พีชคณิตเชิงเส้น ๑ Linear Algebra I

ระบบเชิงเส้น การแปลงเชิงเส้นและพีชคณิตเมทริกซ์
ค่าลักษณะเฉพาะ เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ และ การแปลงเป็นทแยงมุม
เรขาคณิตเชิงเส้นและฐานหลักเชิงตั้งฉาก
แนวคิดเชิงนามธรรมของพีชคณิตเชิงเส้น

ยศนันต์ มีมาก

เรียบเรียงเพื่อใช้ประกอบรายวิชา 2301234 Linear Algebra I
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พิมพ์ครั้งแรก มกราคม ๒๕๕๕ ปรับปรุง สิงหาคม ๒๕๕๘

สามารถดาวน์โหลดได้ที่
http://pioneer.netserv.chula.ac.th/~myotsana/

ข้อคิดเห็นหรือข้อเสนอแนะต่างๆ โปรดส่งมาได้ที่
yzm101@yahoo.com

คำนำ

ตำรา 2301234 พีชคณิตเชิงเส้น 1 (Linear Algebra I) ได้เรียบเรียงขึ้นเพื่อต่อยอดหัวข้อทางเมทริกซ์ที่นักเรียนได้ศึกษามาบ้างแล้ว ตลอดจนให้นิสิต นักศึกษา และ ผู้สนใจทั่วไปใช้อ่านประกอบเพื่อเป็นพื้นฐานและนำไปสู่มโนภาพเบื้องต้นก่อนหรือระหว่างการศึกษาวิชาพีชคณิตเชิงเส้น ทั้งนี้ผู้เขียนได้พยายามเรียบเรียงเนื้อหาให้ต่อเนื่องและเรียงร้อยกันโดยใช้เมทริกซ์เป็นแกนกลาง ไม่ใช้ภาษาที่ซับซ้อนหรือภาษาคณิตศาสตร์ขั้นสูงจนเกินไปและละบทพิสูจน์สำหรับทฤษฎีบทที่ยากแต่แสดงให้เห็นการนำไปใช้ด้วยการยกตัวอย่างแทน และมีภาพประกอบการยกตัวอย่างในสองมิติและสามมิติ เพื่อให้ผู้อ่านเข้าใจได้ดียิ่งขึ้น

ผู้เขียนเห็นว่าการศึกษาวิชาพีชคณิตเชิงเส้นให้ได้ผลดีนั้น ผู้เรียนควรเริ่มจากเข้าใจเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับเมทริกซ์และเวกเตอร์แนวตั้งอย่างครบถ้วน เพื่อจะสามารถนำไปเป็นพื้นฐานสำหรับหัวข้อเชิงนามธรรมของพีชคณิตเชิงเส้น อาทิ ปริภูมิเวกเตอร์ การแปลงเชิงเส้น และปริภูมิผลคูณภายใน ซึ่งหัวข้อเหล่านี้สามารถแปลงปัญหากลับมาในรูปแบบของเมทริกซ์ได้ทั้งสิ้น ผู้เขียนจึงได้แบ่งเนื้อหาออกเป็น 5 บท ดังนี้

- **บทที่ 1 ระบบเชิงเส้น** มีเนื้อหาที่สำคัญคือการใช้การดำเนินการแถวขั้นมูลฐานลดรูปเมทริกซ์จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดและขั้นบันไดลดรูป การตรวจสอบว่ามีและหาผลเฉลยทั่วไปของระบบเชิงเส้นซึ่งเนื้อหาในส่วนแรกนี้จะถูกนำไปใช้ในหัวข้อต่างๆ อย่างมากมาย ต่อมาในบทนี้จะกล่าวถึงคำศัพท์พื้นฐานของวิชาพีชคณิตเชิงเส้นอีก 2 คำคือ แผ่ทั่ว และ อิสระเชิงเส้น

- **บทที่ 2 การแปลงเชิงเส้นและพีชคณิตเมทริกซ์** เริ่มจากนิยามของการส่งเวกเตอร์จากปริภูมิหนึ่งไปยังอีกปริภูมิหนึ่งโดยใช้การคูณด้วยเมทริกซ์ ซึ่งเรียกว่า "เมทริกซ์มาตรฐาน" โดยบทนี้มีเนื้อหาที่สำคัญคือปริภูมิย่อยและการหาฐานหลักและบอกมิติของปริภูมิย่อยที่กำหนดให้ ต่อด้วยการมีอยู่และการหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์จัตุรัสและรวบรวมความรู้ต่างๆ ที่เรียนมาแล้วไว้ใน "ทฤษฎีบทเมทริกซ์หาตัวผกผันได้ (ทฤษฎีบท 2.3.6)" โดยปิดท้ายบทนี้ด้วยนิยามและสมบัติต่างๆ ของดีเทอร์มิแนนต์

- **บทที่ 3 ค่าลักษณะเฉพาะ เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ และการแปลงเป็นทแยงมุม** มีเนื้อหาที่สำคัญคือการเปลี่ยนฐานหลัก เมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น การหาเมทริกซ์ทแยงมุมที่คล้ายกับเมทริกซ์จัตุรัสที่กำหนดให้โดยใช้ค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ และนำไปประยุกต์หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์บางรูปแบบ

- **บทที่ 4 เรขาคณิตเชิงเส้นและฐานหลักเชิงตั้งฉาก** กล่าวถึงผลคูณจุดของเวกเตอร์ ซึ่งนำไปสู่การศึกษาเวกเตอร์เชิงเรขาคณิต เช่น ความยาว เวกเตอร์หนึ่งหน่วย การตั้งฉากกันของสองเวกเตอร์ การสร้างฐานหลักเชิง

ตั้งฉากโดยใช้กระบวนการกราม-ชมิดต์ รวมถึงการประยุกต์กับปัญหากำลังสองน้อยสุด การแปลงเมทริกซ์สมมาตรเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมเชิงตั้งฉาก และรูปแบบกำลังสอง

- **บทที่ 5 แนวคิดเชิงนามธรรมของพีชคณิตเชิงเส้น** ผู้เขียนได้รวบรวมหัวข้อเชิงนามธรรมของพีชคณิตเชิงเส้นที่สำคัญ กล่าวคือ ปริภูมิเวกเตอร์ การแปลงเชิงเส้น และปริภูมิผลคูณภายใน โดยอธิบายนิยามพร้อมยกตัวอย่างประกอบ อาศัยสิ่งที่ได้ศึกษามาแล้วในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายและมหาวิทยาลัยปีที่ 1 และละการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่างๆ เพื่อให้เนื้อหาของบทนี้ไม่หนักจนเกินไป และมีแบบฝึกหัด (ที่เรียกว่า “ลองทำ”) ซึ่งคล้ายตัวอย่างในการบรรยายกระจายอยู่ทั่วหัวข้อย่อยนั้น ๆ (ทั้งนี้หากนิสิตต้องการเนื้อหาเชิงพิสูจน์ซึ่งลึกซึ้งขึ้น นิสิตสามารถศึกษาได้จากรายวิชา 2301336 พีชคณิตเชิงเส้น 2 ในอนาคต)

ซึ่งในแต่ละบทมีแบบฝึกหัดซึ่งแยกตามหัวข้อย่อยต่างๆ โดยคำตอบแบบฝึกหัด (เฉพาะข้อคำนวณ) จะถูกรวบรวมไว้ท้ายบทนั้นๆ ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะมีประโยชน์ทั้งกับนักเรียน นิสิต นักศึกษา ตลอดจนผู้สนใจทั่วไปที่จะนำทฤษฎีบทและความรู้ที่ได้รับเกี่ยวกับเมทริกซ์ไปช่วยในการทำโครงงาน ไปใช้เตรียมตัวสำหรับการสอบเข้าศึกษาต่อ หรือ ประยุกต์กับปัญหาในศาสตร์ที่เกี่ยวข้องต่อไป

ยศนันต์ มีมาก
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
มกราคม 2555

สารบัญ

บทที่ 1

ระบบเชิงเส้น

1.1 เมทริกซ์และระบบเชิงเส้น

ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริงทั้งหมด และให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก เราเรียกฟังก์ชันในรูป

$$A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$$

ว่า $m \times n$ **เมทริกซ์** (อ่านว่า m คูณ n เมทริกซ์) **($m \times n$ matrix)** บน $\mathbb{R}$ และเขียนแทน A ด้วยตารางในรูปแบบ

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

โดยที่ a_{ij} อยู่ในแถวที่ i และ หลักที่ j หมายถึงค่าของ $A(i, j)$ สำหรับทุกค่า $i = 1, 2, \ldots, m$ และ $j = 1, 2, \ldots, n$ และเรียก $m \times n$ ว่า**มิติของเมทริกซ์ (dimension of a matrix)** ซึ่งในกรณีที่ $m = n$ เราเรียก A ว่า**เมทริกซ์จัตุรัส (square matrix) ขนาด** n

เราเรียก $1 \times n$ เมทริกซ์ว่า**เวกเตอร์แถว (row vector)** และเรียก $m \times 1$ เมทริกซ์ว่า**เวกเตอร์หลัก (column vector)** เมทริกซ์ที่มีมิติ $m \times n$ และสมาชิกทุกตำแหน่งเป็น 0 เรียกว่า**เมทริกซ์ศูนย์ (zero matrix)** เขียนแทนด้วย $\underline{0}$

สมาชิกทแยงมุม (diagonal entry) ในเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ คือบรรดา $a_{11}, a_{22}, \ldots$ ซึ่งเรียงกันเป็น**เส้นทแยงมุมหลัก (main diagonal)** ของเมทริกซ์ A และ**เมทริกซ์ทแยงมุม (diagonal matrix)** คือเมทริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกอื่นนอกเส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์

ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ และ c เป็นจำนวนจริง

เรากล่าวว่า $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับทุกค่า $i = 1, 2, \ldots, m$ และ $j = 1, 2, \ldots, n$

ผลบวกของเมทริกซ์ A **และ** B กำหนดโดย

$$A + B := [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

และ**ผลคูณของจำนวนจริง** c **กับเมทริกซ์** A กำหนดโดย

$$cA := [c\, a_{ij}]_{m\times n}$$

โดยทั่วไป เราเขียน $-B$ แทน $(-1)B$ และเขียน $A-B$ แทน $A+(-B)$

ตัวอย่าง 1.1.1 ให้ $A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\ 4 & 0 & 5\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 7 & 5 & -2\end{bmatrix}$
เราได้ว่า

$$\begin{aligned}A+B &= \begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\ 4 & 0 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 7 & 5 & -2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-1+1 & 3+(-1) & 2+1\\ 4+7 & 0+5 & 5+(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ 11 & 5 & 3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

และ

$$2A=2\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\ 4 & 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(-1) & 2(3) & 2(2)\\ 2(4) & 2(0) & 2(5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 6 & 4\\ 8 & 0 & 10\end{bmatrix}$$

สำหรับเมทริกซ์ A,B,C และ $\underline{0}$ ที่มีมิติ $m\times n$ และจำนวนจริง c และ d เราสามารถแสดงได้โดยง่ายว่า

1. $A+B$ และ cA มีมิติ $m\times n$
2. $A+B=B+A$
3. $(A+B)+C=A+(B+C)$
4. $A+\underline{0}=\underline{0}+A=A$
5. $A+(-A)=(-A)+A=\underline{0}$
6. $c(A+B)=cA+cB$
7. $(c+d)A=cA+dA$
8. $(cd)A=c(dA)$
9. $1A=A$ และ $0A=\underline{0}$

สมการเชิงเส้น (linear equation) ในตัวแปร $x_1,x_2,\ldots,x_n$ คือสมการซึ่งเขียนได้ในรูปแบบ

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$$

โดยที่**พจน์คงตัว (constant term)** b และ**สัมประสิทธิ์ (coefficient)** $a_1,a_2,\ldots,a_n$ เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่าง 1.1.2

1. $4x_1-5x_2+5=x_3$ และ $\pi x_2=2(\sqrt{3}x_1-4)+x_3$ เป็นสมการเชิงเส้น
2. $4x_1x_2=x_3-2$ และ $x_1=\sqrt{x_2}+3$ ไม่เป็นสมการเชิงเส้น

ระบบสมการเชิงเส้น (system of linear equations) หรือระบบเชิงเส้น (linear system) ในตัวแปร $x_1,x_2,\ldots,x_n$ หมายถึงชุดจำกัดที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นในตัวแปร $x_1,x_2,\ldots,x_n$

ผลเฉลย (solution) ของระบบเชิงเส้น คือ จำนวนจริง $c_1,c_2,\ldots,c_n$ ซึ่งเมื่อนำไปแทน $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ตามลำดับ แล้วทำให้แต่ละสมการในระบบเชิงเส้นเป็นจริง และเรียกเซตของผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นไปได้ของระบบเชิงเส้นว่า**เซตผลเฉลย (solution set)**

เรากล่าวว่าระบบเชิงเส้น 2 ระบบ**สมมูลกัน (equivalent)** ก็ต่อเมื่อ ทั้งสองระบบมีเซตผลเฉลยเดียวกัน

ตัวอย่าง 1.1.3 ระบบเชิงเส้น

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1\\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 2\\ & & x_2 & - & 5x_3 & = & 6\end{array}$$

มี $(-1,1,-1)$ เป็นผลเฉลยชุดหนึ่ง

โดยทั่วไป ระบบเชิงเส้นในตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ มีรูปแบบเป็น

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1.1.1}$$

เมื่อ $m \geq 1$ และ $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ เป็นสมการเชิงเส้น ทุก $i = 1, 2, \ldots, m$

ตัวอย่าง 1.1.4 จงหาเซตผลเฉลยของระบบเชิงเส้นต่อไปนี้

(ก) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 9 & \ldots(1) \\ -x_1 + x_2 = -1 & \ldots(2) \end{cases}$

วิธีทำ จาก (2) เราได้ว่า $x_2 = -1 + x_1$ นำไปแทนในสมการ (1) จะได้ว่า

$$4x_1 + (-1 + x_1) = 9$$

ดังนั้น $x_1 = 2$ และได้ $x_2 = 1$
เพราะฉะนั้น เซตผลเฉลย คือ $\{(2, 1)\}$ $\square$

(ข) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 4 & \ldots(1) \\ -3x_1 + 9x_2 = 8 & \ldots(2) \end{cases}$

วิธีทำ นำ -3 คูณตลอดสมการ (1) จะได้ $-3x_1 + 9x_2 = 12$
จาก (2) ทำให้ได้ $8 = 12$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง
ดังนั้น ระบบเชิงเส้นนี้ไม่มีผลเฉลย
เพราะฉะนั้น เซตผลเฉลย คือ เซตว่าง $\square$

(ค) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 & \ldots(1) \\ -2x_1 - 4x_2 = -6 & \ldots(2) \end{cases}$

วิธีทำ นำ -2 หารตลอดสมการ (2) จะได้ $x_1 + 2x_2 = 3$ ซึ่งคือสมการ (1)
ดังนั้น $x_1 = 3 - 2x_2$ สอดคล้องทั้ง 2 สมการทุก $x_2 \in \mathbb{R}$
เพราะฉะนั้น เซตผลเฉลย คือ $\{(x_1, x_2) : x_1 = 3 - 2x_2$ และ $x_2 \in \mathbb{R}\}$
หรือ $\{(3 - 2x_2, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$ $\square$

จากตัวอย่าง 1.1.4 สังเกตว่าผลเฉลยของระบบเชิงเส้นเป็นไปได้ 3 แบบ กล่าวคือ

1. ไม่มีผลเฉลย 2. มีผลเฉลยเพียงชุดเดียว 3. มีผลเฉลยอนันต์ชุด

เราเรียกระบบเชิงเส้นซึ่งมีผลเฉลย (ชุดเดียว หรือ อนันต์ชุด) ว่า**ระบบเชิงเส้นต้องกัน (consistent linear system)** และเรียก**ระบบเชิงเส้นไม่ต้องกัน (inconsistent linear system)** ถ้าระบบเชิงเส้นนั้นไม่มีผลเฉลย

พิจารณาระบบเชิงเส้น (1.1.1) เราเรียกเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ว่า**เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ (coefficient matrix)** และเรียกเมทริกซ์

$$[A \mid \vec{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$$

ว่า**เมทริกซ์แต่งเติม (augmented matrix)** ของระบบเชิงเส้น

ในการหาผลเฉลยของระบบเชิงเส้น เราจะใช้**การดำเนินการแถวขั้นมูลฐาน (elementary row operation)** ลดรูปเมทริกซ์แต่งเติมซึ่งการดำเนินการแถวขั้นมูลฐาน หมายถึง การดำเนินการแถวแบบใดแบบหนึ่งต่อไปนี้

1. [การสับเปลี่ยน (interchange)] สลับแถวที่ p และ แถวที่ q เขียนแทนด้วย R_{pq}
2. [การแทนที่ (replacement)] เปลี่ยนแถวที่ p โดยนำค่าคงตัว c คูณแถวที่ q $(q \neq p)$ แล้วบวกกับแถวที่ p เขียนแทนด้วย $R_p + cR_q$
3. [การปรับมาตรา (scaling)] คูณแถวที่ p ด้วยค่าคงตัว $c \neq 0$ เขียนแทนด้วย cR_p

เราอาจเรียกการดำเนินการแถวขั้นมูลฐานสั้นๆ ว่า "การดำเนินการแถว"

เรากล่าวว่า**เมทริกซ์** B **สมมูลแถว (row equivalent) กับเมทริกซ์** A ถ้าเมทริกซ์ B ได้จากเมทริกซ์ A โดยการดำเนินการแถวกับเมทริกซ์ A และเขียนแทนเมทริกซ์ A สมมูลแถวกับเมทริกซ์ B ด้วย $A \sim B$ ซึ่งเราสามารถแสดงได้ว่า

ทฤษฎีบท 1.1.1 *ถ้าระบบเชิงเส้น 2 ระบบมีเมทริกซ์แต่งเติมซึ่งสมมูลกัน แล้วระบบเชิงเส้นทั้งสองระบบมีเซตผลเฉลยเดียวกัน*

ดังนั้น หากเราดำเนินการแถวกับเมทริกซ์แต่งเติมของระบบเชิงเส้นที่กำหนดให้ จะทำให้ได้เมทริกซ์แต่งเติมใหม่ที่สมมูลแถวกับเมทริกซ์แต่งเติมเดิม โดยเมื่อเราดำเนินการแถวไปเรื่อยๆ เราจะลดรูปเมทริกซ์แต่งเติมจนกระทั่งสามารถพิจารณาผลเฉลยของระบบเชิงเส้นจากเมทริกซ์แต่งเติมได้โดยง่าย และผลเฉลยที่ได้ก็จะเป็นผลเฉลยของระบบเชิงเส้นที่เราต้องการ

ตัวอย่าง 1.1.5 จงเขียนเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ เมทริกซ์แต่งเติม และหาเซตผลเฉลยของระบบเชิงเส้น

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & - & 5x_3 & = & 6 \end{array}$$

วิธีทำ ระบบเชิงเส้นนี้มีเมทริกซ์สัมประสิทธิ์และเมทริกซ์แต่งเติม ตามลำดับ เป็น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad [A \mid \vec{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \end{array}\right]$$

เราดำเนินการแถวกับเมทริกซ์แต่งเติมไปเรื่อยๆ ได้เป็น

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -2R_1+R_2 \\ \\ \end{array}
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1+R_2 \\ \\ R_3+R_2 \end{array}
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -R_2 \\ -\frac{1}{6}R_3 \end{array}
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1+2R_3 \\ R_2-R_3 \\ \\ \end{array}
$$

สังเกตว่า เมทริกซ์แต่งเติมทุกเมทิรกซ์ที่ได้สมมูลแถวกับเมทริกซ์แต่งเติม $[A \mid \vec{b}]$ และเมทริกซ์แต่งเติมสุดท้ายสมนัยกับระบบเชิงเส้น

$$
\begin{array}{ccccc} x_1 & & & = & -1 \\ & x_2 & & = & 1 \\ & & x_3 & = & -1 \end{array}
$$

ดังนั้น เซตผลเฉลยของระบบเชิงเส้นที่กำหนดให้ คือ $\{(-1,1,-1)\}$ □

ตัวอย่าง 1.1.6 จงพิจารณาว่าระบบเชิงเส้น

$$
\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \end{array}
$$

มีผลเฉลยหรือไม่ ถ้ามีจงหาเซตผลเฉลย

วิธีทำ เขียนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบเชิงเส้นนี้และดำเนินการแถวกับเมทริกซ์แต่งเติมไปเรื่อยๆ จะได้

$$
[A \mid \vec{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3-R_1 \end{array}
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3+R_2 \end{array}
$$

ซึ่งเมทริกซ์แต่งเติมสุดท้ายสมนัยกับระบบเชิงเส้น

$$
\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ & & & & 0 & = & 4 \end{array} \qquad \text{ซึ่งเป็นเท็จ}
$$

ทำให้ระบบเชิงเส้นนี้ไม่มีผลเฉลย ส่งผลให้ระบบเชิงเส้นที่กำหนดให้ไม่มีผลเฉลย □

แบบฝึกหัด 1.1

1. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$
จงหา $-3A$, $A + 2B$ และ $B - 2A$

2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ X ซึ่งทำให้ $2(A - X) = A + \frac{1}{2}X$

3. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ X ซึ่งทำให้ $2A - X = 3(A + X)$

4. จงเขียนระบบเชิงเส้นที่สมนัยกับเมทริกซ์แต่งเติมต่อไปนี้ พร้อมทั้งพิจารณาว่าเป็นระบบเชิงเส้นต้องกันหรือไม่

(ก) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -8 \\ 0 & -1 & 3 \end{array}\right]$

(ข) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$

(ค) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$

(ง) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & h \end{array}\right]$ เมื่อ h เป็นจำนวนจริง

5. จงเขียนเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ เมทริกซ์แต่งเติม และหาเซตผลเฉลยของระบบเชิงเส้นต่อไปนี้ (ถ้ามี)

(ก) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 22 \\ x_1 - x_2 = -4 \end{cases}$

(ข) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

(ค) $\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 8 \\ -x_2 - 5x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 7 \end{cases}$

(ง) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

6. จงพิจารณาว่าเส้นตรง 3 เส้นที่กำหนดให้ต่อไปนี้มีจุดร่วมกันหรือไม่ เพราะเหตุใด
(ก) $x_1 + 3x_2 = -4,\ -x_1 + 4x_2 = -1$ และ $2x_1 - x_2 = -3$
(ข) $-x_1 + 2x_2 = 3,\ x_1 + x_2 = 1$ และ $x_1 - x_2 = -2$

1.2 เมทริกซ์ขั้นบันได

จากตัวอย่าง 1.1.5 และ 1.1.6 สังเกตว่าเมทริกซ์แต่งเติมที่สามารถบอกได้โดยง่ายว่าระบบเชิงเส้นใดมีผลเฉลยหรือไม่อยู่ในรูปแบบพิเศษ ซึ่งเราจะให้บทนิยามดังนี้

เราเรียกเมทริกซ์ซึ่งมีสมบัติ

1. แถวที่มี 0 ล้วนต้องอยู่ต่ำกว่าแถวที่มีตัวต่างจาก 0
2. ในแต่ละแถว ตัวแรกที่ไม่ใช่ 0 ของแถว [เรียกว่า**สมาชิกนำ (leading entry)**] ซึ่งต่ำกว่าจะต้องอยู่ในหลักทางขวามือของสมาชิกนำของแถวซึ่งอยู่สูงกว่า
3. ถ้าสมาชิกนำของแถวอยู่ในหลักใด แล้วสมาชิกของแถวที่ต่ำกว่าในหลักนั้นต้องเป็น 0

ว่า**มีรูปแบบขั้นบันได (echelon form)** และเรียกเมทริกซ์ขั้นบันไดซึ่งสอดคล้องสมบัติต่อไปนี้เพิ่มเติม

4. ในแต่ละแถวตัวแรกที่ไม่ใช่ 0 ต้องเป็น 1 เรียกว่า 1 **ตัวนำ (leading 1)**
5. ถ้าหลักใดที่มี 1 ตัวนำ สมาชิกอื่นในหลักนั้นต้องเป็น 0

ว่า**มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูป (reduced echelon form)**

ตัวอย่าง 1.2.1 เมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$
จากตัวอย่าง 1.1.5 และ 1.1.6 เป็นเมทริกซ์ขั้นบันได ซึ่งเมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูป

ตัวอย่าง 1.2.2 1. เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ไม่เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดเพราะว่าสมาชิกนำของแถวที่ 2 อยู่ในหลักทางซ้ายมือของสมาชิกนำในแถวแรก

2. เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ไม่เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดเพราะว่าแถวที่มี 0 ล้วนอยู่สูงกว่าแถวที่มีตัวต่างจาก 0

3. เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ขั้นบันได แต่ไม่เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปเพราะว่าสมาชิกนำในแต่ละแถวไม่เป็น 1

ตัวอย่าง 1.2.3 เมทริกซ์ในรูป $\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ขั้นบันได

เมื่อ $\blacksquare \neq 0$

เราสามารถแสดงได้ว่า

ทฤษฎีบท 1.2.1 *ทุกๆ เมทริกซ์สามารถลดรูปโดยใช้การดำเนินการแถวให้เป็นเมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดได้และลดรูปให้เป็นเมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้แบบเดียว*

เราเรียกตำแหน่งในเมทริกซ์ A ซึ่งสมนัยกับตำแหน่งของสมาชิกนำของเมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดของเมทริกซ์ A ว่า**ตำแหน่งตัวหลัก (pivot position)** ของเมทริกซ์ A และเรียกหลักซึ่งมีตำแหน่งตัวหลักว่า**หลักตัวหลัก (pivot column)**

ตัวอย่าง 1.2.4 จงใช้การดำเนินการแถวลดรูปเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

