สมการเชิงอนุพันธ์

บทประยุกต์ที่สำคัญของแคลคูลัสในชีวิตประจำวัน คือช่วยแก้สมการเชิงอนุพันธ์

สมการเชิงอย่างง่ายที่สุดได้แก่สมการ

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

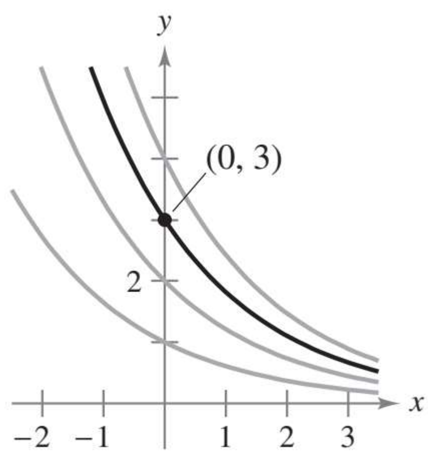
โดย $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดให้ ในที่นี้**การแก้สมการ**หมายถึงหาฟังก์ชัน $y(x)$ ทั้งหมดที่เมื่อแทนลงไปแล้วทำให้สมการเป็นจริง

ฟังก์ชัน $y(x)$ ที่สอดคล้องสมการเรียกว่า**ผลเฉลย**ของสมการ จากความรู้อินทิกรัลได้ว่าผลเฉลยของสมการข้างบนคือ

$$y(x) = \int f(x)\,dx$$

เนื่องจากอินทิกรัลทางขวามือเป็นแบบไม่จำกัดเขตดังนั้น y ที่ได้จะมีค่าคงตัว C จากการอินทิเกรต เรียกผลเฉลยที่ติดค่าคงตัวว่า**ผลเฉลยทั่วไป**

ในวิชานี้จะศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีตัวแปรคือ x และฟังก์ชันที่จะแก้สมการคือ $y(x)$ ในปัญหาที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวัน y แทนปริมาณบางอย่างและ $\frac{dy}{dx}$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y



สมการที่จะศึกษาในวิชานี้เป็นสมการในรูปอัตราการเปลี่ยนแปลง $\frac{dy}{dx}$ สัมพันธ์กับ y และ x ที่เขียนได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y' = 4e^{2x} - \frac{3}{x+1}$$

ที่สอดคล้อง $y(0) = 5$

<u>วิธีทำ</u>

สมการแยกตัวแปร

ในปัญหาประชากรศาสตร์ให้ y คือความหนาแน่นของประชากร ถ้าสมมติอัตราการเปลี่ยนแปลง y' แปรผันตรงกับ y จะได้สมการ

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

โดย k เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน

ในปฏิกิริยาเคมีจะได้สมการ

$$\frac{dy}{dx} = ky^2$$

โดย k เป็นค่าคงตัว

ในการหาเส้นโค้ง $y = f(x)$ ซึ่งมีความชันที่แต่ละจุด (x, y) เท่ากับ $\frac{y}{x^2}$ จะได้สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2}$$

ทั้งสามตัวอย่างข้างบนเป็น**สมการแยกตัวแปร**

สมการแยกตัวแปร

ให้ $M(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x และ $N(y)$ เป็นฟังก์ชันของ y

สมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x)}{N(y)}$$

จัดรูปในรูปค่าเชิงอนุพันธ์ (Differential)

$$N(y)dy = M(x)dx$$

เรียกว่า**สมการแยกตัวแปร**

ตัวอย่าง

$$\frac{dy}{dx} = ky \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}dy = kdx$$

$$\frac{dy}{dx} = ky^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y^2}dy = kdx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}dy = \frac{1}{x^2}dx$$

การแก้สมการแยกตัวแปร

$$N(y)dy = M(x)dx$$

แก้สมการได้โดยใส่อินทิกรัล

$$\int N(y)\,dy = \int M(x)\,dx$$

หากจัดรูปหลังอินทิเกรตได้ y ในรูปฟังก์ชันของ x จะได้ผลเฉลยแบบชัดแจ้ง (explicit solution)

หากจัดรูปไม่ได้จะได้ผลเฉลยเป็นฟังก์ชันนิยามโดยปริยาย (implict solution)

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{3y+2}$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(x^2+4)\frac{dy}{dx}=xy$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$xydx + e^{-x^2}(y^2 - 1)dy = 0$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$x\,dy - y\ln x\,dx = 0$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$dy = \frac{\sin 9x}{y^2} dx$$

<u>วิธีทำ</u>

สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

ให้ฟังก์ชัน $P(x), Q(x)$ สมการเชิงอนุพันธ์ในรูป

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

เรียกว่า**สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง**

ผลเฉลยของสมการเชิงเส้น

ให้

$$u(x) = e^{\int P(x)dx}$$

(อินทิกรัลนี้ไม่มี C) จะได้ผลเฉลยของสมการเชิงเส้นคือ

$$y = \frac{1}{u(x)}\left[\int Q(x)u(x)\,dx\right]$$

(อินทิกรัลนี้มี C อยู่ภายในวงเล็บ)

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y' + y = e^{x}$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y' - 8x^3y = e^{2x^4}$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y' - \left(\frac{3}{x}\right)y = 2x^3$$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(3y+5)\cos x\, dx = dy$$

<u>วิธีทำ</u>