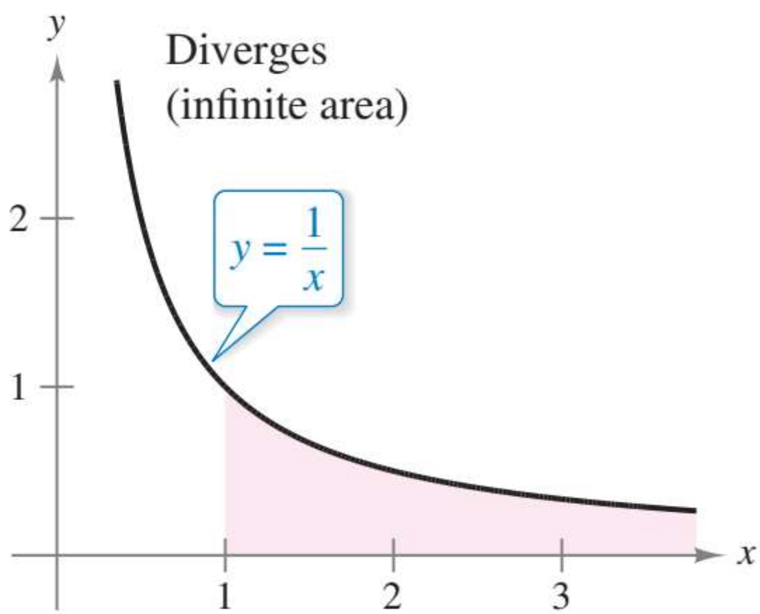
ข้อ 1 และ ข้อ 2 อินทิกรัลไม่ตรงแบบ**ลู่เข้า**เมื่อลิมิตลู่เข้า หากลิมิตลู่ออกอินทิกรัลไม่ตรงแบบ**ลู่ออก**ด้วย

ข้อ 3 อินทิกรัลไม่ตรงแบบ**ลู่เข้า**เมื่ออินทิกรัลทางขวาทั้งสองลู่เข้า หากอันใดอันหนึ่งทางขวาลู่ออกจะกล่าวว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ**ลู่ออก**

ตัวอย่าง จงพิจารณาการลู่เข้าของอินทิกรัล

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

<u>วิธีทำ</u>



ตัวอย่าง จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int_{3}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^4} dx$
2. $\int_{-\infty}^{0} e^{3x} dx$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int_4^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$
2. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$

<u>วิธีทำ</u>

อินทิกรัลไม่ตรงแบบอีกชนิดหนึ่งมีตัวอย่างคือ

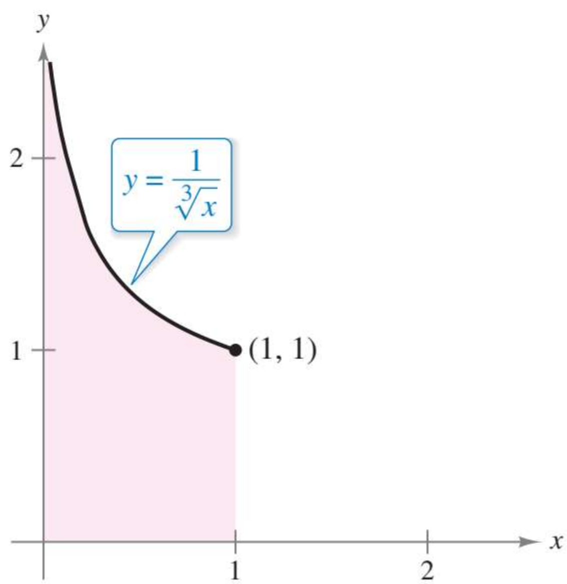
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

ช่วงของการอินทิเกรตคือ [0,1]

ฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตคือ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

จากกราฟจะเห็นได้ว่า $f(x)$ ลู่ไปสู่อนันต์เมื่อ $x \to 0$



Infinite discontinuity at $x = 0$

อินทิกรัลลักษณะดังกล่าวเรียกว่า**อินทิกรัลไม่ตรงแบบ**

อินทิกรัลไม่ตรงแบบลิมิต $\boldsymbol{f(x)}$ เป็นอนันต์

1. ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b)$ และ $f(x)$ ลู่ไปสู่ $\pm\infty$ เมื่อ $x \to b^-$ ให้

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

2. ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องบนช่วง $(a,b]$ และ $f(x)$ ลู่ไปสู่ $\pm\infty$ เมื่อ $x \to a^+$ ให้

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

3. ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องบนช่วง $[a,c),(c,b]$ โดย $f(x)$ ลู่ไปสู่ $\pm\infty$ เมื่อ $x \to c^-, x \to c^+$ ให้

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ข้อ 1 และ 2 อินทิกรัลไม่ตรงแบบลู่เข้าก็ต่อเมื่อลิมิตลู่เข้า

ข้อ 3 อินทิกรัลไม่ตรงแบบลู่เข้าก็ต่อเมื่ออินทิกรัลทางขวาทั้งสองลู่เข้า

ตัวอย่าง จงพิจารณาการลู่เข้าของอินทิกรัลต่อไปนี้

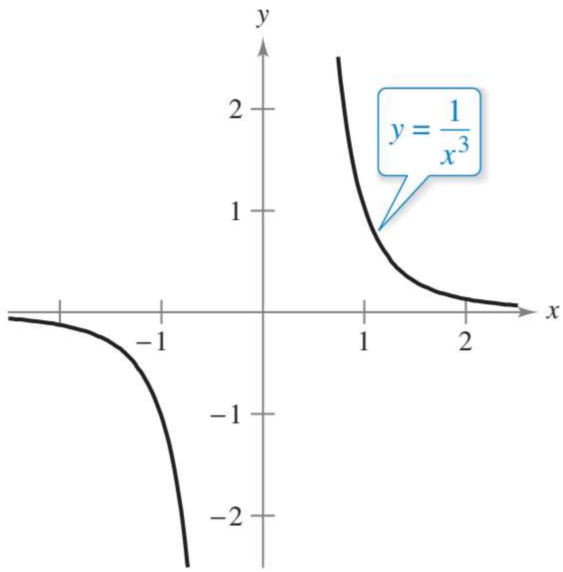
$$\int_0^2 \frac{1}{x^3}\,dx$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^3}\,dx$$

<u>วิธีทำ</u>



ผิด!!!!!!!!!!!!!

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^3}\,dx = \left[\int \frac{1}{x^3}\,dx\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{8}$$

เหตุผล สูตรคำนวณข้างบนใช้ได้เมื่อ $f(x)$ ต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ เท่านั้น

ตัวอย่าง จงหาอินทิกรัล

1. $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$
2. $\int_3^4 \frac{1}{(x-3)^{3/2}}\,dx$

<u>วิธีทำ</u>