ให้มีรูปแบบขั้นบันไดและหาหลักตัวหลักทั้งหมดของเมทริกซ์ A แล้วลดรูปต่อไป จนได้รูปแบบขั้นบันไดลดรูปของเมทริกซ์ A

วิธีทำ สังเกตว่า แถวแรกของเมทริกซ์ A ขึ้นต้นด้วย 0 และมีตัวที่ไม่ใช่ 0 อยู่ในตำแหน่งที่ต่ำกว่า เราจึงใช้การสับเปลี่ยน R_{14} เพื่อให้เกิด 1 ตัวนำในแถวที่ 1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_{14} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

ต่อมาจะใช้การแทนที่เปลี่ยนแถวที่ 2 และ 3 เพื่อทำให้สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งที่ต่ำกว่าในหลักที่หนึ่งเป็น 0

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & -15 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ R_2 + R_1 \\ R_3 + 2R_1 \\ \\ \end{array}$$

สังเกตว่าตอนนี้ 2 เป็นสมาชิกนำในแถวที่ 2 ดังนั้นเราจึงใช้การแทนที่เปลี่ยนแถวที่ 3 และ 4 เพื่อทำให้สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งที่ต่ำกว่า 2 มีค่าเป็น 0

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ R_3 - \frac{5}{2}R_2 \\ R_4 + \frac{3}{2}R_4 \end{array}$$

เนื่องจากเมทริกซ์ที่ได้มี 0 ล้วนในแถวที่ 3 และแถวที่ 4 มีตัวต่างจาก 0 เราจึงใช้การสับเปลี่ยน R_{34} เพื่อให้แถวที่มี 0 ล้วนอยู่ต่ำกว่าแถวที่มีตัวต่างจาก 0 และไม่กระทบแถวที่ 1 และ 2 ซึ่งเราจัดไว้แล้ว ส่งผลให้เราได้เมทริกซ์ในรูปขั้นบันไดของเมทริกซ์ A เป็น

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ R_{34} \\ \\ \end{array}$$

ดังนั้น หลักตัวหลักทั้งหมดของเมทริกซ์ A คือหลักที่ 1, 2 และ 4

ต่อไปเราจะลดรูปเมทริกซ์จนได้รูปแบบขั้นบันไดลดรูป สังเกตว่าสมาชิกในแถวที่ 2 และ 3 ยังมีค่าไม่เท่ากับ 1 เราจึงใช้การปรับมาตรากับทั้งสองแถวเพื่อปรับให้เกิด 1 ตัวนำ

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \frac{1}{2}R_2 \\ -\frac{1}{5}R_3 \\ \\ \end{array}$$

ต่อมาใช้การแทนที่เพื่อทำให้สมาชิกอื่นในหลักที่มี 1 ตัวนำ (นั่นคือหลักที่ 2 และ 4) มีค่าเท่ากับ 0 ตามลำดับดังนี้

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 - 4R_2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 - 3R_3 \\ R_2 + 3R_3 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

ซึ่งจะได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปตามต้องการ □

พิจารณาเมทริกซ์แต่งเติมในรูปแบบขั้นบันไดลดรูป

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \sim \quad \begin{array}{ccccccc} x_1 & & & - & 2x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

เราได้ว่าตัวแปร x_1 และ x_2 ขึ้นกับตัวแปร x_3 กล่าวคือ

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + 2x_3 \\ x_2 &= 1 - x_3 \end{aligned}$$

สังเกตว่าตัวแปร x_1 และ x_2 สมนัยกับหลักที่หนึ่งและหลักที่สอง ตามลำดับ ซึ่งเป็นหลักตัวหลัก และตัวแปร x_3 อยู่ในหลักซึ่งไม่เป็นหลักตัวหลัก เราเรียกตัวแปร x_1 และ x_2 ว่าตัวแปรพื้นฐาน และเรียกตัวแปร x_3 ว่าตัวแปรเสรี ดังนั้น ผลเฉลยของระบบเชิงเส้นนี้อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} &x_1 = 2 + 2x_3 \\ &x_2 = 1 - x_3 \\ &x_3 \text{ เป็นตัวแปรเสรี} \end{aligned}$$

เรียกว่าผลเฉลยทั่วไป (general solution) ซึ่งผลเฉลยในรูปนี้จะบอกผลเฉลยทั้งหมดของระบบเชิงเส้น สังเกตว่าระบบเชิงเส้นนี้มีคำตอบอนันต์ชุดขึ้นกับการเปลี่ยนของ x_3

เราได้ข้อสรุปเกี่ยวกับการมีผลเฉลยของระบบเชิงเส้น ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.2.2 *[ทฤษฎีบทการมีจริง (Existence Theorem)]*
ระบบเชิงเส้นมีผลเฉลย ก็ต่อเมื่อ หลักทางขวาสุดของเมทริกซ์แต่งเติมไม่เป็นหลักตัวหลัก นั่นคือ ก็ต่อเมื่อ รูปแบบขั้นบันไดของเมทริกซ์แต่งเติมไม่มีแถวในรูปแบบ

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & b \end{array}\right] \quad \text{เมื่อ } b \neq 0$$

โดยทั่วไป เราสามารถใช้การดำเนินการแถวหาผลเฉลยทั่วไปของระบบเชิงเส้น หรือแสดงว่าเป็นระบบเชิงเส้นที่ไม่มีผลเฉลย ดังนี้

1. เขียนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบเชิงเส้น
2. ใช้การดำเนินการแถวลดรูปเมทริกซ์แต่งเติมจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดและตรวจสอบโดยใช้ทฤษฎีบท 1.2.2 ว่ามีผลเฉลยหรือไม่
3. ถ้าทราบว่ามีผลเฉลยให้ใช้การดำเนินการแถวลดรูปต่อไปจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูป โดยเราเรียกตัวแปรซึ่งสมนัยกับหลักตัวหลักว่า**ตัวแปรพื้นฐาน (basic variable)** และเรียกตัวแปรอื่นๆ ว่า**ตัวแปรเสรี (free variable)**
4. เขียนผลเฉลยของระบบเชิงเส้นโดยจะได้ว่าตัวแปรพื้นฐานจะขึ้นกับค่าคงตัวและตัวแปรเสรี (ถ้ามี) ซึ่งเราเรียกผลเฉลยนี้ว่า**ผลเฉลยทั่วไป (general solution)**

เราทราบมาแล้วว่า ทุกเมทริกซ์สามารถลดรูปให้เป็นรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เพียงแบบเดียวและจากเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปนี้ทำให้เราสามารถพิจารณาผลเฉลยทั่วไปของระบบเชิงเส้นได้โดยง่าย ซึ่งผลเฉลยทั่วไปจะเป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.2.3 *[ทฤษฎีบทความเป็นได้อย่างเดียว (Uniqueness Theorem)]*
ถ้าระบบเชิงเส้นมีผลเฉลย แล้วผลเฉลยจะเป็นได้ 2 กรณี กล่าวคือ

1. *มีผลเฉลยชุดเดียว ก็ต่อเมื่อ ไม่มีตัวแปรเสรี*
   นั่นคือ ทุกหลักยกเว้นหลักทางขวาสุดของเมทริกซ์แต่งเติมเป็นหลักตัวหลัก
2. *มีผลเฉลยอนันต์ชุด ก็ต่อเมื่อ มีตัวแปรเสรีอย่างน้อยหนึ่งตัว*

โดยทฤษฎีบท 1.2.3 เราสามารถสรุปได้ว่าผลเฉลยของระบบเชิงเส้นเป็นไปได้ 3 แบบ กล่าวคือ ไม่มีผลเฉลย หรือ มีผลเฉลยชุดเดียว หรือ มีผลเฉลยอนันต์ชุด

ตัวอย่าง 1.2.5 จงตรวจสอบว่าระบบเชิงเส้นหรือเมทริกซ์แต่งเติมต่อไปนี้มีผลเฉลยหรือไม่ ถ้ามีจงหาผลเฉลยของระบบเชิงเส้นหรือเมทริกซ์แต่งเติมนั้น

1. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 21 \end{cases}$$

วิธีทำ เขียนเมทริกซ์แต่งเติมและลดรูปโดยใช้การดำเนินการแถวให้มีรูปแบบขั้นบันไดได้เป็น

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 21 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right] R_3 - 2R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right] R_3 + R_2$$

ซึ่งแถวสุดท้ายมีรูปแบบ $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$
ทำให้สรุปโดยทฤษฎีบท 1.2.2 ได้ว่าระบบเชิงเส้นนี้ไม่มีผลเฉลย $\square$

2. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

วิธีทำ เขียนเมทริกซ์แต่งเติมและลดรูปโดยใช้การดำเนินการแถวให้มีรูปแบบขั้นบันไดได้เป็น

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -4 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & -4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3 + \frac{1}{2}R_2 \end{array}$$

ดังนั้นหลักทางขวาสุดของเมทริกซ์แต่งเติมไม่เป็นหลักตัวหลัก
ทำให้สรุปโดยทฤษฎีบท 1.2.2 ได้ว่าระบบเชิงเส้นนี้มีผลเฉลย

เราจึงใช้การดำเนินการแถวต่อไปจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปเป็น

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 + R_2 \\ -\frac{1}{2}R_2 \\ \\ \end{array}$$

ซึ่งเมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปนี้สมนัยกับระบบเชิงเส้น

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & & & + & 3x_4 & = & 11 \\ & & & & x_3 & - & 2x_4 & = & -7 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

เนื่องจากหลักที่ 1 และ 3 เป็นหลักตัวหลัก ดังนั้นเราได้ว่า x_1 และ x_3 เป็นตัวแปรพื้นฐาน และ x_2 และ x_4 เป็นตัวแปรเสรี ทำให้เราได้

$$x_1 = 11 + 2x_2 - 3x_4$$

$$x_3 = -7 + 2x_4$$

x_2 และ x_4 เป็นตัวแปรเสรี

เป็นผลเฉลยทั่วไปของระบบเชิงเส้นที่กำหนดให้ □

3. $$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 3 & -4 \\ 4 & -8 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

วิธีทำ ลดรูปเมทริกซ์แต่งเติมที่กำหนดให้ โดยใช้การดำเนินการแถวให้มีรูปแบบขั้นบันไดได้เป็น

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 3 & -4 \\ 4 & -8 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3 + R_2 \\ R_4 - R_2 \end{array}$$

ดังนั้นหลักทางขวาสุดของเมทริกซ์แต่งเติมไม่เป็นหลักตัวหลัก
ทำให้สรุปโดยทฤษฎีบท 1.2.2 ได้ว่าระบบเชิงเส้นนี้มีผลเฉลย

เราจึงใช้การดำเนินการแถวต่อไปจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปเป็น

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{1}{2}R_1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 - R_2 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

ซึ่งเมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปนี้สมนัยกับระบบเชิงเส้น

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & - & 2x_2 & & = & 1 \\ & & & x_3 & = & -2 \\ & & & 0 & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

เนื่องจากหลักที่ 1 และ 3 เป็นหลักตัวหลัก ดังนั้นเราได้ว่า x_1 และ x_3 เป็นตัวแปรพื้นฐาน และ x_2 เป็นตัวแปรเสรี ทำให้เราได้

$$x_1 = 1 + 2x_2$$
$$x_3 = -2$$
$$x_2 \text{ เป็นตัวแปรเสรี}$$

เป็นผลเฉลยทั่วไปของระบบเชิงเส้นที่กำหนดให้ □

ตัวอย่าง 1.2.6 จงหาค่าของ h ที่ทำให้ $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ -2 & 6 & -5 \end{array}\right]$ เป็นเมทริกซ์แต่งเติมของระบบเชิงเส้นต้องกัน

วิธีทำ เมทริกซ์แต่งเติมที่กำหนดให้ลดรูปให้มีรูปแบบขั้นบันไดได้เป็น

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ 0 & 0 & 2h-5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 + 2R_1 \end{array}$$

ดังนั้น เราได้โดยทฤษฎีบท 1.2.2 ว่าเมทริกซ์แต่งเติมที่กำหนดให้สมนัยกับระบบเชิงเส้นต้องกัน ก็ต่อเมื่อ $2h-5=0$ นั่นคือ $h = \dfrac{5}{2}$ □

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงพิจารณาเมทริกซ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ว่า
   (1.1) มีรูปแบบขั้นบันไดหรือไม่ (1.2) มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปหรือไม่

   (ก) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ (ข) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (ค) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (ง) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (จ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (ฉ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. จงใช้การดำเนินการแถวลดรูปเมทริกซ์ต่อไปนี้ให้มีรูปแบบขั้นบันได และหาหลักตัวหลักทั้งหมด แล้วลดรูปต่อไปจนได้รูปแบบขั้นบันไดลดรูป

   (ก) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ (ข) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (ค) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. จงพิจารณาว่าเมทริกซ์แต่งเติมในรูปขั้นบันได (เมื่อ $\blacksquare \neq 0$) ต่อไปนี้ สมนัยกับระบบเชิงเส้นต้องกันหรือไม่ และถ้าเป็นระบบเชิงเส้นต้องกัน จงพิจารณาว่ามีผลเฉลยชุดเดียวหรือมีผลเฉลยอนันต์ชุด

   (ก) $\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \end{array}\right]$ (ข) $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{array}\right]$

   (ค) $\left[\begin{array}{cc|c} \blacksquare & 0 & * \\ 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ (ง) $\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & 1 & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \end{array}\right]$

4. จงหาผลเฉลยทั่วไป (ถ้ามี) ของระบบเชิงเส้นหรือเมทริกซ์แต่งเติมต่อไปนี้

   (ก) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5 \\ 6x_1 - 17x_2 + 4x_3 = 28 \\ x_1 + 12x_3 = -1 \end{cases}$

   (ข) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 6 \end{cases}$

   (ค) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -7 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$

   (ง) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 14x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$

   (จ) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 7 & 6 \end{array}\right]$ (ฉ) $\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 4 \\ -6 & 3 & -3 & 5 \end{array}\right]$

   (ช) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 7 & -4 & 2 & 7 \end{array}\right]$ (ซ) $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 2 & 0 \\ -9 & 12 & 6 & 0 \\ -6 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right]$

(ฌ) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ (ญ) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & -6 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -6 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

5. จงหาค่าของ h ที่ทำให้เมทริกซ์ต่อไปนี้เป็นเมทริกซ์แต่งเติมของระบบเชิงเส้นต้องกัน
   (ก) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & h & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{array}\right]$ (ข) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ -4 & h & 8 \end{array}\right]$
   (ค) $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & h \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ (ง) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ h & 0 & 5 \end{array}\right]$

6. จงหาค่าของ a ทั้งหมดที่ทำให้ระบบเชิงเส้น

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & + & (a^2-10)x_3 & = & a \end{array}$$

   (ก) ไม่มีผลเฉลย (ข) มีผลเฉลยชุดเดียว (ค) มีผลเฉลยอนันต์ชุด

7. จงหา $0 \le \alpha, \beta, \gamma < 2\pi$ ซึ่งสอดคล้องระบบไม่เชิงเส้น (nonlinear system)

$$\begin{array}{ccccccc} 2\sin\alpha & + & \cos\beta & - & \tan\gamma & = & 1 \\ 2\sin\alpha & - & \cos\beta & + & 3\tan\gamma & = & 3 \\ 6\sin\alpha & - & 3\cos\beta & + & \tan\gamma & = & 9 \end{array}$$

1.3 การรวมเชิงเส้นและการแผ่ทั่ว

ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก เราเรียกเซตของเวกเตอร์หลักมิติ $m \times 1$ ทั้งหมดว่า**ปริภูมิยุคลิดมิติ m (Euclidean m-space)** เขียนแทนด้วย $\mathbb{R}^m$ และเรียกเวกเตอร์หลักซึ่งสมาชิกทุกตัวเป็น 0 ว่า**เวกเตอร์ศูนย์ (zero vector)** เขียนแทนด้วย $\vec{0}$ หรือ $\vec{0}_m$

สำหรับเวกเตอร์ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ ใน $\mathbb{R}^m$ และ $c_1, c_2, \ldots, c_p \in \mathbb{R}$ เราเรียกเวกเตอร์

$$\vec{y} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_p\vec{v}_p$$

ว่าเป็น**การรวมเชิงเส้น (linear combination) ของเวกเตอร์** $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ **ด้วยน้ำหนัก (weight)** $c_1, c_2, \ldots, c_p$

ตัวอย่าง 1.3.1 กำหนดให้ $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}$

จงพิจารณาว่าเวกเตอร์ $\vec{b}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$ หรือไม่
นั่นคือ จงพิจารณาว่ามีจำนวนจริง x_1 และ x_2 ซึ่งทำให้ $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 = \vec{b}$ หรือไม่

วิธีทำ เพราะว่าสมการ $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 = \vec{b}$ เขียนได้เป็น

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & = & -7 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & -4 \end{array}$$

ดังนั้น เราจะพิจารณาว่าระบบเชิงเส้นนี้มีผลเฉลยหรือไม่ โดยเขียนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบเชิงเส้นและลดรูปโดยใช้การดำเนินการแถวให้มีรูปแบบขั้นบันไดได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \\ 1 & 2 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_{13} \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ R_3 + 3R_1 \end{array}$$

และสรุปได้จากทฤษฎีบท 1.2.2 ว่าระบบเชิงเส้นนี้มีผลเฉลย
เพราะฉะนั้น $\vec{b}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$ $\square$

หมายเหตุ หากต้องการเขียน $\vec{b}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$ เราสามารถทำได้โดยลดรูปเมทริกซ์แต่งเติมต่อไปจนมีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปดังนี้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 - 2R_2 \\ \\ \\ \end{array} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับ} \quad \begin{array}{rcr} x_1 & = & 2 \\ x_2 & = & -3 \\ 0 & = & 0 \end{array}$$

ดังนั้น เราได้ว่า $\vec{b} = 2\vec{v}_1 + (-3)\vec{v}_2$

เราเรียกสมการในตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ที่อยู่ในรูปแบบ

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_p\vec{v}_p = \vec{b} \tag{1.3.1}$$

เมื่อ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^m$ ว่า**สมการเวกเตอร์ (vector equation)** โดยสมการนี้มีผลเฉลยชุดเดียวกับระบบเชิงเส้นซึ่งมีเมทริกซ์แต่งเติม

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_p & \vec{b} \end{array}\right] \tag{1.3.2}$$

ดังนั้น เราสรุปได้ว่า

บทแทรก 1.3.1 *เวกเตอร์ b เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ ก็ต่อเมื่อ สมการ (1.3.1) [สมการ (1.3.2)] มีผลเฉลย*

ให้ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^m$ เราเรียกเซตของการรวมเชิงเส้นทั้งหมดของเวกเตอร์ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ ว่า**เซตย่อยของ $\mathbb{R}^m$ ที่แผ่ทั่วโดยเวกเตอร์** $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ **(subset of $\mathbb{R}^m$ spanned by** $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$**)** เขียนแทนด้วย $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ นั่นคือ

$$\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\} := \{c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_p\vec{v}_p : c_1, c_2, \ldots, c_p \in \mathbb{R}\}$$

สังเกตว่า $\text{Span}\{\vec{0}\} = \{\vec{0}\}$ และเห็นชัดว่า $\vec{0}$ และ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ อยู่ใน $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ เสมอ

ถ้า $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\} = \mathbb{R}^m$ เรากล่าวว่า $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ **แผ่ทั่ว (span)** $\mathbb{R}^m$

ตัวอย่าง 1.3.2 1. $\text{Span}\left\{\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}\right\} = \left\{c\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix} : c \in \mathbb{R}\right\}$

2. $\text{Span}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}\right\} = \left\{c_1\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}$

และจากตัวอย่าง 1.3.1 เราได้ว่า $\begin{bmatrix}1\\-7\\-4\end{bmatrix} \in \text{Span}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}\right\}$

3. $\text{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\} = \mathbb{R}^3$

เราสามารถเขียนบทแทรก 1.3.1 ได้ในรูป $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ ดังนี้

บทแทรก 1.3.2 *เวกเตอร์ $\vec{b}$ อยู่ในเซต $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ ก็ต่อเมื่อ สมการ (1.3.1) [สมการ (1.3.2)] มีผลเฉลย*

ตัวอย่าง 1.3.3 กำหนดให้ $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}$ และ $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}2\\-3\\5\end{bmatrix}$

จงพิจารณาว่าเวกเตอร์ $\vec{b} = \begin{bmatrix}1\\1\\-3\end{bmatrix}$ อยู่ในเซต $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ หรือไม่

วิธีทำ โดยบทแทรก 1.3.2 เราจะพิจารณาระบบเชิงเส้นที่สมนัยกับเมทริกซ์แต่งเติม

$$\left[\begin{array}{cc|c} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{b} \end{array}\right]$$

ว่ามีผลเฉลยหรือไม่ โดยใช้การดำเนินการแถวเราได้รูปแบบขั้นบันไดของเมทริกซ์แต่งเติมนี้เป็น

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 11 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 + 2R_1 \\ R_3 + 3R_1 \end{array}$$

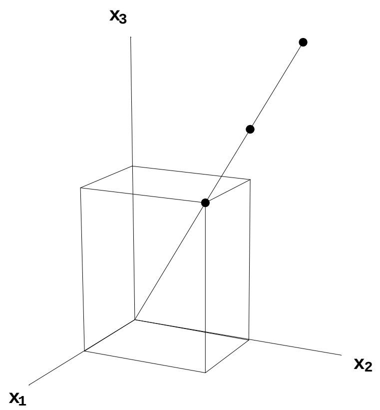
$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -33 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3 - 11R_2 \end{array}$$

ดังนั้น หลักทางขวาสุดเป็นหลักตัวหลัก
จึงได้โดยทฤษฎีบท 1.2.2 ว่าระบบเชิงเส้นนี้ไม่มีผลเฉลย
เพราะฉะนั้น $\vec{b}$ ไม่อยู่ใน $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ □

พิจารณาเวกเตอร์ $\vec{v} \neq \vec{0}$ ใน $\mathbb{R}^3$ เราจะได้ว่า

$$\text{Span}\{\vec{v}\} = \{c\vec{v} : c \in \mathbb{R}\}$$

เป็นเส้นตรง (line) ใน $\mathbb{R}^3$ ซึ่งผ่านจุดกำเนิดและมีเวกเตอร์แสดงทิศทาง (direction vector) เป็น $\vec{v}$



ต่อมาเราจะศึกษาการแผ่ทั่วของ 2 เวกเตอร์ $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$ ใน $\mathbb{R}^3$ ซึ่งแบ่งเป็น 2 กรณี ดังนี้

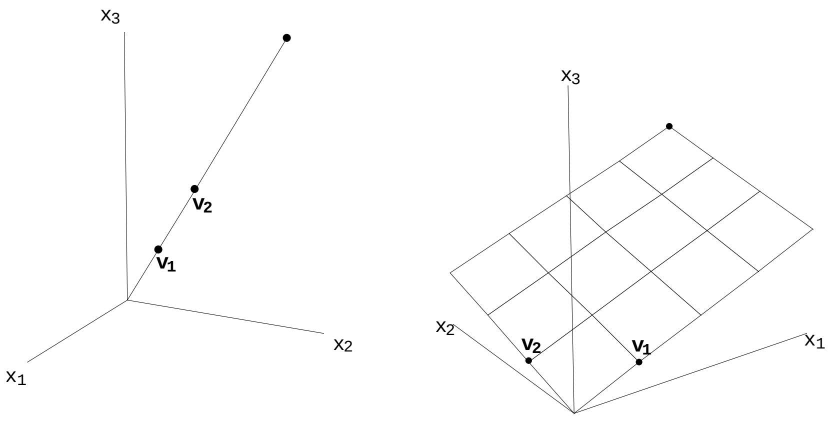
1. มีจำนวนจริง $c \neq 0$ ซึ่ง $\vec{v}_1 = c\vec{v}_2$ นั่นคือ $\vec{v}_1$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\vec{v}_2$ จะได้ว่า

$$\mathrm{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \mathrm{Span}\{\vec{v}_1\} = \mathrm{Span}\{\vec{v}_2\}$$

2. $\vec{v}_1 \neq c\vec{v}_2$ สำหรับทุกจำนวนจริง c จะได้ว่า

$$\mathrm{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \{c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

เป็นระนาบ (plane) ใน $\mathbb{R}^3$ ซึ่งผ่านจุดกำเนิด (ดังรูป) เรียกว่า**ระนาบซึ่งแผ่ทั่วโดยเวกเตอร์ $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$ (plane spanned by $\vec{v}_1$ and $\vec{v}_2$)** โดยระนาบนี้มีเวกเตอร์แนวฉาก (normal vector) เป็น $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ (ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (cross product) ของเวกเตอร์ $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$)



ต่อไปเราจะกล่าวถึงสมการเมทริกซ์ ให้ A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ ซึ่งเราจะแทนหลักของเมทริกซ์ A ด้วยเวกเตอร์ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ ใน $\mathbb{R}^m$ ตามลำดับ และ $\vec{x}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ เรากำหนด**ผลคูณของ A และ $\vec{x}$ (product of A and $\vec{x}$)** เขียนแทนด้วย $A\vec{x}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของหลักของ A ด้วยน้ำหนักซึ่งสมนัยกับสมาชิกของ $\vec{x}$ นั่นคือ

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \ldots & \vec{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n$$

เราเรียกเมทริกซ์ทแยงมุมมิติ $n \times n$ ที่สมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักเป็น 1 ทั้งหมดว่า**เมทริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix)** เขียนแทนด้วย I_n ซึ่งเราเห็นได้โดยง่ายว่า $I_n\vec{x} = \vec{x}$ สำหรับทุก $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

ตัวอย่าง 1.3.4 1. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

2. $x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

ให้ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^m$ เราเรียกสมการในรูปแบบ

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{1.3.3}$$

ว่า**สมการเมทริกซ์ (matrix equation)** ซึ่งจากนิยามผลคูณระหว่างเมทริกซ์ A และเวกเตอร์ $\vec{x}$ เราได้โดยบทแทรก 1.3.1 ว่าเราสามารถพิจารณาการมีผลเฉลยของสมการ (1.3.3) ได้จากการมีผลเฉลยของสมการ (1.3.1) หรือการมีผลเฉลยของสมการ (1.3.2) ซึ่งสรุปเป็นบทแทรกได้ดังนี้

บทแทรก 1.3.3 *ให้ A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^m$ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน*

1. *สมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ มีผลเฉลย*
2. *$\vec{b}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ซึ่งได้จากหลักของเมทริกซ์ A*
3. *$[A \mid \vec{b}]$ เป็นเมทริกซ์แต่งเติมที่สมนัยกับระบบเชิงเส้นที่มีผลเฉลย*

ตัวอย่าง 1.3.5 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$
จงพิจารณาว่าสมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ มีผลเฉลยสำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{b}$ หรือไม่
ถ้าไม่ จงหาเงื่อนไขบน b_1, b_2 และ b_3 ซึ่งทำให้สมการนี้มีผลเฉลย

วิธีทำ โดยบทแทรก 1.3.3 เราเขียนเมทริกซ์แต่งเติม $[A \mid \vec{b}]$ และใช้การดำเนินการแถวลดรูปจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & b_1 \\ -2 & 1 & -6 & b_2 \\ 0 & 2 & 8 & b_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & b_1 \\ 0 & 1 & 4 & 2b_1 + b_2 \\ 0 & 2 & 8 & b_3 \end{array}\right] \quad R_2 + 2R_1$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & b_1 \\ 0 & 1 & 4 & 2b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & -4b_1 - 2b_2 + b_3 \end{array}\right] \quad R_3 - 2R_2$$

โดยทฤษฎีบท 1.2.2 เราได้ว่าระบบเชิงเส้นนี้มีผลเฉลย ก็ต่อเมื่อ $-4b_1 - 2b_2 + b_3 = 0$
ดังนั้น สมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ ไม่มีผลเฉลยสำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{b}$
และ สมการนี้มีผลเฉลย ก็ต่อเมื่อ $-4b_1 - 2b_2 + b_3 = 0$ $\square$

จากตัวอย่างข้างต้น สำหรับเมทริกซ์ A ที่กำหนดให้ มีบางเวกเตอร์ $\vec{b}$ ที่ทำให้สมการเมทริกซ์ $A\vec{x}=\vec{b}$ ไม่มีผลเฉลย เช่น $\vec{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ เพราะว่า $(-4)(1)-2(1)+1=-5\neq 0$ สิ่งที่เราจะสนใจต่อไปคือการตรวจสอบว่าเมื่อใดที่เมทริกซ์ A ที่กำหนดให้จะทำให้สมการเมทริกซ์ $A\vec{x}=\vec{b}$ มีผลเฉลยสำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{b}$

ให้ A เป็น $m\times n$ เมทริกซ์ เรากล่าวว่า**หลักของเมทริกซ์ A แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^m$** ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{b}$ ใน $\mathbb{R}^m$ เป็นการรวมเชิงเส้นของหลักของเมทริกซ์ A นั่นคือ ถ้า

$$A=\begin{bmatrix}\vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n\end{bmatrix} \text{ เมื่อ } \vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\in\mathbb{R}^m$$

แล้วหลักของเมทริกซ์ A แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^m$ ก็ต่อเมื่อ $\operatorname{Span}\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\}=\mathbb{R}^m$ และเราสามารถแสดงได้ว่า

ทฤษฎีบท 1.3.4 *ให้ A เป็น $m\times n$ เมทริกซ์ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน*

1. *สำหรับแต่ละ $\vec{b}\in\mathbb{R}^m$ สมการเมทริกซ์ $A\vec{x}=\vec{b}$ มีผลเฉลย*
2. *หลักของเมทริกซ์ A แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^m$*
3. *A มีตำแหน่งตัวหลักในทุกๆ แถว*

ซึ่งเราสามารถใช้ทฤษฎีบทนี้ตรวจสอบว่าเซตของเวกเตอร์แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^m$ หรือไม่ เช่น

ตัวอย่าง 1.3.6 กำหนดให้ $\vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \vec{v}_2=\begin{bmatrix}-1\\3\\7\end{bmatrix}$ และ $\vec{v}_3=\begin{bmatrix}3\\-2\\-2\end{bmatrix}$ จงพิจารณาว่าเซต $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^3$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

วิธีทำ เขียนเมทริกซ์ $A=\begin{bmatrix}\vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3\end{bmatrix}$ และใช้การดำเนินการแถวลดรูปจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดดังนี้

$$\begin{aligned} A=\begin{bmatrix}1&-1&3\\0&3&-2\\-1&7&-2\end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix}1&-1&3\\0&3&-2\\0&6&1\end{bmatrix} \quad R_3+R_1\\ &\sim \begin{bmatrix}1&-1&3\\0&3&-2\\0&0&5\end{bmatrix} \quad R_3-2R_2\end{aligned}$$

ดังนั้น A มีตำแหน่งตัวหลักในทุกๆ แถว
เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 1.3.4 เราสรุปได้ว่าเซต $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^3$ $\square$

เราจะปิดท้ายหัวข้อนี้ด้วยการกล่าวถึงการคูณระหว่างเมทริกซ์

ให้ A เป็น $m\times n$ เมทริกซ์ และ B เป็น $n\times p$ เมทริกซ์ซึ่งมีหลักเป็น $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\dots,\vec{b}_p$ เรากำหนด **ผลคูณ (product) ของ A และ B** เขียนแทนด้วย AB เป็น $m\times p$ เมทริกซ์ซึ่งประกอบด้วยหลัก $A\vec{b}_1,A\vec{b}_2,\dots,A\vec{b}_p$ นั่นคือ

$$AB=A\begin{bmatrix}\vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_p\end{bmatrix}:=\begin{bmatrix}A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_p\end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 1.3.7 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} AB = A\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} & A\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} & A\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} & 0\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} & (-2)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11 & 12 & -1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

สังเกตว่า เราสามารถหา AB ได้ ก็ต่อเมื่อ A มีจำนวนหลักเท่ากับจำนวนแถวของ B โดยแถวที่ i และ หลักที่ k ของ AB คือ ผลบวกของผลคูณของสมาชิกที่สมนัยจากแถวที่ i ของ A และ หลักที่ k ของ B
นั่นคือ ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{jk}]_{n\times p}$ แล้วสมาชิกแถวที่ i และ หลักที่ j ของ AB คือ

$$(AB)_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$

จากตัวอย่าง 1.3.7 เราได้ว่า

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(1)+3(3) & 2(0)+3(4) & 2(-2)+3(1) \\ 1(1)+(-1)(3) & 1(0)+(-1)(4) & 1(-2)+(-1)(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11 & 12 & -1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

เราได้สมบัติเบื้องต้นของการคูณระหว่างเมทริกซ์ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.3.5 *สำหรับเมทริกซ์ A ที่มีมิติ $m \times n$ และเมทริกซ์ B และ C ซึ่งมีขนาดที่ผลบวกและผลคูณที่เกี่ยวข้องมีความหมาย จะได้ว่า*

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $A(B+C) = AB + AC$ *และ* $(B+C)A = BA + CA$
3. $r(AB) = (rA)B = A(rB)$ *เมื่อ r เป็นจำนวนจริง*
4. $I_m A = A = AI_n$

ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n จากทฤษฎีบทข้างต้นเราสามารถเขียน

$$A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k \text{ ตัว}}$$

ตัวอย่าง 1.3.8 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

และ

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $AB \neq BA$

ข้อสังเกต โดยทั่วไป AB อาจไม่เท่ากับ BA และ ถ้า $AB = \underline{0}$ แล้วเราก็สรุปไม่ได้ว่า $A = \underline{0}$ หรือ $B = \underline{0}$ เช่น เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ จะได้ $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

สำหรับเมทริกซ์ A ที่มีมิติ $m \times n$ เราเรียกเมทริกซ์ที่มีมิติ $n \times m$ ซึ่งแต่ละหลักเกิดจากแถวที่สมนัยกับแถวของเมทริกซ์ A ว่า**เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose matrix) ของ** A เขียนแทนด้วย A^T

ตัวอย่าง 1.3.9 ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B^T = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

ถ้า $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$ เป็นเวกเตอร์หลัก จะได้ว่า $\vec{v}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{bmatrix}$

ดังนั้น ถ้า $A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$ เมื่อ $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^m$ เราจะได้ $A^T = \begin{bmatrix} \vec{v}_1^T \\ \vec{v}_2^T \\ \vdots \\ \vec{v}_n^T \end{bmatrix}$

จากการสังเกตข้างต้น เราได้โดยง่ายว่า

ทฤษฎีบท 1.3.6 *สำหรับเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ B ซึ่งมีขนาดที่ผลบวกและผลคูณที่เกี่ยวข้องมีความหมาย เราได้*

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(rA)^T = rA^T$ *เมื่อ r เป็นจำนวนจริง*
4. $(AB)^T = B^T A^T$

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบทนี้ เราได้ว่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของผลคูณของเมทริกซ์เท่ากับผลคูณของเมทริกซ์สลับเปลี่ยนโดยอันดับจะผันกลับ (reverse order) ซึ่งเราสามารถพิสูจน์สำหรับเมทริกซ์ $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ใดๆ ที่ผลคูณ $A_1 A_2 \cdots A_k$ มีความหมายได้อีกว่า

$$(A_1 A_2 \cdots A_k)^T = A_k^T \cdots A_2^T A_1^T$$

แบบฝึกหัด 1.3

1. เมื่อกำหนด $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ และ $\vec{b}$ ดังต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าเวกเตอร์ $\vec{b}$ อยู่ในเซต $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

(ก) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ (ข) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}; \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix}$

(ค) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}; \vec{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ (ง) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}; \vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. เมื่อกำหนด $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ และ $\vec{b}$ ดังต่อไปนี้ จงหาค่าของ h ที่ทำให้ $\vec{b}$ อยู่บนระนาบซึ่งแผ่ทั่วโดย $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$

(ก) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}; \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ h \end{bmatrix}$ (ข) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}; \vec{b} = \begin{bmatrix} h \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$

3. เมื่อกำหนดเมทริกซ์ A ดังต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าสมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ มีผลเฉลยสำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ หรือไม่ ถ้าไม่จงหาเงื่อนไขบน b_1, b_2 และ b_3 ซึ่งทำให้สมการนี้มีผลเฉลย

(ก) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ (ข) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 8 & -4 \end{bmatrix}$ (ค) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & -6 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

4. จงพิจารณาว่าเซตของเวกเตอร์หรือหลักของเมทริกซ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^3$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

(ก) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ (ข) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ (ค) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & -8 \end{bmatrix}$

5. จงหาค่าของ h ซึ่งทำให้เวกเตอร์ $\vec{v}_3$ อยู่ใน $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ เมื่อ

(ก) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ h \end{bmatrix}$ (ข) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ h \\ -3 \end{bmatrix}$

6. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -8 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \\ -2 & -8 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

จงตอบคำถามต่อไปนี้ พร้อมแสดงเหตุผลประกอบ

(ก) หลักของเมทริกซ์ A แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^4$ หรือไม่ และสมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ มีผลเฉลยสำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{b} \in \mathbb{R}^4$ หรือไม่

(ข) หลักของเมทริกซ์ B แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^4$ หรือไม่ และสมการเมทริกซ์ $B\vec{x} = \vec{b}$ มีผลเฉลยสำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{b} \in \mathbb{R}^4$ หรือไม่

7. จงแสดงว่า ถ้า $c \neq 0$ แล้ว $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\} = \text{Span}\{c\vec{v}_1, c\vec{v}_2, \ldots, c\vec{v}_p\}$

8. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$
จงหา $AB, BA, (AB)^T, A^TB^T, CA$ และ C^TB

9. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $A^3 = \underline{0}$

10. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 8 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$
    จงหา AB และ AC

11. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ X ซึ่งทำให้ $A^T A = X - I_3$

12. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ และ $AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 6 & -9 & 3 \end{bmatrix}$
    จงหาหลักที่หนึ่งและหลักที่สองของ B

13. กำหนดให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ จงหา $\vec{u}^T\vec{v}, \vec{v}^T\vec{u}, \vec{u}\vec{v}^T$ และ $\vec{v}\vec{u}^T$

14. จงแสดงว่า ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^m$ แล้ว $\vec{u}^T\vec{v} = \vec{v}^T\vec{u}$

1.4 เซตผลเฉลยของระบบเชิงเส้นและอิสระเชิงเส้น

ระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์ (homogeneous linear system) คือระบบเชิงเส้นที่สามารถเขียนได้ในรูปแบบ

$$A\vec{x} = \vec{0}_m$$

เมื่อ A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ และ $\vec{0}_m \in \mathbb{R}^m$

สังเกตว่าระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์มีเวกเตอร์ $\vec{0}_n \in \mathbb{R}^n$ เป็นผลเฉลยอย่างน้อยหนึ่งชุดเสมอ ซึ่งเรียกว่า **ผลเฉลยชัด (trivial solution)** ดังนั้น สำหรับระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์ เราจึงสนใจตรวจสอบการมีผลเฉลยอื่นที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ ซึ่งเรียกว่า**ผลเฉลยไม่ชัด (nontrivial solution)**

เนื่องจากเมทริกซ์แต่งเติมของระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์ $A\vec{x} = \vec{0}_m$ คือ

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \vec{0}_m \end{array}\right]$$

และหากใช้การดำเนินการแถวลดรูปเมทริกซ์แต่งเติมนี้ จะได้เมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปเป็น

$$\left[\begin{array}{c|c} B & \vec{0}_m \end{array}\right]$$

ซึ่งพบว่า หลักทางขวามือสุดจะเป็นเวกเตอร์ศูนย์เสมอ
ดังนั้นจึงเพียงพอที่จะลดรูปเฉพาะเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ A ยิ่งกว่านั้น เราได้ว่า

ทฤษฎีบท 1.4.1 *ระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์ $A\vec{x} = \vec{0}_m$ มีผลเฉลยไม่ชัด ก็ต่อเมื่อ มีตัวแปรเสรีอย่างน้อยหนึ่งตัว นั่นคือ ก็ต่อเมื่อ A มีหลักที่ไม่เป็นหลักตัวหลัก*

ตัวอย่าง 1.4.1 จงพิจารณาว่าระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \end{array}$$

มีผลเฉลยไม่ชัดหรือไม่ ถ้ามีจงหาผลเฉลยทั้งหมดของระบบเชิงเส้นนี้

วิธีทำ เขียนเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ A และใช้การดำเนินการแถวลดรูปจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3 + 2R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3 + 3R_2 \end{matrix}$$

ดังนั้น หลักที่ 3 ไม่เป็นหลักตัวหลัก
ทำให้สรุปโดยทฤษฎีบท 1.4.1 ได้ว่าระบบเชิงเส้นนี้มีผลเฉลยไม่ชัด
เราจึงใช้การดำเนินการแถวต่อไปนี้จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปเป็น

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 + 3R_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

ซึ่งสมมูลกับระบบเชิงเส้น

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & - & 5x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

ทำให้เราได้

$$x_1 = 5x_3$$
$$x_2 = x_3$$
$$x_3 \text{ เป็นตัวแปรเสรี}$$

เป็นผลเฉลยทั้งหมดของระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์ที่กำหนดให้ □

หมายเหตุ จากตัวอย่างข้างต้น เราสามารถเขียนผลเฉลยทั้งหมดของระบบเชิงเส้นได้ในรูปแบบเวกเตอร์เป็น

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งเราอาจเขียนอีกแบบหนึ่งได้เป็น

$$\vec{x} = t \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ } t \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

ตัวอย่าง 1.4.2 จงหาเซตผลเฉลยของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์ $x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 0$

วิธีทำ เนื่องจากเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -8 \end{bmatrix}$ อยู่ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูป ดังนั้น เราได้

$$x_1 = -3x_2 + 8x_3$$
$$x_2 \text{ และ } x_3 \text{ เป็นตัวแปรเสรี}$$

หรือ

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_2 + 8x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ } x_2, x_3 \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

เป็นผลเฉลยทั้งหมดของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์ที่กำหนดให้ □

สังเกตว่า เราสามารถเขียนผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ได้ในรูปการรวมเชิงเส้น

$$\vec{x} = t_1\vec{v}_1 + \cdots + t_p\vec{v}_p$$

เมื่อ t_i เป็นตัวแปรเสรี สำหรับทุก $i = 1, \ldots, p$ เรียกว่า**ผลเฉลยในรูปแบบเวกเตอร์อิงตัวแปรเสริม (parametric vector form)**

ต่อไปเราจะหาผลเฉลยของระบบเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ (nonhomogeneous linear system) โดยเริ่มจาก

ตัวอย่าง 1.4.3 จงหาเซตผลเฉลยของสมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix} \text{ และ } \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ เขียนเมทริกซ์แต่งเติมของสมการเมทริกซ์นี้และดำเนินการแถวกับเมทริกซ์แต่งเติมไปเรื่อยๆ จะได้

$$[A \mid \vec{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 7 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3 + 2R_1 \end{array}$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3 + 3R_2 \end{array}$$

ดังนั้นหลักทางขวาสุดของเมทริกซ์แต่งเติมไม่เป็นหลักตัวหลัก
ทำให้สรุปโดยทฤษฎีบท 1.2.2 ได้ว่าสมการเมทริกซ์นี้มีผลเฉลย
เราจึงใช้การดำเนินการแถวต่อไปจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปเป็น

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 + 3R_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

ซึ่งเมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปนี้สมนัยกับระบบเชิงเส้น

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & - & 5x_3 & = & 5 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

เนื่องจากหลักที่ 1 และ 2 เป็นหลักตัวหลัก ดังนั้นเราได้ว่า x_1 และ x_2 เป็นตัวแปรพื้นฐานและ x_3 เป็นตัวแปรเสรี ทำให้เราได้

$$x_1 = 5 + 5x_3$$
$$x_2 = 2 + x_3$$
$$x_3 \text{ เป็นตัวแปรเสรี}$$

หรือ

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+5x_3 \\ 2+x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ } x_3 \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

เป็นผลเฉลยทั้งหมดของสมการเมทริกซ์ที่กำหนดให้ □

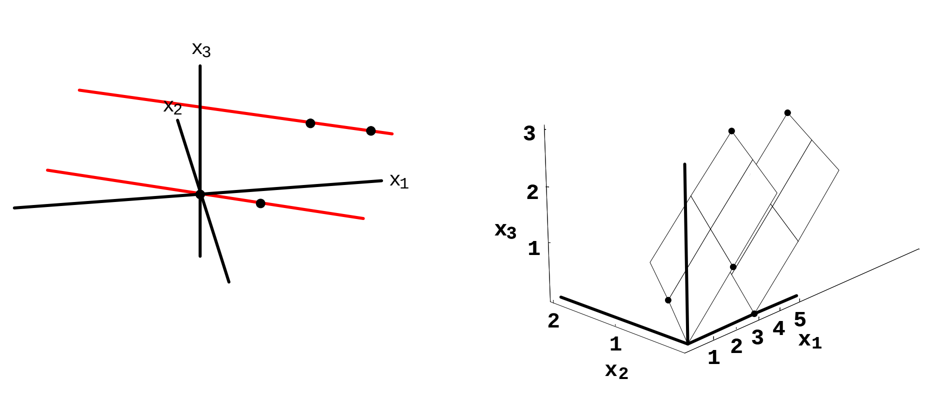
สังเกตว่า เมทริกซ์ A ในตัวอย่าง 1.4.3 เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบเชิงเส้นในตัวอย่าง 1.4.1 และผลเฉลยทั่วไปของสมการเมทริกซ์ในตัวอย่าง 1.4.3 อยู่ในรูปของ $\vec{x} = \vec{p} + \vec{v}_h$ โดยที่ $\vec{v}_h$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์ในตัวอย่าง 1.4.1 และ $\vec{p}$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของระบบเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ในตัวอย่าง 1.4.3 ซึ่งเราสามารถสรุปในกรณีทั่วไปได้ว่า

ทฤษฎีบท 1.4.2 *ถ้าระบบเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ มีผลเฉลยหนึ่งเป็น $\vec{p}$ เรียกว่า**ผลเฉลยเฉพาะ (particular solution)** แล้วจะได้ว่าผลเฉลยทั่วไปของระบบเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ จะอยู่ในรูป*

$$\vec{x} = \vec{p} + \vec{v}_h$$

โดยที่ $\vec{v}_h$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์ $A\vec{x} = \vec{0}$

ในกรณีเวกเตอร์ $\vec{x}$ อยู่ใน $\mathbb{R}^3$ เราอาจแสดงผลเฉลยของระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์และไม่เอกพันธุ์ได้ในรูปเส้นตรงที่ขนานกันและระนาบที่ขนานกัน โดยที่ผลเฉลยของระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์จะผ่านจุดกำเนิด ดังรูป



เรากล่าวว่าเซตของเวกเตอร์ $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ ใน $\mathbb{R}^m$ เป็น**อิสระเชิงเส้น (linearly independent)** ก็ต่อเมื่อสมการเอกพันธุ์ $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_p\vec{v}_p = \vec{0}_m$ มีเพียงผลเฉลยชัด ดังนั้น เซตของเวกเตอร์ $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง $c_1, c_2, \ldots, c_p$ ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันซึ่งทำให้ $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_p\vec{v}_p = \vec{0}_m$

ตัวอย่าง 1.4.4 กำหนดให้ $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
จงพิจารณาว่า $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้นหรือไม่ ถ้าไม่ จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง 3 เวกเตอร์นี้

วิธีทำ เนื่องจากเราต้องการตรวจสอบว่าสมการเอกพันธุ์ $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 = \vec{0}_3$ มีเพียงผลเฉลยชัดหรือไม่ เราจึงเริ่มโดยเขียนเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ A และใช้การดำเนินการแถวลดรูปจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R_2 - 3R_1 \\ R_3 + 2R_1 \end{matrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3 + R_2 \end{matrix}$$

เพราะฉะนั้นหลักที่ 3 ไม่เป็นหลักตัวหลัก จึงสรุปโดยทฤษฎีบท 1.4.1 ได้ว่าสมการเอกพันธุ์ $x_1\vec{v}_1+x_2\vec{v}_2+x_3\vec{v}_3 = \vec{0}_3$ มีผลเฉลยไม่ชัด ดังนั้น $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ ไม่เป็นเซตอิสระเชิงเส้นและเราหาความสัมพันธ์ระหว่าง 3 เวกเตอร์นี้โดยลดรูปเมทริกซ์แต่งเติมที่มีอยู่ต่อไปจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปเป็น

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 + \frac{3}{4}R_2 \\ \frac{1}{4}R_2 \\ \\ \end{matrix}$$

ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & & + \frac{3}{4}x_3 & = & 0 \\ & x_2 & + \frac{1}{4}x_3 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \qquad \text{นั่นคือ} \qquad \begin{array}{rcl} x_1 & = & -\frac{3}{4}x_3 \\ x_2 & = & -\frac{1}{4}x_3 \end{array}$$

โดยเราอาจเลือก $x_3 = -4$ ทำให้เรามี $x_1 = 3$ และ $x_2 = 1$
ดังนั้น ความสัมพันธ์ระหว่าง 3 เวกเตอร์นี้คือ $3\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - 4\vec{v}_3 = \vec{0}$ □

สำหรับ $m \times n$ เมทริกซ์ A เรากล่าวว่า**หลักของ A เป็นอิสระเชิงเส้น** ก็ต่อเมื่อ เซตของเวกเตอร์หลักที่ได้จากหลักของเมทริกซ์ A เป็นเซตอิสระเชิงเส้น นั่นคือ สมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{0}$ มีเพียงผลเฉลยชัด ซึ่งเราจะเห็นว่า

บทแทรก 1.4.3 *หลักของเมทริกซ์ A เป็นอิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ ทุกหลักของเมทริกซ์ A เป็นหลักตัวหลัก*

ตัวอย่าง 1.4.5 จงพิจารณาว่าหลักของเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & -6 & 6 \\ 3 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่ เพราะเหตุใด

วิธีทำ เราใช้การดำเนินการแถวลดรูป A จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & -6 & 6 \\ 3 & 3 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R_2 + 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3 + \frac{1}{2}R_2 \end{matrix}$$

ทำให้ได้ว่าทุกหลักของเมทริกซ์ A เป็นหลักตัวหลัก
ดังนั้น หลักของเมทริกซ์ A เป็นอิสระเชิงเส้น $\square$

ข้อสังเกต 1. ถ้ามีบางเวกเตอร์ $\vec{v}$ ในเซต S เป็นเวกเตอร์ศูนย์ แล้ว S **ไม่เป็น**เซตอิสระเชิงเส้น

2. เซต $\{\vec{v}\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ $\vec{v} \neq \vec{0}$
3. เซต $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ ไม่เป็นเซตอิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง c ซึ่ง $\vec{v}_1 = c\vec{v}_2$
4. เซตของเวกเตอร์ $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ ไม่เป็นเซตอิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ มีอย่างน้อยหนึ่งเวกเตอร์ใน S อยู่ในรูปการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ตัวอื่นในเซต S
5. ถ้า $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ เป็นเซตของ p เวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^m$ โดยที่ $p > m$ แล้ว S ไม่เป็นเซตอิสระเชิงเส้น เพราะว่าจำนวนหลักมากกว่าจำนวนแถวจึงได้ว่าทุกหลักไม่สามารถเป็นหลักตัวหลักได้

ตัวอย่าง 1.4.6 จากข้อสังเกตข้างต้น เราได้ว่าเซตต่อไปนี้**ไม่เป็น**เซตอิสระเชิงเส้น

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

$$S_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}, S_4 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

แบบฝึกหัด 1.4

1. จงพิจารณาว่าระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์ต่อไปนี้มีผลเฉลยไม่ชัดหรือไม่ ถ้ามี จงเขียนผลเฉลยทั่วไปในรูปแบบเวกเตอร์อิงตัวแปรเสริม

(ก) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \\ -2x_1 - 7x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ (ข) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

(ค) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0 \\ -5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ (ง) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

2. จงเขียนผลเฉลยของ $A\vec{x} = \vec{0}$ ในรูปแบบเวกเตอร์อิงตัวแปรเสริม เมื่อ กำหนดให้ A สมมูลแถวกับเมทริกซ์ต่อไปนี้

(ก) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (ข) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (ค) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(ง) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (จ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -5 & 8 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. จงหาเซตผลเฉลยของระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์

(ก) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 9x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$ (ข) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$

4. จากเซตผลเฉลยของระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์ในข้อก่อนหน้านี้ จงหาผลเฉลยทั่วไปของระบบเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ต่อไปนี้ในรูปแบบเวกเตอร์อิงตัวแปรเสริมพร้อมทั้งบอกและเปรียบเทียบลักษณะทางเรขาคณิตของเซตผลเฉลยนี้กับเซตผลเฉลยของระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์

(ก) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 9x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$ (ข) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ 3x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 6 \end{cases}$

5. จงหาค่าของ a ซึ่งทำให้ระบบเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 &= 0 \end{aligned}$$

มีผลเฉลยไม่ชัด พร้อมทั้งหาเซตผลเฉลยของระบบเชิงเส้นนี้ด้วย

6. จงหาเซตผลเฉลยของระบบเชิงเส้น

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= \lambda x_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= \lambda x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= \lambda x_3 \end{aligned}$$

เมื่อ (ก) $\lambda = 0$ (ข) $\lambda = 1$ (ค) $\lambda = 2$

7. จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์ต่อไปนี้เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่ เพราะเหตุใด

(ก) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ข) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ (ค) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

8. จงพิจารณาว่าหลักของเมทริกซ์ต่อไปนี้เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่ เพราะเหตุใด

(ก) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (ข) $\begin{bmatrix} 0 & -8 & 5 \\ 3 & -7 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ (ค) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ (ง) $\begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & -7 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

9. จงหาค่าของ h ซึ่งทำให้เซตต่อไปนี้เป็นเซตอิสระเชิงเส้น

(ก) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ h \end{bmatrix} \right\}$ (ข) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ h \\ -9 \end{bmatrix} \right\}$

(ค) $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -8 \end{bmatrix} \right\}$ (ง) $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ h \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

10. ให้ $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ เซตอิสระเชิงเส้นใน $\mathbb{R}^m$
จงแสดงว่าถ้า $c \neq 0$ แล้ว $\{c\vec{v}_1, c\vec{v}_2, \ldots, c\vec{v}_p\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น

คำตอบแบบฝึกหัด 1.1 1.$-3A = \begin{bmatrix} 3 & 0-6 \\ -9 & 15-3 \end{bmatrix}$, $A+2B = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 \\ -3 & -9 & 1 \end{bmatrix}$, $B-2A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -9 & 8 & -2 \end{bmatrix}$;

2.$\begin{bmatrix} 7.5 & 5 & -2.5 & 2.5 \\ 0 & -5 & 2.5 & 0 \end{bmatrix}$; 3.$\begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.75 & 1 \\ 0.25 & -0.25 \end{bmatrix}$; 4.(ก)ต้องกัน, (ข)ไม่ต้องกัน, (ค)ต้องกัน, (ง)ต้องกัน;

5.(ก)$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$/$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & 22 \end{array}\right]$/ $x_1 = 2, x_2 = 6$, (ข)$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ / $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right]$ / $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$,

(ค)$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 9 \end{bmatrix}$/ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & 9 & 7 \end{array}\right]$/ $x_1 = 5, x_2 = 3, x_3 = -1$,

(ง)$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$/ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$/ $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 1$; 6.(ก)มี, (ข)ไม่มี

คำตอบแบบฝึกหัด 1.2 1.(ก)ขั้นบันไดลดรูป, (ข)ขั้นบันไดแต่ไม่เป็นขั้นบันไดลดรูป, (ค)ขั้นบันไดแต่ไม่เป็นขั้นบันไดลดรูป, (ง)ไม่เป็นขั้นบันได, (จ)ขั้นบันไดลดรูป, (ฉ)ขั้นบันไดลดรูป;

2.(ก)หลัก1,2 / $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2.5 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, (ข)หลัก1,2 / $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 1 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, (ค)หลัก1,3 / $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}$;

3.(ก)ต้องกัน ชุดเดียว, (ข)ไม่ต้องกัน, (ค)ต้องกัน ชุดเดียว, (ง)ต้องกัน อนันต์ชุด;

4.(ก) ($x_1 = -1-12x_3, x_2 = -2-4x_3$, x_3 เป็นตัวแปรเสรี), (ข)ไม่ต้องกัน, (ค)ไม่ต้องกัน, (ง) ($x_1 = 1.6+0.6x_3-0.6x_4, x_2 = 0.1+0.4x_3-0.1x_4$, x_3 และ x_4 เป็นตัวแปรเสรี), (จ) ($x_1 = 3-3x_2, x_3 = 3$ และ x_2 เป็นตัวแปรเสรี), (ฉ)ไม่ต้องกัน, (ช) ($x_1 = 5+7x_2-6x_4, x_3 = -3+2x_4$, x_2 และ x_4 เป็นตัวแปรเสรี), (ซ) ($x_1 = \frac{4}{3}x_2, x_3 = 0$ และ x_2 เป็นตัวแปรเสรี), (ฌ) ($x_1 = 5+3x_4, x_2 = 1+4x_4, x_3 = 4-9x_4$ และ x_4 เป็นตัวแปรเสรี), (ญ)ไม่ต้องกัน;

5.(ก)$h \neq 2$, (ข)ทุก $h \in \mathbb{R}$, (ค)ทุก $h \in \mathbb{R}$, (ง)$h \neq 0$;

6.(ก)ไม่ต้องกัน $\Leftrightarrow a = -3$, (ข)ชุดเดียว $\Leftrightarrow a \neq 3, -3$, (ค)อนันต์ชุด $\Leftrightarrow a = 3$; 7.$\alpha = \dfrac{\pi}{2}, \beta = \pi, \gamma = 0$

คำตอบแบบฝึกหัด 1.3 1.(ก)อยู่, (ข)ไม่อยู่, (ค)อยู่, (ง)ไม่อยู่; 2.(ก)$h = -17$, (ข)$h = -3.5$;

3.(ก)$-4b_1 - 2b_2 + b_3 = 0$, (ข)$2b_1 + b_3 = 0$, (ค)ทุก $\vec{b}$, 4.(ก)ไม่แผ่ทั่ว, (ข)แผ่ทั่ว, (ค)ไม่แผ่ทั่ว;

5.(ก)$h = 10$, (ข)$h = -8$; 6.(ก)ไม่, (ข)ไม่; 11.$\begin{bmatrix} 17 & 8 & -12 \\ 8 & 6 & -8 \\ -12 & -8 & 14 \end{bmatrix}$; 12.$\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -8 \\ -5 \end{bmatrix}$

คำตอบแบบฝึกหัด 1.4 1.(ก)$\vec{x} = \begin{bmatrix} -\frac{17}{8} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix} x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}$, (ข)$\vec{x} = \vec{0}$, (ค)$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}$, (ง)$\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_4,\ x_4 \in \mathbb{R}$;

2.(ก)$\vec{x} = \begin{bmatrix} 47 \\ 8 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} x_4,\ x_4 \in \mathbb{R}$, (ข)$\vec{x} = \begin{bmatrix} -19 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}$, (ค)$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_5,\ x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$,

(ง) $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_5 + \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_6,\ x_3, x_5, x_6 \in \mathbb{R}$, (จ)$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 19 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_5 + \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_7,\ x_1, x_4, x_5, x_7 \in \mathbb{R}$;

3.(ก)$\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}$, (ข)$\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}$; 4.(ก)$\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ x_3 \in \mathbb{R}$, (ข)$\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},\ x_3 \in \mathbb{R}$;

5.$a = -3$ / $\vec{x} = \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}$; 6.(ก)$\vec{x} = \vec{0}$, (ข)$\vec{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}$, (ค)$\vec{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}$;

7.(ก)เป็น, (ข)ไม่เป็น, (ค)ไม่เป็น; 8.(ก)เป็น, (ข)เป็น, (ค)เป็น, (ง)ไม่เป็น; 9.(ก)$h \neq 6$, (ข)$h \in \mathbb{R}$, (ค)$h \neq 4$, (ง)$h \neq -1, 2$

บทที่ 2

การแปลงเชิงเส้นและพีชคณิตเมทริกซ์

2.1 การแปลงเชิงเส้นและเมทริกซ์มาตรฐาน

ให้ A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ เราเรียกฟังก์ชัน $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ กำหนดโดย

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}$$

สำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ว่า**การแปลงเมทริกซ์ (matrix transformation)**

ตัวอย่าง 2.1.1 ให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ และกำหนดการแปลงเมทริกซ์ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ โดย $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ นั่นคือ สำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ เราได้

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + 7x_2 \\ x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \end{bmatrix}$$

(ก) จงหา $T(\vec{u})$

วิธีทำ $T(\vec{u}) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 + 7(-2) \\ 1 - 3(-2) \\ 3(1) + 5(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix}$ $\square$

(ข) จงหาเวกเตอร์ $\vec{x}$ ซึ่ง $T(\vec{x}) = \vec{b}$

วิธีทำ จาก $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ ดังนั้นเราต้องการผลเฉลยทั้งหมดของสมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ ซึ่งเราหาได้โดยลดรูปเมทริกซ์แต่งเติม $[A \mid \vec{b}]$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปดังนี้

$$[A \mid \vec{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 7 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ดังนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ □

(ค) เวกเตอร์ $\vec{x}$ ที่ได้ในข้อ (ข) มีเพียงเวกเตอร์เดียวหรือไม่

วิธีทำ เนื่องจากไม่มีตัวแปรเสรี เวกเตอร์ $\vec{x}$ ที่ได้จึงมีเพียงเวกเตอร์เดียว □

(ง) จงพิจารณาว่า $\vec{c}$ อยู่ในเรนจ์ของ T หรือไม่ เพราะเหตุใด

วิธีทำ เพราะว่า $\vec{c}$ อยู่ในเรนจ์ของ T ก็ต่อเมื่อ มีเวกเตอร์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ ที่ทำให้ $T(\vec{x}) = \vec{c}$ ดังนั้นเราจะตรวจสอบว่าสมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{c}$ มีผลเฉลยหรือไม่ โดยลดรูปเมทริกซ์แต่งเติม $[A \mid \vec{c}]$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดดังนี้

$$[A \mid \vec{c}] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 7 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 26 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -25 \end{array}\right]$$

เพราะฉะนั้นเราสรุปโดยทฤษฎีบท 1.2.2 ได้ว่าสมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{c}$ ไม่มีผลเฉลย ส่งผลให้ $\vec{c}$ ไม่อยู่ในเรนจ์ของ T □

เราเรียกฟังก์ชัน $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ว่า**การแปลงเชิงเส้น (linear transformation)** ถ้าสำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ และจำนวนจริง c เราได้ว่า

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) \quad \text{และ} \quad T(c\vec{u}) = cT(\vec{u})$$

ข้อสังเกต 1. ฟังก์ชัน T เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก $\mathbb{R}^n$ ไป $\mathbb{R}^m$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ และจำนวนจริง c และ d จะได้ว่า

$$T(c\vec{u} + d\vec{v}) = cT(\vec{u}) + dT(\vec{v})$$

2. ถ้า $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ เป็นการแปลงเชิงเส้นแล้ว

$$T(\vec{0}_n) = \vec{0}_m \quad \text{และ} \quad T(-\vec{v}) = -T(\vec{v}) \text{ สำหรับทุกๆ เวกเตอร์ } \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

ยิ่งกว่านั้น สำหรับทุกๆ $m \times n$ เมทริกซ์ A เวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ และจำนวนจริง c เราได้ว่า

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} \quad \text{และ} \quad A(c\vec{u}) = c(A\vec{u})$$

ดังนั้น

ทฤษฎีบท 2.1.1 *ทุกๆ การแปลงเมทริกซ์เป็นการแปลงเชิงเส้น*

ตัวอย่าง 2.1.2 ฟังก์ชันต่อไปนี้**ไม่เป็น**การแปลงเชิงเส้น

(ก) $T(x_1) = \sin x_1$

เพราะว่า $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ แต่ $\frac{1}{6}\sin\pi = 0$

ดังนั้น $\sin(\frac{\pi}{6}) \neq \frac{1}{6}\sin\pi$

(ข) $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1-e^{x_1}\\x_1+3x_2\end{bmatrix}$

เพราะว่า $\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ และ $T\left(\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\6\end{bmatrix}$

แต่ $T\left(\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)+T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1+e^{-1}\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1+e\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+e+e^{-1}\\6\end{bmatrix}$

(ค) $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=x_1^2+x_2^2$

เพราะว่า $T\left(\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\right)=4$ แต่ $2T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=2(1)=2$

ตัวอย่าง 2.1.3 ให้ r เป็นจำนวนจริงบวก กำหนด $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ โดย

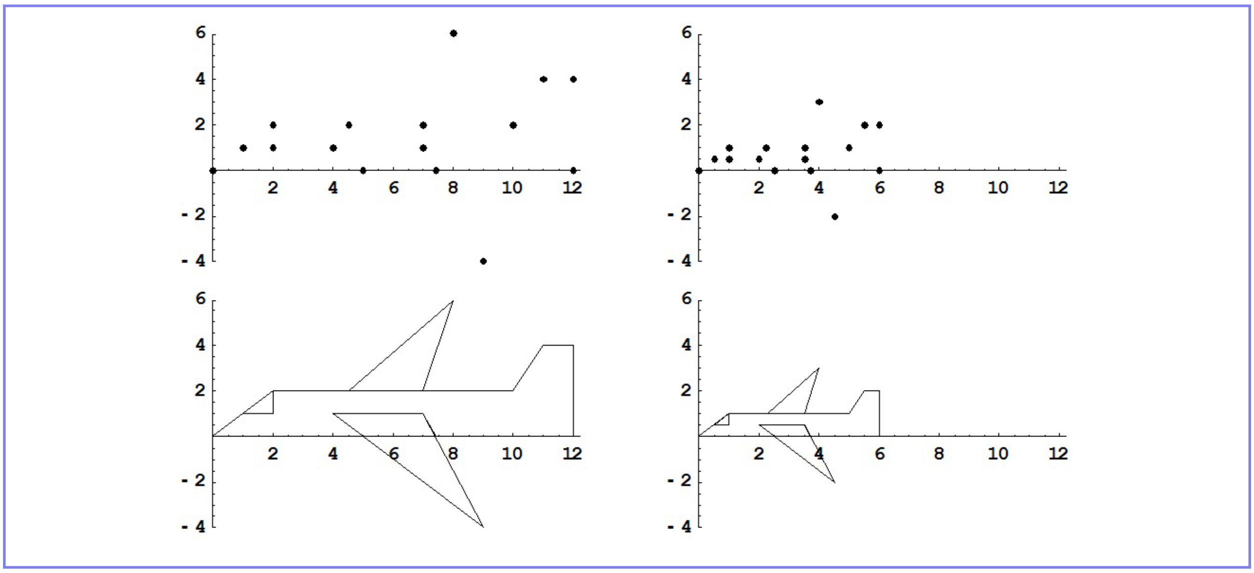
$$T(\vec{x})=r\vec{x} \quad \text{สำหรับทุกๆ เวกเตอร์ } \vec{x}\in\mathbb{R}^2$$

เราเรียก T ว่า**การหดตัว (contraction)** เมื่อ $0<r<1$ และเรียก T ว่า**การเปลี่ยนขนาด (dilation)** เมื่อ $r>1$ เนื่องจากสำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^2$ และ $c\in\mathbb{R}$ เรามี

$$T(\vec{x}+\vec{y})=r(\vec{x}+\vec{y})=r\vec{x}+r\vec{y}=T(\vec{x})+T(\vec{y})$$
$$\text{และ}\quad T(c\vec{x})=r(c\vec{x})=(rc)\vec{x}=(cr)\vec{x}=c(r\vec{x})=cT(\vec{x})$$

ดังนั้น T เป็นการแปลงเชิงเส้น

เราสามารถแสดงผลของแปลงเชิงเส้นการหดตัวเมื่อ $r=0.5$ บนระนาบได้ดังรูป



ตัวอย่าง 2.1.4 ให้ $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่ง

$$T(\vec{u})=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \qquad \text{และ} \qquad T(\vec{v})=\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$$

จงหา $T(2\vec{u})$ และ $T(3\vec{u}-\vec{v})$

วิธีทำ เนื่องจาก T เป็นการแปลงเชิงเส้น ดังนั้น เราได้ว่า

$$T(2\vec{u}) = 2T(\vec{u}) = 2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$$

และ

$$T(3\vec{u}-\vec{v}) = 3T(\vec{u}) - T(\vec{v}) = 3\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

ตามต้องการ $\square$

ตัวอย่าง 2.1.5 ให้ $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \vec{y}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}, \vec{y}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$
และกำหนดให้ $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่ง $T(\vec{e}_1) = \vec{y}_1$ และ $T(\vec{e}_2) = \vec{y}_2$
จงหาภาพ (image) ของ $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ ภายใต้ T

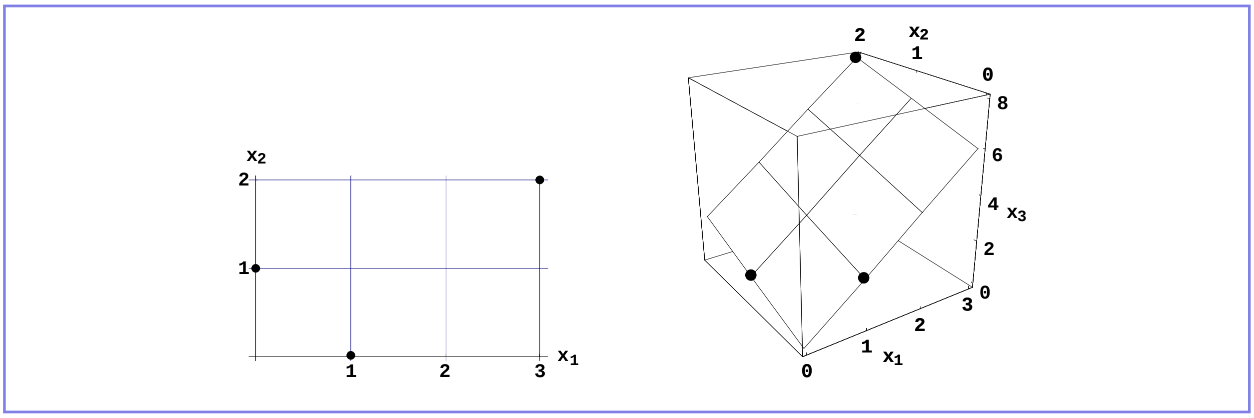
วิธีทำ เพราะว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้น และ

$$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \quad \text{และ} \quad \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$$

ดังนั้น เราได้ว่า

$$\begin{aligned}
T\left(\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right) &= T(3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2)\\
&= 3T(\vec{e}_1) + 2T(\vec{e}_2)\\
&= 3\vec{y}_1 + 2\vec{y}_2\\
&= 3\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\2\\8\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ซึ่งเราแสดงการส่งเวกเตอร์ของการแปลงเชิงเส้น $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ได้ดังรูป



และเรามี

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) &= T(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) \\ &= x_1T(\vec{e}_1) + x_2T(\vec{e}_2) \\ &= x_1\vec{y}_1 + x_2\vec{y}_2 \\ &= x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ยิ่งกว่านั้น เรายังได้ด้วยว่า $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\square$

ตัวอย่าง 2.1.6 ให้ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่ง

$$T\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

จงหา $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$ สำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

วิธีทำ ก่อนอื่นเราจะเขียน $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ นั่นคือหาจำนวนจริง c_1 และ c_2 ซึ่งทำให้

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

โดยเขียนเมทริกซ์แต่งเติมของสมการเวกเตอร์และใช้การดำเนินการแถวลดรูปจนมีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 - 3x_2 \\ 0 & 1 & -x_1 + 4x_2 \end{array}\right]$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (x_1 - 3x_2)\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + (-x_1 + 4x_2)\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เพราะว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้น ดังนั้น เราจึงได้ว่า

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) &= T\left((x_1 - 3x_2)\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + (-x_1 + 4x_2)\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= (x_1 - 3x_2)T\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + (-x_1 + 4x_2)T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= (x_1 - 3x_2)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (-x_1 + 4x_2)\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2x_1 + 10x_2 \\ 3x_1 - 11x_2 \\ -2x_1 + 7x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ยิ่งกว่านั้น เรายังได้ด้วยว่า $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 3 & -11 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ □

เราทราบมาแล้วว่าทุกๆ การแปลงเมทริกซ์เป็นการแปลงเชิงเส้น ต่อไปเราจะแสดงว่าทุกๆ การแปลงเชิงเส้น T จาก $\mathbb{R}^n$ ไป $\mathbb{R}^m$ เป็นการแปลงเมทริกซ์ โดยการหาเมทริกซ์ A มิติ $m \times n$ ซึ่งทำให้

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}$$

สำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ดังนี้

ให้ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ เป็นการแปลงเชิงเส้น

สำหรับแต่ละ $j = 1, 2, \ldots, n$ เขียน $\vec{e}_j$ แทนเวกเตอร์ที่ได้จากหลักที่ j ของเมทริกซ์เอกลักษณ์ I_n กำหนด $m \times n$ เมทริกซ์ A ให้มีหลักที่ j เป็น $T(\vec{e}_j)$ สำหรับทุกๆ $j = 1, 2, \ldots, n$

สังเกตว่าสำหรับแต่ละเวกเตอร์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ เราได้ว่า

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$$

ดังนั้น

$$T(\vec{x}) = T(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n) = x_1T(\vec{e}_1) + x_2T(\vec{e}_2) + \cdots + x_nT(\vec{e}_n) = A\vec{x}$$

เพราะฉะนั้น เราสรุปได้ว่า

ทฤษฎีบท 2.1.2 *ให้ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ เป็นการแปลงเชิงเส้น*
กำหนด $m \times n$ เมทริกซ์ A ให้มีหลักที่ j เป็นเวกเตอร์ $T(\vec{e}_j)$ เมื่อ $\vec{e}_j$ เป็นเวกเตอร์ที่ได้จากหลักที่ j ของเมทริกซ์เอกลักษณ์ I_n สำหรับทุก $j = 1, 2, \ldots, n$ นั่นคือ

$$A = \begin{bmatrix} T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) & \cdots & T(\vec{e}_n) \end{bmatrix}_{m \times n}$$

จะได้ว่า $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ สำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ดังนั้น T เป็นการแปลงเมทริกซ์

เมทริกซ์ A ในทฤษฎีบท 2.1.2 เรียกว่า**เมทริกซ์มาตรฐาน (standard matrix) สำหรับการแปลงเชิงเส้น** T

ตัวอย่าง 2.1.7 จงหาเมทริกซ์มาตรฐานสำหรับการแปลงเชิงเส้น $T(\vec{x}) = r\vec{x}$ สำหรับทุกเวกเตอร์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ และ r เป็นจำนวนจริงบวก

วิธีทำ เนื่องจาก $T(\vec{e}_1) = r\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $T(\vec{e}_2) = r\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น T □

บางครั้งเพื่อความกะทัดรัด เราเขียนเวกเตอร์แถวแทนเวกเตอร์หลัก เช่น (x_1, x_2) แทน $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ และในการนิยาม T เราเขียน $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ แทน $T((x_1, x_2, \ldots, x_n))$

ตัวอย่าง 2.1.8 กำหนด $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ โดย $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + 2x_3, 0, x_2)$ จงแสดงว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้น พร้อมทั้งหาเมทริกซ์มาตรฐาน A สำหรับ T

วิธีทำ เนื่องจาก

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + 2x_3 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น T เป็นการแปลงเมทริกซ์
เพราะฉะนั้นเราสรุปโดยทฤษฎีบท 2.1.1 ได้ว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้น
และเมทริกซ์มาตรฐานสำหรับ T คือ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ □

ให้ T เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}^n$ ไป $\mathbb{R}^m$

1. เรากล่าวว่า T เป็น**ฟังก์ชันทั่วถึง (onto)** $\mathbb{R}^m$
ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ มีเวกเตอร์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ซึ่ง $T(\vec{x}) = \vec{b}$
2. เรากล่าวว่า T **มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one)** หรือเขียนสั้นๆ เป็น "T 1-1"
ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละเวกเตอร์ $\vec{x}$ และ $\vec{y}$ ใน $\mathbb{R}^n$ ถ้า $T(\vec{x}) = T(\vec{y})$ แล้ว $\vec{x} = \vec{y}$

ในกรณีที่ T เป็นการแปลงเชิงเส้น เรามี

ทฤษฎีบท 2.1.3 *ให้ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ เป็นการแปลงเชิงเส้น เราได้ว่า T มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง
ก็ต่อเมื่อ ระบบเชิงเส้น $T(\vec{x}) = \vec{0}_m$ มีเพียงผลเฉลยชัด
นั่นคือ ก็ต่อเมื่อ หลักของเมทริกซ์มาตรฐาน A สำหรับ T เป็นอิสระเชิงเส้น*

เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 1.3.4 และบทแทรก 1.4.3 เราได้เกณฑ์ในการพิจารณาว่า การแปลงเชิงเส้น T มีสมบัติทั่วถึงหรือมีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนี้

บทแทรก 2.1.4 *ให้ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ เป็นการแปลงเชิงเส้นและ A เป็นเมทริกซ์มาตรฐานสำหรับ T เราได้ว่า*
1. T มีสมบัติทั่วถึง $\mathbb{R}^m$ ก็ต่อเมื่อ หลักของเมทริกซ์ A แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^m$ ก็ต่อเมื่อ A มีตำแหน่งตัวหลักในทุกๆ แถว
2. T มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ A มีตำแหน่งตัวหลักในทุกๆ หลัก

ตัวอย่าง 2.1.9 จงตรวจสอบว่าการแปลงเชิงเส้นที่มีเมทริกซ์มาตรฐานเป็น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

มีสมบัติทั่วถึงหรือมีสมบัติ 1-1 หรือไม่ เพราะเหตุใด

วิธีทำ ลดรูปเมทริกซ์ A จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดเป็น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น A มีตำแหน่งตัวหลักในทุกๆ หลักและในทุกๆ แถว
โดยทฤษฎีบท 2.1.4 เราสรุปได้ว่า T มีสมบัติ 1-1 และมีสมบัติทั่วถึง $\square$

ตัวอย่าง 2.1.10 จงตรวจสอบว่าการแปลงเชิงเส้นในตัวอย่าง 2.1.8 มีสมบัติทั่วถึง หรือ มีสมบัติ 1-1 หรือไม่ เพราะเหตุใด

วิธีทำ ลดรูปเมทริกซ์มาตรฐาน A สำหรับการแปลงเชิงเส้น T จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดเป็น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น A มีตำแหน่งตัวหลักในทุกๆ หลักแต่ไม่มีตำแหน่งตัวหลักในแถวสุดท้าย
โดยทฤษฎีบท 2.1.4 เราสรุปได้ว่า T มีสมบัติ 1-1 แต่ไม่มีสมบัติทั่วถึง $\square$

ตัวอย่าง 2.1.11 จงพิจารณาว่ามีการแปลงเชิงเส้น $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ ซึ่งมีสมบัติทั่วถึง หรือไม่ เพราะเหตุใด

วิธีทำ เนื่องจากเมทริกซ์มาตรฐานของการแปลงเชิงเส้น $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ มีมิติ 5×3 ทำให้ได้ว่า A มีตำแหน่งตัวหลักมีได้ไม่เกิน 3 ตำแหน่ง แต่ A มี 5 แถวจึงเป็นไปไม่ได้ที่ A จะมีตำแหน่งตัวหลักในทุกๆ แถว โดยบทแทรก 2.1.4 (ก) จะได้ว่า T ไม่มีสมบัติทั่วถึง
ดังนั้น ไม่มีการแปลงเชิงเส้น $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ ซึ่งมีสมบัติทั่วถึง $\square$

แบบฝึกหัด 2.1

1. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -9 & 9 & -6 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
จงหาเวกเตอร์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ ทั้งหมดซึ่งการแปลงเมทริกซ์ $T : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ ส่งไปเวกเตอร์ศูนย์ และ จงพิจารณาว่าเวกเตอร์ $\vec{b}$ อยู่ในเรนจ์ของ T หรือไม่ เพราะเหตุใด

2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$
จงหาเวกเตอร์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ ทั้งหมดซึ่งการแปลงเมทริกซ์ $T : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ ส่งไปเวกเตอร์ศูนย์ และ จงพิจารณาว่าเวกเตอร์ $\vec{b}$ อยู่ในเรนจ์ของ T หรือไม่ เพราะเหตุใด

3. พิจารณาการแปลงเมทริกซ์ $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ เมื่อกำหนดเมทริกซ์ A และ เวกเตอร์ $\vec{b}$ ดังต่อไปนี้ จงหาเวกเตอร์ $\vec{x}$ ทั้งหมดซึ่ง $T(\vec{x}) = \vec{b}$ (ถ้ามี)
(ก) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ (ข) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & 6 \\ 3 & -5 & -9 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} -6 \\ -12 \\ 5 \end{bmatrix}$
(ค) $A = \begin{bmatrix} 1 & -7 & -5 \\ -3 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ (ง) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \\ -3 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$

4. จงแสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้**ไม่**เป็นการแปลงเชิงเส้น
(ก) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_2 + 4 \end{bmatrix}$ (ข) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = |x_1| + |x_2|$

5. จงแสดงว่าฟังก์ชัน T ต่อไปนี้เป็นการแปลงเชิงเส้นโดยหาเมทริกซ์มาตรฐาน A ซึ่งทำให้ $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ พร้อมทั้งพิจารณาว่า T มีสมบัติทั่วถึงหรือมีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่ เพราะเหตุใด
(ก) $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_2, -2x_1 + x_2)$
(ข) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 - x_3, 0, x_1 - x_2, x_3 - x_4)$
(ค) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 + x_3, x_1 - 2x_3)$
(ง) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 5x_1 - x_2 + 3x_3, 4x_1 + x_2 + 2x_3)$

6. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นไปได้หรือไม่ พร้อมอธิบายเหตุผลหรือยกตัวอย่างประกอบ
(ก) มีการแปลงเชิงเส้น $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$ ซึ่งมีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง
(ข) มีการแปลงเชิงเส้น $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^8$ ซึ่งมีสมบัติทั่วถึง
(ค) มีการแปลงเชิงเส้น $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ซึ่งมีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง แต่ไม่มีสมบัติทั่วถึง

7. จงหาสูตรของการแปลงเชิงเส้น T ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้ และหาเมทริกซ์มาตรฐาน A สำหรับ T พร้อมทั้งพิจารณาว่า T มีสมบัติทั่วถึงหรือมีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่ เพราะเหตุใด
(ก) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
(ข) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

2.2 ปริภูมิย่อยของปริภูมิยุคลิด ฐานหลัก มิติ และแรงก์

2.2.1 ปริภูมิย่อยของปริภูมิยุคลิด

เราเรียกเซตย่อย H ของ $\mathbb{R}^m$ ซึ่งมีสมบัติ

1. $\vec{0}_m \in H$
2. สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v} \in H$ จะได้ว่า $\vec{u} + \vec{v} \in H$ และ
3. สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u} \in H$ และจำนวนจริง c จะได้ว่า $c\vec{u} \in H$

ว่า**ปริภูมิย่อย (subspace) ของ** $\mathbb{R}^m$

ตัวอย่าง 2.2.1 1. เราได้โดยง่ายว่า $\{\vec{0}_m\}$ และ $\mathbb{R}^m$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^m$

2. $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = -x_2\}$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^2$ (แสดงในตัวอย่าง 2.2.3)
3. $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 = x_2 + 3\}$ ไม่เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^2$
   เพราะว่า $(0, 0)$ ไม่อยู่ในเซตนี้
4. $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \sin(x_1 + x_2 + x_3) = 0\}$ ไม่เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$
   เพราะว่า $(\pi, 0, \pi) \in H$ แต่ $\frac{1}{6}(\pi, 0, \pi) \notin H$

เรายังมีตัวอย่างของปริภูมิย่อยอีกตัวอย่างที่สำคัญคือ

ทฤษฎีบท 2.2.1 *ให้ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p \in \mathbb{R}^m$ และ $H = \mathrm{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ จะได้ว่า H เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^m$ เรียกว่า**ปริภูมิย่อยของ** $\mathbb{R}^m$ **ที่แผ่ทั่วโดยเวกเตอร์** $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ (**subspace of** $\mathbb{R}^m$ **spanned by** $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$)*

พิสูจน์ โดยนิยามเราได้ว่า

$$H = \mathrm{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\} = \{c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_p\vec{v}_p : c_1, c_2, \ldots, c_p \in \mathbb{R}\}$$

เพราะว่า $\vec{0}_m = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \cdots + 0\vec{v}_p$ ดังนั้น $\vec{0}_m \in H$
ต่อมาให้ $\vec{u}, \vec{v} \in H$ และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ
จะได้ว่า $\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_p\vec{v}_p$ และ $\vec{v} = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + \cdots + b_p\vec{v}_p$
โดยที่ $a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_p \in \mathbb{R}$
เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= (a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_p\vec{v}_p) + (b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + \cdots + b_p\vec{v}_p) \\ &= (a_1 + b_1)\vec{v}_1 + (a_2 + b_2)\vec{v}_2 + \cdots + (a_p + b_p)\vec{v}_p\end{aligned}$$

และ

$$c\vec{u} = c(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_p\vec{v}_p) = (ca_1)\vec{v}_1 + (ca_2)\vec{v}_2 + \cdots + (ca_p)\vec{v}_p$$

นั่นคือ $\vec{u} + \vec{v} \in H$ และ $c\vec{u} \in H$ ทำให้สรุปได้ว่า H เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^m$ □

ให้ $A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \ldots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$ เมื่อ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^m$ เป็น $m \times n$ เมทริกซ์

เราเรียกปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^m$ ที่แผ่ทั่วโดยเวกเตอร์ที่ได้จากหลักของเมทริกซ์ A ว่า**ปริภูมิหลัก (column space) ของเมทริกซ์** A เขียนแทนด้วย $\operatorname{Col} A$ นั่นคือ

$$\operatorname{Col} A = \operatorname{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$$

เพราะว่า $\operatorname{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} = \{x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ดังนั้น เรามี

$$\operatorname{Col} A = \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

และจากบทแทรก 1.3.2 เราได้ด้วยว่า

$$b \in \operatorname{Col} A \text{ ก็ต่อเมื่อ ระบบเชิงเส้น } \left[\begin{array}{c|c} A & \vec{b} \end{array}\right] \text{ มีผลเฉลย}$$

ตัวอย่าง 2.2.2 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$
จงพิจารณาว่า $\vec{b} \in \operatorname{Col} A$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

วิธีทำ ลดรูปเมทริกซ์แต่งเติม $\left[\begin{array}{c|c} A & \vec{b} \end{array}\right]$ จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดเป็น

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 7 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.2.2 ระบบเชิงเส้นนี้มีผลเฉลย ทำให้ได้ว่า $\vec{b} \in \operatorname{Col} A$ □

สังเกตว่าปริภูมิหลักของ $m \times n$ เมทริกซ์ A คือเรนจ์ของการแปลงเมทริกซ์ $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ จาก $\mathbb{R}^n$ ไป $\mathbb{R}^m$ และโดยทฤษฎีบท 2.1.2 เราได้ว่า ทุกๆ การแปลงเชิงเส้นเป็นการแปลงเมทริกซ์ เพราะฉะนั้น เรนจ์ของทุกๆ การแปลงเชิงเส้น T อยู่ในรูป

$$\operatorname{range} T = \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} = \operatorname{Col} A$$

เมื่อ A คือเมทริกซ์มาตรฐานของการแปลงเชิงเส้น T ทำให้เราสรุปได้ว่า

ทฤษฎีบท 2.2.2 *ให้ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ เป็นการแปลงเชิงเส้น และ A เป็นเมทริกซ์มาตรฐานสำหรับ T จะได้ว่า เรนจ์ของ T คือปริภูมิหลักของเมทริกซ์ A*
ดังนั้น เรนจ์ของการแปลงเชิงเส้นเป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^m$

สำหรับ $m \times n$ เมทริกซ์ A เราเรียกเซตผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ $A\vec{x} = \vec{0}_m$ ว่า**ปริภูมิสู่ศูนย์ (null space) ของเมทริกซ์** A เขียนแทนด้วย $\operatorname{Nul} A$ นั่นคือ

$$\operatorname{Nul} A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}_m\}$$

และเราแสดงได้ว่า

ทฤษฎีบท 2.2.3 *ปริภูมิสู่ศูนย์ของ $m \times n$ เมทริกซ์ A เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$*

พิสูจน์ เพราะว่า $A\vec{0}_n = \vec{0}_m$ ดังนั้น $\vec{0}_n \in \operatorname{Nul} A$
ต่อมาให้ $\vec{u}, \vec{v} \in \operatorname{Nul} A$ และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ
เพราะฉะนั้น $A\vec{u} = \vec{0}_m$ และ $A\vec{v} = \vec{0}_m$ ทำให้ได้ว่า

$$A(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0}_m + \vec{0}_m = \vec{0}_m \quad \text{และ} \quad A(c\vec{u}) = c(A\vec{u}) = c\vec{0}_m = \vec{0}_m$$

นั่นคือ $\vec{u}+\vec{v} \in \operatorname{Nul} A$ และ $c\vec{u} \in \operatorname{Nul} A$ ดังนั้น $\operatorname{Nul} A$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$ □

ตัวอย่าง 2.2.3 เพราะว่า

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = -x_2 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \right\} = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น H เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^2$

ตัวอย่าง 2.2.4 พิจารณาเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ ในตัวอย่าง 2.2.2

โดยตัวอย่าง 1.4.1 เราได้ว่า $\operatorname{Nul} A = \operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

2.2.2 ฐานหลัก มิติ และแรงก์

ฐานหลัก (basis) สำหรับปริภูมิย่อย H ของ $\mathbb{R}^m$ คือเซตย่อย $\mathcal{B}$ ของ H ซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นและแผ่ทั่ว H นั่นคือ $\mathcal{B} \subseteq H$ เป็นอิสระเชิงเส้นและ $\operatorname{Span} \mathcal{B} = H$

ตัวอย่าง 2.2.5 สำหรับแต่ละ $j = 1, 2, \ldots, m$ เขียน $\vec{e}_j$ แทนเวกเตอร์ที่ได้จากหลักที่ j ของเมทริกซ์เอกลักษณ์ I_m โดยทฤษฎีบท 1.3.4 และบทแทรก 1.4.3 หลักของเมทริกซ์เอกลักษณ์ I_m แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^m$ และเป็นอิสระเชิงเส้น ดังนั้น $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $\mathbb{R}^m$ เรียกว่า**ฐานหลักมาตรฐาน (standard basis) สำหรับ** $\mathbb{R}^m$

ตัวอย่าง 2.2.6 จากตัวอย่าง 2.2.4 เราทราบว่าเมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

เราได้ว่า $\operatorname{Nul} A = \operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ และเซต $\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

ดังนั้น $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $\operatorname{Nul} A$

ในการหาฐานหลักสำหรับ $\operatorname{Col} A$ เราใช้

ทฤษฎีบท 2.2.4 *ให้ A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ จะได้ว่า เซตของหลักตัวหลักของเมทริกซ์ A เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $\operatorname{Col} A$*

ตัวอย่าง 2.2.7 จงหาฐานหลักสำหรับ $\operatorname{Col} A$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

วิธีทำ ลดรูปเมทริกซ์ A จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดเป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นหลักที่ 1 และ 2 เป็นหลักตัวหลัก

ทำให้ได้ว่า $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $\operatorname{Col} A$ $\square$

ให้ H เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^m$ และ $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ H เราสามารถแสดงได้ว่า ถ้า $\mathcal{C}$ เป็นฐานหลักอีกฐานหนึ่งสำหรับ H แล้ว $|\mathcal{B}| = |\mathcal{C}|$ เราเรียกจำนวนสมาชิกของฐานหลักสำหรับ H ว่า**มิติ (dimension) ของ** H เขียนแทนด้วย $\dim H$ และเพื่อความสะดวก เรากำหนด $\operatorname{Span} \emptyset = \{\vec{0}_m\}$ ดังนั้น $\dim\{\vec{0}\} = 0$

ตัวอย่าง 2.2.8 โดยใช้ฐานหลักมาตรฐาน $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m\}$ สำหรับ $\mathbb{R}^m$ เราได้ว่า

$$\dim \mathbb{R}^m = m$$

เราเรียกมิติของปริภูมิหลักของเมทริกซ์ A ว่า**แรงก์ (rank) ของเมทริกซ์** A เขียนแทนด้วย $\operatorname{rank} A$ และเราเรียกมิติของปริภูมิสู่ศูนย์ของเมทริกซ์ A ว่า**ศูนยภาพ (nullity) ของเมทริกซ์** A เขียนแทนด้วย $\operatorname{nullity} A$ นั่นคือ

$$\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Col} A \quad \text{และ} \quad \operatorname{nullity} A = \dim \operatorname{Nul} A$$

ตัวอย่าง 2.2.9 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ จากตัวอย่าง 2.2.7 เราได้ว่า $\operatorname{rank} A = 2$ และจากตัวอย่าง 2.2.6 เราได้ว่า $\operatorname{nullity} A = 1$

ตัวอย่าง 2.2.10 จงแสดงว่าเซต

$$H = \{(x_1 + 2x_2, -x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$ พร้อมทั้งหาฐานหลักและมิติของ H

วิธีทำ เพราะว่า

$$\begin{aligned} H &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & + & 2x_2 & & \\ & - & x_2 & + & x_3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 \end{bmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \operatorname{Col} A \quad \text{เมื่อ } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้น H เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$
ต่อไปเราลดรูปเมทริกซ์ A จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดเป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้นหลักที่ 1 และ 2 เป็นหลักตัวหลัก
ทำให้ได้ว่า $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ H ดังนั้น $\dim H = 2$ □

ตัวอย่าง 2.2.11 จงแสดงว่าเซต

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \text{ และ } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^4$ พร้อมทั้งหาฐานหลักและมิติของ H

วิธีทำ เพราะว่า

$$\begin{aligned} H &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 : A\vec{x} = \vec{0}_2 \right\} = \operatorname{Nul} A \end{aligned}$$

เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ดังนั้น H เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$
ต่อไปเราลดรูปเมทริกซ์ A จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปเป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned} \quad \text{นั่นคือ} \quad \begin{aligned} x_1 &= -x_2 \\ x_3 &= -x_4 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ $A\vec{x} = \vec{0}_2$

ดังนั้น $H = \operatorname{Nul} A = \operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

ทำให้ได้ว่า $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ H และ $\dim H = 2$ □

ตัวอย่าง 2.2.12 จงหาฐานหลักสำหรับปริภูมิหลักและปริภูมิสู่ศูนย์ของเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

พร้อมทั้งหา $\operatorname{rank} A$ และ $\operatorname{nullity} A$

วิธีทำ ลดรูปเมทริกซ์ A จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดเป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้นหลักที่ 1, 2 และ 3 เป็นหลักตัวหลัก

ทำให้ได้ว่า $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $\operatorname{Col} A$

ดังนั้น $\operatorname{rank} A = 2$

ต่อไปเราลดรูปเมทริกซ์ A จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปเป็น

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_4 &= 0 \\ x_2 - x_4 &= 0 \\ x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{นั่นคือ} \qquad \begin{aligned} x_1 &= -2x_4 \\ x_2 &= x_4 \\ x_3 &= x_4 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_4 \\ x_4 \\ x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ เป็นผลเฉลยของสมการ $A\vec{x} = \vec{0}_5$

ดังนั้น $H = \operatorname{Nul} A = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

ทำให้ได้ว่า $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $\operatorname{Nul} A$ และ $\operatorname{nullity} A = 1$ $\square$

สังเกตว่า สำหรับ $m \times n$ เมทริกซ์ A เราได้ว่า $\operatorname{rank} A$ คือจำนวนหลักของเมทริกซ์ A ที่เป็นหลักตัวหลักและ $\operatorname{nullity} A$ คือจำนวนตัวแปรเสรีของสมการเอกพันธุ์ $A\vec{x} = \vec{0}_m$ ซึ่งมีจำนวนเท่ากับจำนวนหลักของเมทริกซ์ A ที่ไม่เป็นหลักตัวหลัก ดังนั้นเราสรุปได้ว่า

ทฤษฎีบท 2.2.5 *[ทฤษฎีบทแรงก์ (Rank Theorem)]*
ถ้า A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ แล้ว $\operatorname{rank} A + \operatorname{nullity} A = n$

ตัวอย่าง 2.2.13 ให้ A เป็น 10×12 เมทริกซ์ ซึ่งมี $\operatorname{nullity} A = 7$
ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 2.2.5 จะได้ว่า $\operatorname{rank} A = 12 - 7 = 5$

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงพิจารณาว่าเซตต่อไปนี้เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^3$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

(ก) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$ (ข) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(ค) $\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ (ง) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. จงหาฐานหลักและมิติของปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^4$ ซึ่งแผ่ทั่วโดยเวกเตอร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(ก) $\begin{bmatrix}1\\-3\\2\\-4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\4\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\-5\\3\\-7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\9\\-6\\12\end{bmatrix}$ (ข) $\begin{bmatrix}-1\\4\\-7\\7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\-2\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-3\\-1\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\-6\\8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-8\\9\\-5\end{bmatrix}$

3. จงพิจารณาว่าเซต H ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$ หรือไม่ ถ้าเป็นจงหาฐานหลักและมิติของ H

(ก) $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + |x_2| = 0\}$
(ข) $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$
(ค) $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$
(ง) $H = \{(x_1 - x_3, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$
(จ) $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$
(ฉ) $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0$ และ $x_2 - x_3 = 0\}$

4. จงหาฐานหลักสำหรับปริภูมิหลักและปริภูมิสู่ศูนย์ของเมทริกซ์ A ต่อไปนี้ พร้อมทั้งหา $\operatorname{rank} A$ และ $\operatorname{nullity} A$

(ก) $A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\7 & -6 & 2\\-5 & 4 & 4\end{bmatrix}$ (ข) $A = \begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & -5\\9 & 2 & -5 & 1\\-9 & -4 & 1 & 7\end{bmatrix}$

(ค) $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\-5 & -1 & 0\\0 & 12 & 7\\2 & -5 & 4\end{bmatrix}$ (ง) $A = \begin{bmatrix}4 & 5 & 9 & -2\\6 & 5 & 1 & 12\\3 & 4 & 8 & -3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 6 & -5\\0 & 1 & 5 & -6\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

(จ) $A = \begin{bmatrix}1 & 4 & 8 & -3 & -7\\-1 & 2 & 7 & 3 & 4\\3 & 6 & 9 & -5 & -2\\-2 & 2 & 9 & 5 & 5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 4 & 8 & 0 & 5\\0 & 2 & 5 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 1 & 4\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

(ฉ) $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 2\\-2 & -5 & 5 & 6\\0 & -3 & 15 & 18\\0 & -2 & 10 & 8\\3 & 6 & 0 & 6\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 2\\0 & 1 & -5 & -10\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

5. ให้ A เป็น 4×6 เมทริกซ์ จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ โดยอธิบายเหตุผล หรือ ยกตัวอย่างประกอบ

(ก) $\operatorname{Nul} A$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^4$ (ข) $\operatorname{rank} A = 3$ ก็ต่อเมื่อ $\operatorname{nullity} A = 3$
(ค) $\operatorname{nullity} A \geq 2$ (ง) $\operatorname{rank} A \geq 2$
(จ) ถ้า A มี 4 หลักตัวหลักแล้ว $\operatorname{Col} A = \mathbb{R}^4$

6. ให้ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ เป็นการแปลงเชิงเส้น และ A เป็นเมทริกซ์มาตรฐานสำหรับ T
จงแสดงว่า T มีสมบัติ 1-1 ก็ต่อเมื่อ $\operatorname{nullity} A = 0$

2.3 เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์จัตุรัส

ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n ถ้ามีเมทริกซ์ C ซึ่ง $AC = I_n = CA$ เราเรียก C ว่า**เมทริกซ์ผกผัน (inverse matrix) ของเมทริกซ์** A

สังเกตว่า ถ้า B เป็นเมทริกซ์ผกผันอีกตัวหนึ่งของเมทริกซ์ A จะได้ว่า

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

ดังนั้น ถ้า A มีเมทริกซ์ผกผันแล้วเมทริกซ์ผกผันจะมีเพียงตัวเดียว เขียนแทนด้วย A^{-1} เราเรียกเมทริกซ์ที่ไม่มีเมทริกซ์ผกผันว่า**เมทริกซ์เอกฐาน (singular matrix)** และเรียกเมทริกซ์ที่มีเมทริกซ์ผกผันว่า**เมทริกซ์ไม่เอกฐาน (nonsingular matrix)**

สำหรับ 2×2 เมทริกซ์ เราสามารถหาเมทริกซ์ผกผันได้โดยง่ายจาก

ทฤษฎีบท 2.3.1 *ให้* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *เป็น* 2×2 *เมทริกซ์ จะได้ว่า* A *มีเมทริกซ์ผกผัน เป็น*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ก็ต่อเมื่อ $ad - bc \neq 0$

สำหรับเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ เราเรียก $ad - bc$ ว่า**ดีเทอร์มิแนนต์ (determinant)** ของเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย $\det A$ ดังนั้นสำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A ขนาด 2 เราได้ว่า A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน ก็ต่อเมื่อ $\det A \neq 0$

ตัวอย่าง 2.3.1 ถ้า $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$A^{-1} = \frac{1}{2(-7) - 5(-3)} \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 2.3.2 จงใช้เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$ หาผลเฉลยของระบบเชิงเส้น

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & = & -1 \\ -3x_1 & - & 7x_2 & = & 1 \end{array}$$

วิธีทำ เนื่องจากระบบเชิงเส้นที่กำหนดให้สมมูลกับสมการเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{นั่นคือ} \quad A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นเราได้ว่า $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\square$

โดยทั่วไป เราสามารถใช้เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์จัตุรัส A หาผลเฉลยของสมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.3.2 *ถ้า* A *เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด* n *ซึ่งมีเมทริกซ์ผกผันและ* $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ *แล้วสมการเมทริกซ์* $A\vec{x} = \vec{b}$ *มีผลเฉลยชุดเดียวคือ* $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

ทฤษฎีบทต่อไป กล่าวถึงสมบัติเบื้องต้นของเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์

ทฤษฎีบท 2.3.3 *สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A และ B ขนาด n ซึ่งมีเมทริกซ์ผกผัน เราได้ว่า*

1. *A^{-1} หาเมทริกซ์ผกผันได้ และ $(A^{-1})^{-1} = A$*
2. *A^T หาเมทริกซ์ผกผันได้ และ $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$*
3. *AB หาเมทริกซ์ผกผันได้ และ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$*

เราเรียกเมทริกซ์ซึ่งได้จากการดำเนินการแถวมูลฐานหนึ่งครั้งกับเมทริกซ์เอกลักษณ์ว่า **เมทริกซ์มูลฐาน (elementary matrix)**

ตัวอย่าง 2.3.3 ให้ $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ และ $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$
จงหา E_1A, E_2A และ E_3A

วิธีทำ เห็นชัดว่า E_1, E_2 และ E_3 เป็นเมทริกซ์มูลฐานและจากการคูณเมทริกซ์เราได้โดยง่ายว่า

$$E_1A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ -4a+g & -4b+h & -4c+i \end{bmatrix}, \quad E_2A = \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{bmatrix},$$

$$\text{และ} \quad E_3A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 5g & 5h & 5i \end{bmatrix}$$

สังเกตว่า เมทริกซ์ E_1A, E_2A และ E_3A มีค่าเท่ากับเมทริกซ์ที่ได้จากการดำเนินการแถวมูลฐานบน I_3 จนได้เมทริกซ์มูลฐาน E_1, E_2 และ E_3 ตามลำดับ □

ซึ่งในกรณีทั่วไป เราได้ว่า

ทฤษฎีบท 2.3.4 *ให้ A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ และ I_m เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ $m \times m$ ถ้า E และ B เป็นเมทริกซ์ที่ได้จาก I_m และ A โดยการดำเนินการแถวแบบเดียวกัน ตามลำดับ แล้วเราจะได้ว่า $EA = B$*

โดยทฤษฎีบท 1.2.1 เราได้ว่า ทุกๆ $m \times n$ เมทริกซ์ A สามารถลดรูปโดยใช้การดำเนินการแถวมูลฐานต่าง ๆ ชุดหนึ่งให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูป B ได้แบบเดียว และถ้าเราให้ $E_1, E_2, \ldots, E_k$ เป็นเมทริกซ์มูลฐานที่ได้จากการใช้การดำเนินการแถวเหล่านั้นกับเมทริกซ์เอกลักษณ์ I_m ตามลำดับ จะได้ว่า $C = E_k \ldots E_2E_1$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน และ $CA = B$ ซึ่งเราสามารถหาเมทริกซ์ C ได้โดยการดำเนินการกับเมทริกซ์แต่งเติม $M = [A \mid I_m]$ จนมีรูปแบบขั้นบันไดลดรูป $M' = [B \mid C]$

ตัวอย่าง 2.3.4 ให้ $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ไม่เอกฐาน C ซึ่งทำให้ CA เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูป

วิธีทำ ลดรูปเมทริกซ์แต่งเติม $[A \mid I_2]$ จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} -3 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 10 & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right]$$

ดังนั้น เมทริกซ์ C ซึ่งทำให้ CA เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปคือ $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$ □

เราอาจใช้วิธีการข้างต้น หาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์จัตุรัส A ขนาด n (ถ้ามี) โดยดำเนินการแถวมูลฐานกับเมทริกซ์แต่งเติม $[A \mid I_n]$ จนมีรูปแบบขั้นบันไดลดรูป $[B \mid C]$ ดังนั้น $CA = B$ โดยเราสรุปการมีเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ A จาก

ทฤษฎีบท 2.3.5 *เมทริกซ์จัตุรัส A ขนาด n มีเมทริกซ์ผกผัน ก็ต่อเมื่อ A สมมูลแถวกับเมทริกซ์เอกลักษณ์ I_n นั่นคือรูปแบบขั้นบันไดลดรูปของเมทริกซ์ A คือ I_n*

ตัวอย่าง 2.3.5 จงหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (ถ้ามี)

วิธีทำ เขียนเมทริกซ์แต่งเติม $[A \mid I_3]$ และลดรูปจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

เพราะฉะนั้น เราได้ว่า $A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ □

เราเรียกการแปลงเชิงเส้น $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ว่า**หาตัวผกผันได้ (invertible)** ก็ต่อเมื่อ เมทริกซ์มาตรฐาน A ของการแปลงเชิงเส้น T มีเมทริกซ์ผกผัน และ $T^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}\vec{x}$ สำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

ตัวอย่าง 2.3.6 ถ้า T เป็นการแปลงเชิงเส้นที่มีเมทริกซ์มาตรฐานเป็น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

จากตัวอย่าง 2.3.5 เราได้ว่า A มีเมทริกซ์ผกผัน ดังนั้น T หาตัวผกผันได้ และ T^{-1} กำหนดโดย

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \text{ทุกๆ เวกเตอร์ } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

เรารวบรวมความรู้ที่ได้ศึกษาไว้แล้ว มาใช้ตรวจสอบว่าเมทริกซ์จัตุรัส A ที่กำหนดให้หาเมทริกซ์ผกผันได้หรือไม่ ในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.3.6 *[ทฤษฎีบทเมทริกซ์หาตัวผกผันได้ (Invertible Matrix Theorem)]*
ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n จะได้ว่า ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน
1. *เมทริกซ์ A หาเมทริกซ์ผกผันได้*
2. *เมทริกซ์ A สมมูลแถวกับเมทริกซ์เอกลักษณ์ I_n*
3. *เมทริกซ์ A มีตำแหน่งตัวหลัก n ตำแหน่ง*
4. *สมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{0}$ มีเพียงผลเฉลยชัด*
5. *หลักของเมทริกซ์ A เป็นอิสระเชิงเส้น*
6. *การแปลงเชิงเส้น $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง*
7. *สมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ มีผลเฉลยสำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$*
8. *หลักของเมทริกซ์ A แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^n$*
9. *การแปลงเชิงเส้น $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ มีสมบัติทั่วถึง*
10. *มีเมทริกซ์จัตุรัส C ขนาด n ซึ่ง $CA = I_n$*
11. *มีเมทริกซ์จัตุรัส D ขนาด n ซึ่ง $AD = I_n$*
12. *เมทริกซ์ A^T หาเมทริกซ์ผกผันได้*
13. *หลักของเมทริกซ์ A เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^n$*
14. $\operatorname{Col} A = \mathbb{R}^n$
15. $\operatorname{rank} A = n$
16. $\operatorname{Nul} A = \{\vec{0}_n\}$
17. $\operatorname{nullity} A = 0$

ตัวอย่าง 2.3.7 จงใช้ทฤษฎีบทเมทริกซ์หาตัวผกผันได้ตรวจสอบว่าเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

มีเมทริกซ์ผกผันหรือไม่ เพราะเหตุใด

วิธีทำ ลดรูป A จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดเป็น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น A มีตำแหน่งตัวหลักเพียง 2 ตำแหน่ง
เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 2.3.6 เราได้ว่า A ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน $\square$

ตัวอย่าง 2.3.8 จงหาค่าของ h ซึ่งทำให้เมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -7 & h \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

หาเมทริกซ์ผกผันได้

วิธีทำ ลดรูป A จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดเป็น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -7 & h \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -7 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 10 & h-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & h+4 \end{bmatrix}$$

โดยทฤษฎีบท 2.3.6 ได้ว่า A มีเมทริกซ์ผกผัน ก็ต่อเมื่อ หลักที่ 3 เป็นหลักตัวหลัก
นั่นคือ ก็ต่อเมื่อ $h+4 \neq 0$ ทำให้ได้ว่า $h \neq -4$ □

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงหาเมทริกซ์ผกผันของ 2×2 เมทริกซ์ต่อไปนี้
   (ก) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (ข) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (ค) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ (ง) $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -7 & -5 \end{bmatrix}$

2. โดยอาศัยเมทริกซ์ผกผันที่ได้ในข้อก่อนหน้านี้ จงหาผลเฉลยของระบบเชิงเส้นต่อไปนี้
   (ก) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4 \\ -x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$ (ข) $\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 = -9 \\ -7x_1 - 5x_2 = 11 \end{cases}$

3. ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$, $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
   (ก) จงหา A^{-1} และใช้ A^{-1} หาผลเฉลยของสมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}_1$, $A\vec{x} = \vec{b}_2$, $A\vec{x} = \vec{b}_3$ และ $A\vec{x} = \vec{b}_4$
   (ข) สังเกตว่าสมการเมทริกซ์ในข้อ (ก) สามารถหาผลเฉลยได้พร้อมๆ กันจากการดำเนินการแถวกับเมทริกซ์แต่งเติม

   $$\left[\begin{array}{c|cccc} A & \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 & \vec{b}_4 \end{array}\right]$$

   จงหาผลเฉลยของสมการเมทริกซ์ทั้งสี่โดยใช้การดำเนินการแถว

4. จงหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ต่อไปนี้ (ถ้ามี)
   (ก) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ (ข) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ (ค) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
   (ง) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (จ) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ (ฉ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

5. จงหาผลเฉลยของสมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ เมื่อกำหนดให้

   $$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

6. เมื่อกำหนดเมทริกซ์ A ดังต่อไปนี้ จงหาเมทริกซ์ไม่เอกฐาน C ซึ่งทำให้ CA เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูป พร้อมทั้งบอกแรงก์ของ A
   (ก) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (ข) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

7. ถ้า $A = \begin{bmatrix} -2 & -7 & -9 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ โดยไม่คำนวณหลักหรือแถวอื่นๆ จงหาหลักที่สามและหาแถวที่สองของ A^{-1}

8. จงแสดงว่า ถ้าเมทริกซ์ A หาเมทริกซ์ผกผันได้ แล้ว AA^T หาเมทริกซ์ผกผันได้

2.4 ดีเทอร์มิแนนต์

สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ขนาด n ให้ $M_{ij}(A)$ เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และ หลักที่ j ของเมทริกซ์ A ออก เรานิยาม**ดีเทอร์มิแนนต์ (determinant) ของ** A เขียนแทนด้วย $\det A$ หรือ $|A|$ อย่างเวียนเกิด (recursive definition) ดังนี้

กรณีที่ $n = 1$ เราได้ว่า $A = [a_{11}]$ เราให้ $\det A = a_{11}$

กรณีที่ $n > 1$ เราให้

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det M_{1j}(A)$$

สังเกตว่า เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ เป็น 2×2 เมทริกซ์ เราได้ว่า $\det A = ad - bc$ สอดคล้องกับหัวข้อที่แล้ว

ตัวอย่าง 2.4.1 ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\det A &= 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 5(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 1((-3)(-1) - (1)(4)) + 5(-1)(0(-1) - (1)(2)) + 0((0)(4) - (-3)2) \\
&= (-1) + 10 + 0 = 9
\end{aligned}$$

ให้ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n สำหรับแต่ละ $i, j = 1, 2, \ldots, n$ เราเรียก

$$C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \det M_{ij}(A)$$

ว่า**โคแฟกเตอร์ของแถวที่** i **และหลักที่** j **ของเมทริกซ์** A (**(i, j)-cofactor of** A) ดังนั้น

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j}(A)$$

เรียกว่า**การกระจายโคแฟกเตอร์ตามแถวที่ 1 ของเมทริกซ์** A **(cofactor expansion across the first row of the matrix** A**)** เราสามารถแสดงได้ว่าการกระจายโคแฟกเตอร์ตามแถวใดๆ ของเมทริกซ์ A จะมีค่าเท่ากันทั้งหมด กล่าวคือ

ทฤษฎีบท 2.4.1 *ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ A หาได้จากการกระจายโคแฟกเตอร์ตามแถวใด ๆ ของเมทริกซ์ A นั่นคือ*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}(A)$$

สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \ldots, n$

ตัวอย่าง 2.4.2 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ โดยการกระจายโคแฟกเตอร์ตามแถวที่ 5 จะได้ว่า

$$\det A = (-2)(-1)^{5+4} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

ซึ่งโดยการกระจายโคแฟกเตอร์ตามแถวที่ 3 ต่อ เราได้ว่า

$$= (-2)(-1)\ 1(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(9) = 18$$

โดยอาศัยค่าดีเทอร์มิแนนต์ที่คำนวณได้ในตัวอย่าง 2.4.1

เราเรียกเมทริกซ์จัตุรัสซึ่งทุกสมาชิกเหนือหรือทุกสมาชิกใต้เส้นทแยงมุมหลักเป็น 0 ว่า**เมทริกซ์รูปสามเหลี่ยม (triangular matrix)** และเราได้โดยทฤษฎีบท 2.4.1 ว่า

บทแทรก 2.4.2 *ถ้า A เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมแล้ว $\det A$ เท่ากับผลคูณของสมาชิกทแยงมุมในเมทริกซ์ A*

ตัวอย่าง 2.4.3 $\begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-4)(2)(-3)(-1) = -24$

สำหรับ 3×3 เมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ สังเกตว่า ถ้าเรานำหลักที่ 1 และหลักที่ 2 มาเขียนต่อทางขวามือของเมทริกซ์ A เป็นหลักที่ 4 และ 5 ตามลำดับ เราได้ว่า

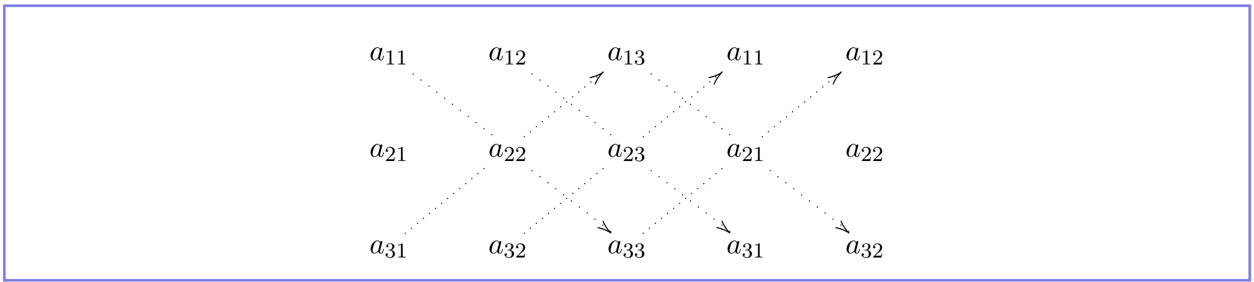
$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

= (ผลบวกของผลคูณในแนวเฉียงจากซ้ายบนลงมาขวาล่าง)

− (ผลบวกของผลคูณในแนวเฉียงจากซ้ายล่างขึ้นไปขวาบน) (ดังรูป)



ตัวอย่าง 2.4.4 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I_3) &= \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \\ -1 & -2 \end{matrix} \\
&= [(2-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) + 2 + 2] - [(3-\lambda) + 2(2-\lambda) + 2(2-\lambda)] \\
&= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5
\end{aligned}$$

เราสรุปสมบัติเบื้องต้นของดีเทอร์มิแนนต์กับการดำเนินการแถวขั้นมูลฐานดังนี้

ทฤษฎีบท 2.4.3 *ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส จะได้ว่า*

1. $\det A = \det A^T$
2. *ถ้า C เป็นเมทริกซ์ที่ได้จาก A โดยการดำเนินการแถว R_{pq} $(p \neq q)$ แล้ว* $\det C = -\det A$
3. *ถ้าสองแถวใดๆ ของ A เหมือนกัน แล้ว* $\det A = 0$
4. *ถ้า C เป็นเมทริกซ์ที่ได้จาก A โดยการดำเนินการแถว $R_p + cR_q$ $(p \neq q)$ แล้ว* $\det C = \det A$
5. *ถ้า C เป็นเมทริกซ์ที่ได้จาก A โดยการดำเนินการแถว cR_p แล้ว* $\det C = c \det A$

และเรายังมีสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์และเมทริกซ์ไม่เอกฐานเป็น

ทฤษฎีบท 2.4.4 *ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส จะได้ว่า*

1. *A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน ก็ต่อเมื่อ* $\det A \neq 0$
2. *ถ้า* $\det A \neq 0$ *แล้ว* $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

อีกสมบัติที่สำคัญของดีเทอร์มิแนนต์คือดีเทอร์มิแนนต์ของผลคูณของเมทริกซ์เท่ากับผลคูณของดีเทอร์มิแนนต์ของแต่ละเมทริกซ์ กล่าวคือ

ทฤษฎีบท 2.4.5 *ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาดเดียวกันแล้ว*

$$\det(AB) = \det A \det B$$

เพราะฉะนั้น เรามี

บทแทรก 2.4.6 *ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n, k เป็นจำนวนเต็มบวกและ c เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า*

$$\det(A^k) = (\det A)^k \qquad \text{และ} \qquad \det(cA) = c^n \det A$$

ตัวอย่าง 2.4.5 กำหนดให้ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$ จะได้ว่า

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} = 2(-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-2)(5) = -10$$

และ

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3(5) = 15$$

ตัวอย่าง 2.4.6 ให้ A, B และ C เป็น 3×3 เมทริกซ์ซึ่ง $\det A = 2$, $\det B = 3$ และ $\det C = 4$ จะได้ว่า

$$\det(2AB^TC^{-1}) = 2^3 \det A \det B^T \det C^{-1} = 8 \det A \det B \frac{1}{\det C} = 8(2)(3)\frac{1}{4} = 12$$

ให้ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n และ $C_{ij}(A)$ เป็นโคแฟกเตอร์ของแถวที่ i และ หลักที่ j ของเมทริกซ์ A เราเรียกเมทริกซ์ $[C_{ij}(A)]^T_{n\times n}$ ว่า**เมทริกซ์ผูกพัน (adjoint matrix) ของเมทริกซ์** A เขียนแทนด้วย $\operatorname{adj} A$

ตัวอย่าง 2.4.7 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา $\operatorname{adj} A$

วิธีทำ คำนวณโคแฟกเตอร์สำหรับทุกๆ ตำแหน่งดังนี้

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2,\ C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4,\ C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,\ C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2,\ C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 9,$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8,\ C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5,\ C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

ดังนั้น $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 9 \\ 8 & 5 & -12 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 8 \\ 4 & -2 & 5 \\ 3 & 9 & -12 \end{bmatrix}$ $\square$

จากตัวอย่างข้างต้นเราสังเกตว่า

$$A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = \begin{bmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{bmatrix} \qquad \text{และ} \qquad \det A = 21$$

ซึ่งในกรณีทั่วไป เราได้ความสัมพันธ์ระหว่างเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ผูกพันของ A ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.4.7 *สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A ขนาด n เราได้ว่า*

$$A\,(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = (\det A)\, I_n$$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $\det A \neq 0$ เราอาจหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ A ได้โดย

บทแทรก 2.4.8 *ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสซึ่ง $\det A \neq 0$ แล้ว*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

ตัวอย่าง 2.4.8 จงหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ในตัวอย่าง 2.4.7 โดยใช้เมทริกซ์ผูกพันที่คำนวณได้

วิธีทำ เพราะว่า $\det A = 21$ และ $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 8 \\ 4 & -2 & 5 \\ 3 & 9 & -12 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A^{-1} = \dfrac{1}{21} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 8 \\ 4 & -2 & 5 \\ 3 & 9 & -12 \end{bmatrix}$ $\square$

ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ เราอาจใช้ดีเทอร์มิแนนต์หาผลเฉลยของสมการ $A\vec{x} = \vec{b}$ เมื่อ $\det A \neq 0$ โดย

ทฤษฎีบท 2.4.9 *[กฎของคราเมอร์ (Cramer's Rule)]*
ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n ซึ่ง $\det A \neq 0$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ จะได้ว่าผลเฉลยของสมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ คือเวกเตอร์ที่มีตำแหน่งที่ i เป็น

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

เมื่อ A_i เป็นเมทริกซ์ซึ่งได้จาก A โดยการแทนหลักที่ i ของเมทริกซ์ A ด้วยเวกเตอร์ $\vec{b}$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \ldots, n$

ตัวอย่าง 2.4.9 จงใช้กฎของคราเมอร์หาผลเฉลยของระบบเชิงเส้น

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -5 \\ & & 2x_2 & - & 5x_3 & = & 2 \end{array}$$

วิธีทำ จากระบบเชิงเส้นที่กำหนดให้เรามีเมทริกซ์สัมประสิทธิ์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น เราได้ว่า

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -5 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}, \quad \text{และ} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

คำนวณดีเทอร์มิแนนต์ของแต่ละเมทริกซ์ได้เป็น

$$\det A = -1,\ \det A_1 = 1,\ \det A_2 = -1 \text{ และ } \det A_3 = 0$$

เพราะฉะนั้น เราได้ว่า

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = -1,\ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = 1 \text{ และ } x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = 0$$

โดยกฎของคราเมอร์จะได้ว่า $\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ เป็นผลเฉลยของระบบเชิงเส้นนี้ $\square$

แบบฝึกหัด 2.4

1. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$
   จงหาโคแฟกเตอร์ $C_{ij}(A)$ สำหรับทุก $i, j = 1, 2, 3$ และ จงหา $\det A$ โดยการกระจายโคแฟกเตอร์ตามแถวที่ 1 ของ A

2. จงหาค่าของ
   (ก) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ (ข) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+1 & b+1 & c+1 \\ a-1 & b-1 & c-1 \end{vmatrix}$
   (ค) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ (ง) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

3. จงแสดงว่า $\begin{vmatrix} p+x & q+y & r+z \\ a+x & b+y & c+z \\ a+p & b+q & c+r \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

4. จงหาค่าของ b เมื่อ $\begin{vmatrix} 3 & -1 & x \\ 2 & 6 & y \\ -5 & 4 & z \end{vmatrix} = ax + by + cz$

5. กำหนดให้ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$ จงหา

(ก) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -g & -h & -i \\ 3d & 3e & 3f \end{vmatrix}$

(ข) $\begin{vmatrix} 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ g & h & i \\ -2a & -2b & -2c \end{vmatrix}$

(ค) $\begin{vmatrix} g & h & i \\ 2a & 2b & 2c \\ 3d-a & 3e-b & 3f-c \end{vmatrix}$

(ง) $\begin{vmatrix} a & d & g \\ 2b & 2e & 2h \\ c-b & f-e & i-h \end{vmatrix}$

6. จงใช้ดีเทอร์มิแนนต์ตรวจสอบว่าเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 5 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 0 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ มีเมทริกซ์ผกผันหรือไม่ เพราะเหตุใด

7. ให้ A, B, C เป็น 4×4 เมทริกซ์ซึ่ง $\det A = -2, \det B = 0.5$ และ $\det C = -1$ จงหา

(ก) $\det(A^T B)$ (ข) $\det(-2CB)$ (ค) $\det(B^{-1}AB)$

(ง) $\det(B^{-1}A^T C)$ (จ) $\det(-ABC^T)$ (ฉ) $\det((2A)^{-1}B^{-1})$

8. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

จงหาเมทริกซ์ผูกพันของ A และจงหา A^{-1} โดยใช้เมทริกซ์ผูกพันที่ได้

9. จงใช้กฎของคราเมอร์หาผลเฉลยของระบบเชิงเส้นต่อไปนี้

(ก) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$

(ข) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$

10. จงแสดงว่า ถ้า A เป็นเมทริกซ์ซึ่ง $\det A = -\det A^T$ แล้ว A ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

11. จงแสดงว่า ถ้า U เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n ซึ่ง $U^T U = I_n$ แล้ว $\det U = \pm 1$

12. ให้ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

จงแสดงว่า $\det(A + I_2) = 1 + \det A$ ก็ต่อเมื่อ $a + d = 0$

คำตอบแบบฝึกหัด 2.1 1.$\vec{x}=\begin{bmatrix}9\\4\\1\\0\end{bmatrix}x_3+\begin{bmatrix}-7\\-3\\0\\1\end{bmatrix}x_4,\ x_3,x_4\in\mathbb{R}$/อยู่; 2.$\vec{x}=\begin{bmatrix}-3\\-2\\1\\0\end{bmatrix}x_3,\ x_3\in\mathbb{R}$/ไม่อยู่;

3.(ก)$\vec{x}=\begin{bmatrix}-3\\1\\1\end{bmatrix}$, (ข)$\vec{x}=\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}$, (ค)$\vec{x}=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1.5\\-0.5\\1\end{bmatrix}x_3,\ x_3\in\mathbb{R}$, (ง)$\vec{x}=\begin{bmatrix}7\\3\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\end{bmatrix}x_3,\ x_3\in\mathbb{R}$;

5.(ก)$\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\\-2&1\end{bmatrix}$/1-1/ไม่ทั่วถึง, (ข)$\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&-1&0\\-1&0&0&1\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$/ไม่1-1/ไม่ทั่วถึง, (ค)$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&-2\end{bmatrix}$/1-1/ทั่วถึง, (ง)$\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&9&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$/ไม่1-1/ไม่ทั่วถึง;

7.(ก)$A=\begin{bmatrix}-0.5&0.5\\1&0\end{bmatrix}$/1-1/ทั่วถึง, (ข)$A=\begin{bmatrix}-0.5&0.5&0\\0.5&0.5&0\\0&0&0\end{bmatrix}$/ไม่1-1/ไม่ทั่วถึง

คำตอบแบบฝึกหัด 2.2 1.(ก)เป็น , (ข)เป็น , (ค)ไม่เป็น , (ง)ไม่เป็น;

2.(ก)$\left\{\begin{bmatrix}1\\-3\\2\\-4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-1\\4\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\-5\\3\\-7\end{bmatrix}\right\}$, (ข)$\left\{\begin{bmatrix}-1\\4\\-7\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-3\\-1\\6\end{bmatrix}\right\}$;

3.(ก)ไม่เป็น, (ข)เป็น/Span$\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$, (ค)ไม่เป็น, (ง)เป็น/Span$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$, (จ)เป็น/$\emptyset$, (ฉ)เป็น/Span$\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$;

4.(ก)$\operatorname{Col}A=\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\7\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-6\\-4\end{bmatrix}\right\}$, $\operatorname{Nul}A=\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}16\\19\\1\end{bmatrix}\right\}$,

(ข)$\operatorname{Col}A=\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}3\\9\\-9\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\\-4\end{bmatrix}\right\}$, $\operatorname{Nul}A=\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$,

(ค)$\operatorname{Col}A=\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-5\\2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-1\\7\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\\11\\4\end{bmatrix}\right\}$, $\operatorname{Nul}A=\{\vec{0}\}$,

(ง)$\operatorname{Col}A=\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}4\\6\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\5\\4\end{bmatrix}\right\}$, $\operatorname{Nul}A=\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}4\\-5\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-7\\6\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$,

(จ)$\operatorname{Col}A=\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\3\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\2\\6\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\3\\-5\\5\end{bmatrix}\right\}$, $\operatorname{Nul}A=\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}2\\-2.5\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-7\\0.5\\0\\-4\\1\end{bmatrix}\right\}$,

(ฉ)$\operatorname{Col}A=\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\0\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-5\\-3\\-2\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\6\\18\\8\\6\end{bmatrix}\right\}$, $\operatorname{Nul}A=\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}-10\\5\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$;

5.(ก)จริง, (ข)จริง, (ค)จริง, (ง)เท็จ, (จ)เท็จ

คำตอบแบบฝึกหัด 2.3 1.(ก)$\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3&-2\\1&1\end{bmatrix}$, (ข)$-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&-4\\0&2\end{bmatrix}$, (ค)$-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6&-4\\-5&3\end{bmatrix}$, (ง)$-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-5&-5\\7&8\end{bmatrix}$;

2.(ก)$\begin{bmatrix}-\frac{14}{5}\\-\frac{3}{5}\end{bmatrix}$, (ข)$\begin{bmatrix}2\\-5\end{bmatrix}$; 3.$A^{-1}=\begin{bmatrix}-12&5\\5&-2\end{bmatrix}$, $\vec{x_1}=\begin{bmatrix}27\\-11\end{bmatrix}$, $\vec{x_2}=\begin{bmatrix}-37\\15\end{bmatrix}$, $\vec{x_3}=\begin{bmatrix}20\\-8\end{bmatrix}$, $\vec{x_4}=\begin{bmatrix}-26\\11\end{bmatrix}$;

4.(ก)$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&0&1\\-2&3&-2\\-\frac{8}{5}&\frac{2}{5}&-1\end{bmatrix}$, (ข)$\begin{bmatrix}-40&16&9\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{bmatrix}$, (ค)$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&1&0\\-3&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$, (ง)$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\0&-2&1&0\\8&-1&-1&1\end{bmatrix}$,

(จ) $\begin{bmatrix} 9 & 8 & -7 & -16 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, (ฉ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$; 5.$\vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$;

6.(ก) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & -1.5 \\ 1 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$/rank $A = 2$, (ข) $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} -5 & 0 & -15 & 10 \\ -5 & 0 & -5 & 6 \\ 5 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 10 & 10 & -10 \end{bmatrix}$/rank $A = 3$; 7. $\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -6 \end{bmatrix}$

คำตอบแบบฝึกหัด 2.4 1.($C_{11} = -8, C_{12} = -3, C_{13} = 1, C_{21} = 0, C_{22} = 6, C_{23} = -2, C_{31} = 8, C_{32} = -1, C_{33} = -5$); 2.(ก)1, (ข)0, (ค)$-2$, (ง)$-2$; 4.$b = -7$; 5.(ก)12, (ข)$-8$, (ค)24, (ง)8; 6.($\det A = 0$, ไม่มี A^{-1});

7.(ก)-1, (ข)-8, (ค)-2, (ง)4, (จ)1, (ฉ)$-\frac{1}{16}$; 8.adj $A = \begin{bmatrix} 7 & -8 & 5 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$/$\det A = 1$; 9.(ก) $\vec{x} = \begin{bmatrix} 13/11 \\ 1/11 \\ 48/11 \end{bmatrix}$, (ข) $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

บทที่ 3

ค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ

3.1 เมทริกซ์สำหรับการแปลงเชิงเส้นและการเปลี่ยนฐานหลัก

ให้ H เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^m$ และ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ H นั่นคือเซต $\mathcal{B}$ แผ่ทั่ว H และ $\mathcal{B}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น ทำให้สำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{x} \in H$ จะมีจำนวนจริง $c_1, c_2, \ldots, c_p$ เพียงชุดเดียวที่ทำให้ $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_p\vec{v}_p$ เราเรียกเวกเตอร์

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$$

ว่า**เวกเตอร์พิกัดของ $\vec{x}$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$ (coordinate vector of $\vec{x}$ relative to $\mathcal{B}$)** และ เรียก $c_1, c_2, \ldots, c_p$ ว่า**พิกัดที่ i ของ $\vec{x}$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$ (i^{th}-coordinates of $\vec{x}$ relative to $\mathcal{B}$)** สังเกตว่าสำหรับเวกเตอร์ $\vec{x}, \vec{y} \in H$ และจำนวนจริง c เรามี

$$[\vec{x}+\vec{y}]_{\mathcal{B}} = [\vec{x}]_{\mathcal{B}} + [\vec{y}]_{\mathcal{B}} \quad \text{และ} \quad [c\vec{x}]_{\mathcal{B}} = c[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$$

ตัวอย่าง 3.1.1 ให้ $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

ดังนั้น $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $H = \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ จงตรวจสอบว่า $\vec{x} \in H$ หรือไม่ ถ้าอยู่ จงหาเวกเตอร์พิกัดของ $\vec{x}$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$

วิธีทำ โดยบทแทรก 1.3.2 ในการตรวจสอบว่า $\vec{x}$ อยู่ใน H เราจะพิจารณาว่าสมการเวกเตอร์ $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = \vec{x}$ มีผลเฉลยหรือไม่ โดยดำเนินการแถวกับเมทริกซ์แต่งเติมจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดเป็น

$$\left[\begin{array}{cc|c} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{x} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -5 \\ 1 & -4 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ดังนั้นสมการเวกเตอร์ $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = \vec{x}$ มีผลเฉลย ส่งผลให้ $\vec{x} \in H$
เราจึงใช้การดำเนินการแถวต่อไปจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปเป็น

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{ซึ่งสมนัยกับผลเฉลย} \quad \begin{array}{rcr} c_1 & = & 2 \\ c_2 & = & -1 \end{array}$$

นั่นคือ $\vec{x} = 2\vec{v}_1 + (-1)\vec{v}_2$ เพราะฉะนั้น $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\square$

ให้ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^n$ และ $\mathcal{C} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^m$ กำหนด $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ เป็นการแปลงเชิงเส้น เราเรียก $m \times n$ เมทริกซ์ซึ่งมีหลักที่ j เป็นเวกเตอร์พิกัด $[T(\vec{v}_j)]_{\mathcal{C}}$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{C}$ สำหรับทุกๆ $j = 1, 2, \ldots, n$ ว่า**เมทริกซ์สำหรับ T สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$ และ $\mathcal{C}$ (matrix for T relative to the bases $\mathcal{B}$ and $\mathcal{C}$)** เขียนแทนด้วย $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ นั่นคือ

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \Big[[T(\vec{v}_1)]_{\mathcal{C}} \quad [T(\vec{v}_2)]_{\mathcal{C}} \quad \ldots \quad [T(\vec{v}_n)]_{\mathcal{C}} \Big]$$

สังเกตว่า สำหรับแต่ละเวกเตอร์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ เราได้ว่า $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n$
ดังนั้น $T(\vec{x}) = c_1T(\vec{v}_1) + c_2T(\vec{v}_2) + \cdots + c_nT(\vec{v}_n)$
เพราะฉะนั้น

$$[T(\vec{x})]_{\mathcal{C}} = c_1[T(\vec{v}_1)]_{\mathcal{C}} + c_2[T(\vec{v}_2)]_{\mathcal{C}} + \cdots + c_n[T(\vec{v}_n)]_{\mathcal{C}}$$

นั่นคือ

$$[T(\vec{x})]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}[\vec{x}]_{\mathcal{B}} \tag{3.1.1}$$

สำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ในกรณีที่ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ เป็นการแปลงเชิงเส้นและ $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ เราเขียนแทน $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ ด้วย $[T]_{\mathcal{B}}$ และเรียกว่า**เมทริกซ์สำหรับ T สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$ (matrix for T relative to the basis $\mathcal{B}$)**

$$\begin{tikzcd}
\vec{x} \arrow[r, "T"] \arrow[d] & T(\vec{x}) \arrow[d] \\
{[\vec{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "{[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\times}"] & {[T(\vec{x})]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}[\vec{x}]_{\mathcal{B}}}
\end{tikzcd}$$

ตัวอย่าง 3.1.2 ให้ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^2$ และ $\mathcal{C} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^3$ ถ้า $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่ง

$$T(\vec{v}_1) = 3\vec{w}_1 - \vec{w}_2 + 5\vec{w}_3 \quad \text{และ} \quad T(\vec{v}_2) = \vec{w}_2 - 4\vec{w}_3$$

จงหาเมทริกซ์สำหรับ T สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$ และ $\mathcal{C}$

วิธีทำ จากที่กำหนดให้ จะได้ $[T(\vec{v}_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ และ $[T(\vec{v}_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

ดังนั้น เราได้ว่า $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ $\square$

ตัวอย่าง 3.1.3 ให้ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^3$ และ $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่งมี $[T]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ จงหา $T(2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3)$

วิธีทำ เนื่องจาก $[2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ทำให้ได้ว่า

$$[T(2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3)]_\mathcal{B} = [T]_\mathcal{B} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $T(2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3) = -2\vec{v}_1 - 12\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3$ $\square$

เราสามารถแสดงได้ว่าการประกอบของการแปลงเชิงเส้นนั้นเป็นการแปลงเชิงเส้นด้วย และ ได้ความสัมพันธ์ของเมทริกซ์สัมพัทธ์กับฐานหลักต่าง ๆ ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.1.1 *ให้ n, m และ p เป็นจำนวนเต็มบวก และ $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ และ $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ เป็นการแปลงเชิงเส้น จะได้ว่า*

1. *$T \circ S$ เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก $\mathbb{R}^n$ ไป $\mathbb{R}^p$*
2. *ถ้า $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^m$ และ $\mathcal{D}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^p$ แล้ว*

$$[T \circ S]_\mathcal{B}^\mathcal{D} = [T]_\mathcal{C}^\mathcal{D} [S]_\mathcal{B}^\mathcal{C}$$

ยิ่งกว่านั้น ถ้า $n = m = p$ และ $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{D}$ แล้ว $[T \circ S]_\mathcal{B} = [T]_\mathcal{B}[S]_\mathcal{B}$

จากทฤษฎีบทข้างต้นทำให้ได้ว่า

บทแทรก 3.1.2 *ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ เป็นการแปลงเชิงเส้น และ $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^n$ จะได้ว่า*

1. *ถ้า T หาตัวผกผันได้ (มี T^{-1}) แล้ว $[T]_\mathcal{B}$ จะเป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานโดยที่ $[T]_\mathcal{B}^{-1} = [T^{-1}]_\mathcal{B}$*
2. *ถ้า $[T]_\mathcal{B}$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน แล้ว T จะหาตัวผกผันได้ (มี T^{-1}) และ $[T^{-1}]_\mathcal{B} = [T]_\mathcal{B}^{-1}$*

ให้ H เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^m$ และให้ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ และ $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_p\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ H พิจารณาการแปลงเชิงเส้นเอกลักษณ์ $I : H \to H$ ซึ่งกำหนดโดย $I(\vec{x}) = \vec{x}$ สำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{x} \in H$ จากสมการ 3.1.1 จะได้ว่า

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}'} = [I(\vec{x})]_{\mathcal{B}'} = [I]_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'} [\vec{x}]_\mathcal{B} \quad \text{สำหรับทุกๆ เวกเตอร์ } \vec{x} \in H$$

เราเรียกเมทริกซ์ $[I]_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}$ ว่า**เมทริกซ์การเปลี่ยนพิกัดจาก** $\mathcal{B}$ **ไป** $\mathcal{B}'$ (**change-of-coordinates matrix from** $\mathcal{B}$ **to** $\mathcal{B}'$) ซึ่งตำราส่วนใหญ่นิยมใช้สัญลักษณ์ $P = \underset{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}{P}$

สังเกตว่า เรายังได้ด้วยว่า

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = [I(\vec{x})]_{\mathcal{B}} = [I]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}[\vec{x}]_{\mathcal{B}'} \quad \text{สำหรับทุกๆ เวกเตอร์ } \vec{x} \in H$$

เพราะฉะนั้น

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = [I]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}[I]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}[\vec{x}]_{\mathcal{B}} \quad \text{และ} \quad [\vec{x}]_{\mathcal{B}'} = [I]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}[I]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}[\vec{x}]_{\mathcal{B}'}$$

สำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{x} \in H$ ทำให้สรุปได้ว่า

$$[I]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}[I]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} = I_p = [I]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}[I]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$$

ดังนั้น เมทริกซ์ $[I]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$ และเมทริกซ์ $[I]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ เป็นเมทริกซ์ผกผันของกันและกัน

ทฤษฎีบท 3.1.3 *ให้ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ และ $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_p\}$ เป็นฐานหลักสำหรับปริภูมิย่อย H จะได้ว่ามีเมทริกซ์ไม่เอกฐาน $\underset{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}{P}$ ขนาด p กำหนดโดย*

$$\underset{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}{P} = [I]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [\vec{v}_1]_{\mathcal{B}'} & [\vec{v}_2]_{\mathcal{B}'} & \ldots & [\vec{v}_p]_{\mathcal{B}'} \end{bmatrix}$$

ที่ทำให้

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}'} = \underset{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}{P}[\vec{x}]_{\mathcal{B}} \quad \text{สำหรับทุกๆ เวกเตอร์ } \vec{x} \in H$$

ตัวอย่าง 3.1.4 จงแสดงว่า $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^3$ และจงหาเมทริกซ์การเปลี่ยนพิกัดจากฐานหลักมาตรฐาน $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ไป $\mathcal{B}'$ พร้อมทั้งหา $[\vec{x}]_{\mathcal{B}'}$ เมื่อ $\vec{x} = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$

วิธีทำ ให้ $A = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ เราได้โดยง่ายว่า $\det A = -1 \neq 0$
ทำให้ A หาเมทริกซ์ผกผันได้ จึงได้โดยทฤษฎีบท 2.3.6 ว่า $\mathcal{B}'$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^3$
ต่อมาให้ $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$
และเขียน $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ในรูปการรวมเชิงเส้นของ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ ได้เป็น

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= 0 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + 1 \cdot \vec{v}_3 \\
\vec{e}_2 &= 0 \cdot \vec{v}_1 + 1 \cdot \vec{v}_2 + (-1)\vec{v}_3 \\
\vec{e}_3 &= 1 \cdot \vec{v}_1 + (-1) \cdot \vec{v}_2 + 0 \cdot \vec{v}_3
\end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า

$$[\vec{e}_1]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, [\vec{e}_2]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad [\vec{e}_3]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น เมทริกซ์การเปลี่ยนพิกัดจาก $\mathcal{B}$ ไป $\mathcal{B}'$ คือ $\underset{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

เห็นชัดว่า $\vec{x} = 1\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$ ทำให้ $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $[\vec{x}]_{\mathcal{B}'} = P[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ □

จากทฤษฎีบท 3.1.1 และบทแทรก 3.1.2 เราสรุปได้ว่า

บทแทรก 3.1.4 *ให้ $\mathcal{B}$ และ $\mathcal{B}'$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^n$ และ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ เป็นการแปลงเชิงเส้น แล้ว*

$$[T]_{\mathcal{B}'} = [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \left(\underset{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}{P}\right)^{-1}[T]_{\mathcal{B}}\underset{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}{P}$$

ตัวอย่าง 3.1.5 ให้ $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ เป็นการแปลงเชิงเส้นที่มีเมทริกซ์มาตรฐานเป็น $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

จงหา $[T]_{\mathcal{B}'}$ โดยที่ $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

วิธีทำ ให้ $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ เป็นฐานหลักมาตรฐานสำหรับ $\mathbb{R}^3$ ดังนั้น $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

เนื่องจาก $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักมาตรฐาน เราจึงหา $\underset{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}{P}$ ได้โดยง่าย กล่าวคือ $\underset{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ซึ่งเราหาตัวผกผันได้เป็น $\left(\underset{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}{P}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

ทำให้ได้โดยบทแทรกข้างต้นว่า

$$[T]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ตามต้องการ □

แบบฝึกหัด 3.1

1. กำหนดเวกเตอร์ $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ และ $\vec{x}$ ถ้า H เป็นปริภูมิย่อยที่มีฐานหลักเป็น $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ และ $\vec{x} \in H$ จงหาเวกเตอร์พิกัดของ $\vec{x}$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$

   (ก) $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix}$ (ข) $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$

   (ค) $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix}$ (ง) $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. จงแสดงว่า $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^3$ และ จงหาเมทริกซ์การเปลี่ยนพิกัดจากฐานหลักมาตรฐาน $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ไป $\mathcal{B}'$ พร้อมทั้งหา $[\vec{v}]_{\mathcal{B}'}$ เมื่อ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

3. ให้ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ และ $\mathcal{C} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^2$ โดยที่ $\vec{v}_1 = 4\vec{w}_1 - \vec{w}_2$ และ $\vec{v}_2 = -6\vec{w}_1 + \vec{w}_2$ จงหาเมทริกซ์ของการเปลี่ยนพิกัดจาก $\mathcal{B}$ ไป $\mathcal{C}$ และถ้า $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ จงหา $[\vec{x}]_{\mathcal{C}}$

4. ให้ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ และ $\mathcal{C} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^2$ โดยที่

$$\vec{v}_1 = 2\vec{w}_1 - \vec{w}_2 + \vec{w}_3, \vec{v}_2 = 3\vec{w}_2 + \vec{w}_3 \quad \text{และ} \quad \vec{v}_3 = -3\vec{w}_1 + 2\vec{w}_2$$

จงหาเมทริกซ์ของการเปลี่ยนพิกัดจาก $\mathcal{C}$ ไป $\mathcal{B}$ และเวกเตอร์พิกัด $[\vec{w}_1 - 2\vec{w}_2 + 2\vec{w}_3]_{\mathcal{B}}$

5. ให้ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^3$ และ $\mathcal{C} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^2$ ถ้า $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่ง

$$T(\vec{v}_1) = 2\vec{w}_1 - \vec{w}_2,\ T(\vec{v}_2) = \vec{w}_2 - 4\vec{w}_1 \quad \text{และ} \quad T(\vec{v}_3) = -\vec{w}_2$$

จงหาเมทริกซ์สำหรับ T สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$ และ $\mathcal{C}$

6. ให้ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้น ซึ่งกำหนดโดย

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 - 3x_2)$$

จงหาเมทริกซ์สำหรับ T สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$ และ $\mathcal{C}$ เมื่อ

(ก) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ และ $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

(ข) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ และ $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

7. ให้ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ และ $\mathcal{C} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^2$ จงหาเมทริกซ์ของการเปลี่ยนพิกัดจาก $\mathcal{B}$ ไป $\mathcal{C}$ และเมทริกซ์ของการเปลี่ยนพิกัดจาก $\mathcal{C}$ ไป $\mathcal{B}$ เมื่อ

(ก) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

(ข) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ค) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$

8. ให้ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^3$ และ $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่ง

$$T(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3) = (2x_1 - 4x_2 + 5x_3, -x_2 + 3x_3)$$

จงหาเมทริกซ์สำหรับ T สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$ และฐานหลักมาตรฐาน $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ สำหรับ $\mathbb{R}^2$

9. ให้ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^3$ และ $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่งมี $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

จงหา $T(\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - 3\vec{v}_3)$

10. ให้ $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ เป็นการแปลงเชิงเส้น กำหนดโดย

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2 + x_3, x_2 - x_3)$$

จงหาเมทริกซ์สำหรับ T สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ และเวกเตอร์พิกัด $[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ และ $[T(\vec{x})]_{\mathcal{B}}$ เมื่อ $\vec{x} = (-1, 4, 0)$

11. ให้ $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ เป็นการแปลงเชิงเส้น กำหนดโดย

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3 - x_4, 2x_1 - x_3, x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4, x_3 - x_4)$$

จงหาเมทริกซ์สำหรับ T สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ และเวกเตอร์พิกัด $[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ และ $[T(\vec{x})]_{\mathcal{B}}$ เมื่อ $\vec{x} = (2, -1, 2, 3)$

12. ให้ $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่งมีเมทริกซ์มาตรฐาน $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ และให้ $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์สำหรับ T สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, เมทริกซ์สำหรับ T สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ และเวกเตอร์พิกัด $[T(\vec{x})]_{\mathcal{B}_1}$ และ $[T(\vec{x})]_{\mathcal{B}_2}$ พร้อมทั้งเมทริกซ์การเปลี่ยนพิกัดจาก $\mathcal{B}_2$ ไป $\mathcal{B}_1$ และเมทริกซ์สำหรับ T สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}_1$ และ $\mathcal{B}_2$

3.2 ค่าลักษณะเฉพาะ เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ และการแปลงเป็นทแยงมุม

3.2.1 ค่าลักษณะเฉพาะ และ เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ

ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n เราเรียกจำนวนจริง λ ว่า**ค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue or characteristic value) ของเมทริกซ์** A ถ้าระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ มีผลเฉลยไม่ชัด และเราเรียกผลเฉลยนี้ว่า**เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์** A **ซึ่งสมนัยกับ** λ **(eigenvector or characteristic vector corresponding to** λ**)**

ตัวอย่าง 3.2.1 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ จงพิจารณาว่า

(ก) 1 เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ A หรือไม่

(ข) เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A หรือไม่ ถ้าเป็นจงหาค่าลักษณะเฉพาะซึ่งสมนัยกับเวกเตอร์นี้

วิธีทำ (ก) เนื่องจากระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \vec{x}$ สมมูลกับสมการเอกพันธุ์ $(A - I_2)\vec{x} = \vec{0}$ และ

$$\det(A - I_2) = \begin{vmatrix} 2-1 & 1-0 \\ 4-0 & 2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

ดังนั้น สมการเอกพันธุ์ $(A - I_2)\vec{x} = \vec{0}$ มีเพียงผลเฉลยชัด
ทำให้ได้ว่า 1 ไม่เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ A
(ข) เพราะว่า

$$A\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\8\end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้นเวกเตอร์ $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A
ซึ่งสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda = 4$ □

ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n และ λ เป็นจำนวนจริง สังเกตว่าระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ สมมูลกับสมการเอกพันธุ์ $(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}_n$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 2.3.6 และทฤษฎีบท 2.4.4 เราได้ว่า

λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ A	ก็ต่อเมื่อ	$(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}_n$ มีผลเฉลยไม่ชัด
	ก็ต่อเมื่อ	$(A - \lambda I_n)$ ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน
	ก็ต่อเมื่อ	$\det(A - \lambda I_n) = 0$

เราเรียกสมการ $\det(A - \lambda I_n) = 0$ ว่า**สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) ของเมทริกซ์** A ซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญในการหาค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A และเรียก $\det(A - \lambda I_n)$ ซึ่งเป็นพหุนามที่มีดีกรี n ว่า**พหุนามลักษณะเฉพาะ (characteristic polynomial) ของเมทริกซ์** A

ต่อไปเรากำหนดให้

$$A_\lambda = \mathrm{Nul}\,(A - \lambda I_n) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}_n\}$$

เพราะฉะนั้น ถ้า λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A แล้ว A_λ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$ ซึ่งประกอบด้วย $\vec{0}_n$ และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ทั้งหมดซึ่งสมนัยกับ λ เรียกว่า**ปริภูมิลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ซึ่งสมนัยกับ λ (eigenspace of A corresponding to λ)** สังเกตว่า ถ้า λ ไม่เป็นค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A แล้ว $A_\lambda = \{\vec{0}_n\}$

ตัวอย่าง 3.2.2 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix}3 & 2\\3 & 8\end{bmatrix}$ จงหาสมการลักษณะเฉพาะ ค่าลักษณะเฉพาะ และฐานหลักสำหรับปริภูมิลักษณะเฉพาะซึ่งสมนัยกับแต่ละค่าลักษณะเฉพาะที่หาได้

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix}3-\lambda & 2\\3 & 8-\lambda\end{vmatrix} = (3-\lambda)(8-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 11\lambda + 18$$

ดังนั้น สมการลักษณะเฉพาะของ A คือ $\lambda^2 - 11\lambda + 18 = 0$
เพราะว่า $\lambda^2 - 11\lambda + 18 = (\lambda - 2)(\lambda - 9)$ ทำให้ได้ว่าค่าลักษณะเฉพาะของ A คือ $\lambda = 2, 9$

ต่อมา เราจะหาปริภูมิลักษณะเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะแต่ละค่าโดยใช้วิธีที่ได้ศึกษาไว้แล้วในหัวข้อ 2.2 ดังนี้

$\lambda = 2$ เราได้

$$A - 2I_2 = \begin{bmatrix}3-2 & 2\\3 & 8-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}$$

ดังนั้น $x_1 + 2x_2 = 0$ ทำให้ได้ว่า $x_1 = -2x_2$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

ทำให้ได้ว่า $A_2 = \mathrm{Nul}\,(A - 2I_2) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ และมีฐานหลักเป็น $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\lambda = 4$ เราได้

$$A - 4I_2 = \begin{bmatrix} 3-9 & 2 \\ 3 & 8-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $x_1 - \frac{1}{3}x_2 = 0$ ทำให้ได้ว่า $x_1 = \frac{1}{3}x_2$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

ทำให้ได้ว่า $A_4 = \mathrm{Nul}\,(A - 4I_2) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ และมีฐานหลักเป็น $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ $\square$

หมายเหตุ สำหรับ $\lambda = 4$ เราอาจใช้ x_1 เป็นตัวแปรเสรีเพื่อหลีกเลี่ยงเศษส่วน

โดยเขียน $x_2 = 3x_1$ ทำให้ได้ว่า $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 3x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A_4 = \mathrm{Nul}\,(A - 4I_2) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ และมีฐานหลักเป็น $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

ตัวอย่าง 3.2.3 จงหาสมการลักษณะเฉพาะ ค่าลักษณะเฉพาะ และฐานหลักสำหรับปริภูมิลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ซึ่งสมนัยกับแต่ละค่าลักษณะเฉพาะที่หาได้ เมื่อกำหนดให้

(ก) $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4$$

ดังนั้น สมการลักษณะเฉพาะของ A คือ $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$

เพราะว่า $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ ทำให้ได้ว่าค่าลักษณะเฉพาะของ A คือ $\lambda = 1, 2, 2$

ต่อมา เราจะหาปริภูมิลักษณะเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะแต่ละค่าดังนี้

$\lambda = 1$ เราได้

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 5-1 & -6 & -6 \\ -1 & 4-1 & 2 \\ 3 & -6 & -4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

ซึ่งใช้การดำเนินการแถวลดรูปให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น} \quad \begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $x_1 = x_3$ และ $x_2 = -\frac{1}{3}x_3$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ -\frac{1}{3}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A_1 = \mathrm{Nul}\,(A - I_3) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

$\lambda = 2$ เราได้

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 5-2 & -6 & -6 \\ -1 & 4-2 & 2 \\ 3 & -6 & -4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

ซึ่งใช้การดำเนินการแถวลดรูปให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น} \quad x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$$

ทำให้ได้ว่า $x_1 = 2x_2 + 2x_3$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 + 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A_2 = \mathrm{Nul}\,(A - 2I_3) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ □

(ข) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4$$

ดังนั้น สมการลักษณะเฉพาะของ A คือ $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$

เพราะว่า $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ ทำให้ได้ว่าค่าลักษณะเฉพาะของ A คือ $\lambda = 1, 2, 2$

ต่อมา เราจะหาปริภูมิลักษณะเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะแต่ละค่าดังนี้

$\lambda = 1$ เราได้

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 3-1 & 1 & -1 \\ 2 & 2-1 & -1 \\ 2 & 2 & 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งใช้การดำเนินการแถวลดรูปให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น} \quad \begin{aligned} x_1 - \tfrac{1}{2}x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $x_1 = \frac{1}{2}x_3$ และ $x_2 = 0$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A_1 = \mathrm{Nul}\,(A - I_3) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

$\lambda = 2$ เราได้

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 3-2 & 1 & -1 \\ 2 & 2-2 & -1 \\ 2 & 2 & 0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

ซึ่งใช้การดำเนินการแถวลดรูปให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น} \quad \begin{aligned} x_1 + \tfrac{1}{2}x_3 &= 0 \\ x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $x_1 = -\frac{1}{2}x_3$ และ $x_2 = \frac{1}{2}x_3$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_3 \\ \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A_2 = \mathrm{Nul}\,(A - 2I_3) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ $\square$

เราสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ซึ่งสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะที่ต่างๆ กัน ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.2.1 *ถ้า $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ ที่แตกต่างกันของเมทริกซ์ A แล้วเซต $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น*

สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A และ B ขนาด n เรากล่าวว่า**เมทริกซ์ A คล้าย (similar) กับเมทริกซ์** B ถ้ามีเมทริกซ์ไม่เอกฐาน P ขนาด n ที่ทำให้ $B = P^{-1}AP$ สังเกตว่าถ้าเมทริกซ์ A คล้ายกับเมทริกซ์ B แล้ว $\det A = \det B$ และ

$$\det(B - \lambda I_n) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}I_nP) = \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) = \det(A - \lambda I_n)$$

เพราะฉะนั้น

ทฤษฎีบท 3.2.2 *ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n ซึ่งคล้ายกันแล้ว A และ B มีพหุนามลักษณะเฉพาะเหมือนกัน ดังนั้น A และ B มีค่าลักษณะเฉพาะชุดเดียวกัน*

เราได้ข้อสังเกตที่สำคัญจากตัวอย่าง 3.2.3 ว่า เมทริกซ์ที่มีพหุนามลักษณะเฉพาะเดียวกันไม่จำเป็นต้องคล้ายกัน

3.2.2 การแปลงเป็นทแยงมุม

ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n เราจะศึกษาว่าเมื่อใดเมทริกซ์ A จะคล้ายกับเมทริกซ์ทแยงมุม D นั่นคือมีเมทริกซ์ไม่เอกฐาน P ขนาด n ซึ่ง $A = PDP^{-1}$ ส่งผลให้

$$A^k = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\ldots(PDP^{-1}) = PD^kP^{-1}$$

โดยสำหรับเมทริกซ์ทแยงมุม

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

เราได้ว่า

$$D^k = \begin{bmatrix} d_{11}^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_{22}^k & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_{nn}^k \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$A^k = P\begin{bmatrix} d_{11}^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_{22}^k & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_{nn}^k \end{bmatrix}P^{-1}$$

สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก k ทำให้เราสามารถคำนวณค่าของ A^k ได้อย่างรวดเร็ว

เมทริกซ์จัตุรัส A **สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้ (diagonalizable)** ก็ต่อเมื่อเมทริกซ์ A คล้ายกับเมทริกซ์ทแยงมุม

สังเกตว่าหากเมทริกซ์ A มิติ $n \times n$ คล้ายกับเมทริกซ์ทแยงมุม $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ จะได้ว่ามีเมทริกซ์ไม่เอกฐาน $P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$ ที่ทำให้ $AP = PD$ ดังนั้น

$$A\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A\vec{v}_1 & A\vec{v}_2 & \dots & A\vec{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\vec{v}_1 & \lambda_2\vec{v}_2 & \dots & \lambda_n\vec{v}_n \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $A\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i$ นั่นคือ แต่ละหลัก $\vec{v}_i$ ของ P เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ λ_i สำหรับทุก $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ และเนื่องจาก P เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน จึงได้ด้วยว่าเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะในหลักของเมทริกซ์ P นั้นต้องเป็นอิสระเชิงเส้น

เราได้เกณฑ์การตรวจสอบการแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้และวิธีการหาเมทริกซ์ทแยงมุม D และเมทริกซ์ไม่เอกฐาน P โดยอาศัยค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.2.3 *[ทฤษฎีบทการแปลงเป็นทแยงมุม (Diagonalization Theorem)]*
เมทริกซ์จัตุรัส A ขนาด n สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ นั่นคือมีเมทริกซ์ไม่เอกฐาน P และเมทริกซ์ทแยงมุม D ซึ่ง $A = PDP^{-1}$ ก็ต่อเมื่อ เมทริกซ์ A มีเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้น n ตัว โดยเราได้ว่าหลักของเมทริกซ์ P คือ เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้น n ตัวนี้ และสมาชิกทแยงมุมของเมทริกซ์ D คือค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ที่สมนัยตามลำดับกับเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะในเมทริกซ์ P

ตัวอย่าง 3.2.4 จงแปลงเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม นั่นคือ จงหาเมทริกซ์ไม่เอกฐาน P และเมทริกซ์ทแยงมุม D ที่ทำให้ $A = PDP^{-1}$ พร้อมทั้งหาสูตรสำหรับ A^k สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก k

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(1-\lambda) + 8 = \lambda^2 - 8\lambda + 15$$

ดังนั้น สมการลักษณะเฉพาะของ A คือ $\lambda^2 - 8\lambda + 15 = (\lambda - 3)(\lambda - 5) = 0$
ทำให้ได้ว่าค่าลักษณะเฉพาะของ A คือ $\lambda = 3, 5$
ต่อมา เราจะหาปริภูมิลักษณะเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะแต่ละค่าดังนี้
$\lambda = 3$ เราได้

$$A - 3I_2 = \begin{bmatrix} 7-3 & 2 \\ -4 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

ซึ่งใช้การดำเนินการแถวลดรูปให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น $x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0$ ทำให้ได้ว่า $x_1 = -\frac{1}{2}x_2$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A_3 = \mathrm{Nul}\,(A - 3I_2) = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

$\lambda = 5$ เราได้

$$A - 5I_2 = \begin{bmatrix} 7-5 & 2 \\ -4 & 1-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

ซึ่งใช้การดำเนินการแถวลดรูปให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น $x_1 + x_2 = 0$ ทำให้ได้ว่า $x_1 = -x_2$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A_5 = \mathrm{Nul}\,(A - 5I_2) = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 3.2.3 เราได้ว่า $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ และ $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

เพราะว่า $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ และทำให้เราได้

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}^k\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 5^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3^k + 2\cdot 5^k & -3^k + 5^k \\ 2\cdot 3^k - 2\cdot 5^k & 2\cdot 3^k - 5^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก k □

โดยทฤษฎีบท 3.2.1 และทฤษฎีบท 3.2.3 เราได้

บทแทรก 3.2.4 *ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n ซึ่งมีค่าลักษณะเฉพาะแตกต่างกัน n ค่าแล้ว A สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้*

ในกรณีที่ค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A มีค่าไม่แตกต่างกันทั้งหมด นั่นคือ สมการลักษณะเฉพาะของ A มีรากบางรากซ้ำกัน เราสามารถแสดงได้ว่า

ทฤษฎีบท 3.2.5 *ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n ซึ่งมีค่าลักษณะเฉพาะที่แตกต่างกัน คือ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$*

1. *มิติของปริภูมิลักษณะเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ λ_k มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับจำนวนการซ้ำกันของค่าลักษณะเฉพาะ λ_k สำหรับทุก $k = 1, 2, \ldots, p$ นั่นคือ $\operatorname{nullity}(A - \lambda_k I_n) \leq$ จำนวนการซ้ำกันของ λ_k สำหรับทุก $k = 1, 2, \ldots, p$*
2. *เมทริกซ์ A สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้*
   ก็ต่อเมื่อ ผลรวมของมิติของปริภูมิลักษณะเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ A มีค่าเท่ากับ n
   ก็ต่อเมื่อ $\operatorname{nullity}(A - \lambda_k I_n)$ มีค่าเท่ากับจำนวนการซ้ำกันของ λ_k สำหรับทุก $k = 1, 2, \ldots, p$
3. *ถ้า A สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้และ $\mathcal{B}_k$ เป็นฐานหลักสำหรับปริภูมิลักษณะเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ λ_k สำหรับทุก $k = 1, 2, \ldots, p$ แล้ว $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^n$*

ตัวอย่าง 3.2.5 จงพิจารณาว่าเมทริกซ์ในตัวอย่าง 3.2.3 สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

(ก) $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$

วิธีทำ จากตัวอย่าง 3.2.3 (ก) เราได้ว่า

ค่าลักษณะเฉพาะ	ปริภูมิลักษณะเฉพาะ	มิติของปริภูมิลักษณะเฉพาะ
$\lambda = 1$	$\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$	1
$\lambda = 2, 2$	$\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$	2

โดยทฤษฎีบท 3.2.5 เราสรุปได้ว่า A สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้

และเรามี $A = PDP^{-1}$ โดยที่ $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ และ $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ □

(ข) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

วิธีทำ จากตัวอย่าง 3.2.3 (ข) เราได้ว่า

ค่าลักษณะเฉพาะ	ปริภูมิลักษณะเฉพาะ	มิติของปริภูมิลักษณะเฉพาะ
$\lambda = 1$	$\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$	1
$\lambda = 2, 2$	$\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$	1

ดังนั้นการซ้ำกันของค่าลักษณะเฉพาะ 2 มีค่ามากกว่ามิติของปริภูมิลักษณะเฉพาะ
เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 3.2.5 เราได้ว่า A ไม่สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้ □

เราอาจสรุปขั้นตอนการแปลงเมทริกซ์จัตุรัส A ให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ดังนี้

1. หาสมการลักษณะเฉพาะ $\det(A-\lambda I)=0$ และคำนวณค่าลักษณะเฉพาะ λ ซึ่งอาจมีค่าซ้ำกัน
2. หาฐานหลักและมิติสำหรับปริภูมิลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะต่างๆ
3. ตรวจสอบจากทฤษฎีบท 3.2.5 ว่า A สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้หรือไม่
4. หาก A สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้ (นั่นคือมีเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะเพียงพอที่จะสร้างเมทริกซ์ P ให้เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานได้) เขียนเมทริกซ์ทแยงมุม D จากค่าลักษณะเฉพาะ และ P จากเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกัน และเราจะได้ว่า $P^{-1}AP=D$

ให้ $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ เป็นการแปลงเชิงเส้น เรากล่าวว่า T **สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้** ถ้ามีฐานหลัก $\mathcal{B}'$ ของ $\mathbb{R}^n$ ซึ่งเมทริกซ์ $[T]_{\mathcal{B}'}$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

เราอาจตรวจสอบว่าการแปลงเชิงเส้นที่กำหนดให้สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้หรือไม่ จากทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.6 *ให้ $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ เป็นการแปลงเชิงเส้นและ A เป็นเมทริกซ์มาตรฐานสำหรับ T จะได้ว่า T สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้ ก็ต่อเมื่อ A สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้ นั่นคือมีเมทริกซ์ไม่เอกฐาน P และมีเมทริกซ์ทแยงมุม D ซึ่ง $A=PDP^{-1}$ ยิ่งกว่านั้นฐานหลัก $\mathcal{B}'$ ที่สร้างจากหลักของเมทริกซ์ P ทำให้ $[T]_{\mathcal{B}'}=D$*

ตัวอย่าง 3.2.6 ให้ $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้นกำหนดโดย

$$T(x_1,x_2)=(7x_1+2x_2,-4x_1+x_2)$$

สำหรับทุกๆ $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ จงหาฐานหลัก $\mathcal{B}'$ สำหรับ $\mathbb{R}^2$ ซึ่งทำให้ $[T]_{\mathcal{B}'}$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม (ถ้ามี)

วิธีทำ เพราะว่า

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}7x_1+2x_2\\-4x_1+x_2\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}7\\-4\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&2\\-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้นเมทริกซ์มาตรฐานของ T คือ $A=\begin{bmatrix}7&2\\-4&1\end{bmatrix}$

โดยตัวอย่าง 3.2.4 เราได้ว่า A มีค่าลักษณะเฉพาะเป็น 3 และ 5

และมีฐานหลักสำหรับปริภูมิลักษณะเฉพาะเป็น $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ ตามลำดับ

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.2.6 ได้ว่า $\mathcal{B}'=\left\{\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right\}$ ทำให้ $[T]_{\mathcal{B}'}=\begin{bmatrix}3&0\\0&5\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม □

ตัวอย่าง 3.2.7 ให้ $A=\begin{bmatrix}4&-9\\4&-8\end{bmatrix}$ และ $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงเมทริกซ์ กำหนดโดย $T(\vec{x})=A\vec{x}$ สำหรับทุกๆ $\vec{x}\in\mathbb{R}^2$ จงหาฐานหลัก $\mathcal{B}'$ สำหรับ $\mathbb{R}^2$ ซึ่งทำให้ $[T]_{\mathcal{B}'}$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม (ถ้ามี)

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\det(A-\lambda I_2)=\begin{vmatrix}4-\lambda & -9\\ 4 & -8-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(-8-\lambda)+36=\lambda^2-4\lambda+4$$

ดังนั้น สมการลักษณะเฉพาะของ A คือ $\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2=0$
ทำให้ได้ว่าค่าลักษณะเฉพาะของ A คือ $\lambda=-2,-2$
ต่อมา เราจะหาปริภูมิลักษณะเฉพาะซึ่งสมนัยกับ $\lambda=-2$ ดังนี้
เราได้

$$A+2I_2=\begin{bmatrix}4+2 & -9\\ 4 & -8+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -9\\ 4 & -6\end{bmatrix}$$

ซึ่งใช้การดำเนินการแถวลดรูปให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$\sim\begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\quad \text{ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น}\quad x_1-\tfrac{3}{2}x_2=0$$

ทำให้ได้ว่า $x_1=\frac{3}{2}x_2$ เพราะฉะนั้น $\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}x_2\\ x_2\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\ 1\end{bmatrix}$
ดังนั้น $A_{-2}=\operatorname{Nul}(A+2I_2)=\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\ 1\end{bmatrix}\right\}=\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}\right\}$
เพราะฉะนั้น nullity $(A+2I)=1$ น้อยกว่าการซ้ำกันของ $\lambda=-2$
ทำให้ได้โดยทฤษฎีบท 3.2.5 ว่า A ไม่สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้ $\square$

แบบฝึกหัด 3.2

1. จงตอบคำถามต่อไปนี้
   (ก) $\lambda=2$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ $\begin{bmatrix}3 & 8\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
   (ข) $\lambda=-2$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ $\begin{bmatrix}7 & 3\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

2. จงตอบคำถามต่อไปนี้
   (ก) เวกเตอร์ $\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ $\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -3 & 5\end{bmatrix}$ หรือไม่
   ถ้าเป็นจงหาค่าลักษณะเฉพาะซึ่งสมนัยกับเวกเตอร์นี้
   (ข) เวกเตอร์ $\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ $\begin{bmatrix}3 & 6 & 7\\ 3 & 3 & 7\\ 5 & 6 & 5\end{bmatrix}$ หรือไม่
   ถ้าเป็นจงหาค่าลักษณะเฉพาะซึ่งสมนัยกับเวกเตอร์นี้

3. จงหาฐานหลักสำหรับปริภูมิลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ซึ่งสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะที่กำหนดให้

(ก) $A = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \lambda = 4$ (ข) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}, \lambda = 10$

(ค) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -13 & 1 \end{bmatrix}, \lambda = -2$ (ง) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \lambda = 3$

(จ) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \lambda = -3$ (ฉ) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \lambda = 4$

4. สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหาสมการลักษณะเฉพาะ ค่าลักษณะเฉพาะ ฐานหลักสำหรับปริภูมิลักษณะเฉพาะซึ่งสมนัยกับแต่ละค่าลักษณะเฉพาะ พร้อมทั้งพิจารณาว่า A สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้หรือไม่ ถ้าได้ จงเมทริกซ์ไม่เอกฐาน P และเมทริกซ์ทแยงมุม D ซึ่งทำให้ $A = PDP^{-1}$

(ก) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (ข) $A = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ -9 & -10 \end{bmatrix}$ (ค) $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ (ง) $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(จ) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ฉ) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ช) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(ซ) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (ฌ) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 7 \end{bmatrix}$ (ญ) $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & -7 \end{bmatrix}$

(ฎ) $A = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ฏ) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(ฐ) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 9 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

5. สำหรับเมทริกซ์ A ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหาฐานหลัก $\mathcal{B}'$ สำหรับ $\mathbb{R}^2$ ซึ่งทำให้ $[T]_{\mathcal{B}'}$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม (ถ้ามี) เมื่อ $T : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$

(ก) $A = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (ข) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ (ค) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (ง) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

6. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & h & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

จงหาค่าของ h ที่ทำให้ปริภูมิลักษณะเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda = 5$

(ก) มีมิติเท่ากับ 1 (ข) มีมิติเท่ากับ 2

7. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์มิติ 4×4 ซึ่งมีค่าลักษณะเฉพาะเป็น $\lambda = 2, 2, 1, -1$ ถ้า nullity $(A - 2I_4) = 2$ แล้ว A สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

8. จงแสดงว่า ถ้าเมทริกซ์ A คล้ายกับเมทริกซ์ B แล้ว A^T คล้ายกับเมทริกซ์ B^T

9. จงพิสูจน์ว่า ถ้า A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานซึ่งสามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้ แล้ว A^{-1} สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้

10. จงแสดงว่า A เป็นเมทริกซ์เอกฐาน ก็ต่อเมื่อ 0 เป็นค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A

11. จงยกตัวอย่างเมทริกซ์ A และ B มิติ 2×2 ซึ่งมีค่าลักษณะเฉพาะชุดเดียวกัน แต่เมทริกซ์ A ไม่คล้ายกับเมทริกซ์ B

12. สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เรียกผลบวกของสมาชิกทแยงมุม $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ ว่า**รอย (trace) ของเมทริกซ์** A เขียนแทนด้วย $\operatorname{tr} A$ จงแสดงว่า

    (ก) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ สำหรับทุกๆ เมทริกซ์จัตุรัส A และ B ขนาด n

    (ข) ถ้าเมทริกซ์ A คล้ายกับเมทริกซ์ B แล้ว $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$

    (ค) ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ แล้วพหุนามลักษณะเฉพาะของ A คือ $\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A$

3.3 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์

เราอาจหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ในรูป

$$\begin{array}{rcrcr} x_1' & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 \\ x_2' & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 \end{array} \tag{3.3.1}$$

เมื่อ $x_1' = \dfrac{dx_1}{dt}$ และ $x_2' = \dfrac{dx_2}{dt}$ ได้โดยเขียนในรูปสมการเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \text{หรือ} \qquad \vec{x}' = A\vec{x}$$

และเลียนแบบการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง $\dfrac{dx}{dt} = ax$ ซึ่งมีผลเฉลยทั่วไปเป็น $x = Ce^{at}$ ดังนั้นเราคาดว่าผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการ (3.3.1) อยู่ในรูป $\vec{x} = e^{At}\vec{C}$ เมื่อ $\vec{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ และสำหรับเมทริกซ์จัตุรัส M และจำนวนจริง t เราจะนิยาม e^{Mt} จากการเลียนแบบการคำนวณค่า e^t จากอนุกรมกำลัง โดย

$$e^{Mt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Mt)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k t^k}{k!} = I + Mt + \frac{M^2t^2}{2!} + \frac{M^3t^3}{3!} + \cdots$$

และอนุพันธ์ของเมทริกซ์ e^{Mt} ก็คืออนุพันธ์ของแต่ละสมาชิกของเมทริกซ์ ซึ่งทำให้เราพบว่า $(e^{Mt})' = Me^{Mt}$ เพราะฉะนั้น เราได้ว่าผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการ (3.3.1) คือ

$$\vec{x} = e^{At}\vec{C}$$

ในการคำนวณ e^{At} สังเกตว่า เราต้องหา A^k สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก k ดังนั้น ถ้า A สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ เราจะหาเมทริกซ์ไม่เอกฐาน P และเมทริกซ์ทแยงมุม $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$ ซึ่ง $A = PDP^{-1}$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(PDP^{-1}t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P(Dt)^k P^{-1}}{k!} \\
&= P \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Dt)^k}{k!} P^{-1} = P \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(d_1 t)^k}{k!} & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(d_2 t)^k}{k!} \end{bmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{bmatrix} e^{d_1 t} & 0 \\ 0 & e^{d_2 t} \end{bmatrix} P^{-1}
\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ (3.3.1) คือ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} e^{d_1 t} & 0 \\ 0 & e^{d_2 t} \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่าง 3.3.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_2 \\ x_2' &= 2x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

วิธีทำ เราเขียนระบบสมการที่กำหนดให้ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นสมการลักษณะเฉพาะของ A คือ

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$$

ทำให้ได้ว่าค่าลักษณะเฉพาะของ A คือ $\lambda = 2, 3$
ต่อมา เราจะหาปริภูมิลักษณะเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะแต่ละค่าดังนี้
$\lambda = 2$ เราได้

$$A - 2I_2 = \begin{bmatrix} 1-2 & -1 \\ 2 & 4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ซึ่งใช้การดำเนินการแถวลดรูปให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น $x_1 + x_2 = 0$ ทำให้ได้ว่า $x_1 = -x_2$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A_2 = \mathrm{Nul}\,(A - 2I_2) = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\lambda = 3$ เราได้

$$A - 3I_2 = \begin{bmatrix} 1-3 & -1 \\ 2 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งใช้การดำเนินการแถวลดรูปให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น $x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0$ ทำให้ได้ว่า $x_1 = -\frac{1}{2}x_2$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A_3 = \mathrm{Nul}\,(A - 3I_2) = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 3.2.3 เราได้ว่า $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ และ $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้คือ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นจำนวนจริง $\square$

หมายเหตุ สังเกตว่า หากคูณเมทริกซ์ทางขวามือเราอาจเขียนผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ได้ในรูป

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

เมื่อ C_1 และ C_2 เป็นจำนวนจริง

ในกรณีทั่วไปเราได้ว่า

ทฤษฎีบท 3.3.1 *สำหรับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ในรูป $\vec{x}' = A\vec{x}$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n ซึ่งสามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้ ถ้า $\vec{v}_i$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ และ $P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \ldots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานซึ่ง $P^{-1}AP$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมแล้ว จะได้ว่าผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์นี้อยู่ในรูป*

$$\vec{x} = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}\vec{v}_n$$

เมื่อ $C_1, C_2, \ldots, C_n$ เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่าง 3.3.2 จงหาผลเฉลยเฉพาะของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{aligned} x_1' &= 5x_1 - 6x_2 - 6x_3 \\ x_2' &= -x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ x_3' &= 3x_1 - 6x_2 - 4x_3 \end{aligned}$$

เมื่อ $x_1(0) = 4, x_2(0) = 2$ และ $x_3(0) = -1$

วิธีทำ เราเขียนระบบสมการที่กำหนดให้ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

โดยตัวอย่าง 3.2.5 เราได้ว่า $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ และ $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้คือ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = C_1 e^t \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ C_1, C_2 และ C_3 เป็นจำนวนจริง
จากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้ เราอาจหา C_1, C_2 และ C_3 โดยการแทนค่า $t = 0$ ในผลเฉลยทั่วไป ทำให้ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งเราหาผลเฉลยของระบบเชิงเส้นนี้ได้เป็น $C_1 = -2$, $C_2 = 0$ และ $C_3 = 5$
เพราะฉะนั้น ผลเฉลยเฉพาะของระบบสมการเชิงอนุพันธ์นี้คือ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -2e^t \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + 5e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ตามต้องการ □

แบบฝึกหัด 3.3

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

(ก) $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = -4x_1 + 4x_2 \end{cases}$ (ข) $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 \\ x_2' = -2x_1 - x_2 \end{cases}$

(ค) $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 - x_3 \\ x_2' = x_2 + 3x_3 \\ x_3' = 3x_2 + x_3 \end{cases}$ (ง) $\begin{cases} x_1' = 4x_1 \\ x_2' = 3x_1 - 5x_2 \\ x_3' = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases}$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

(ก) $\begin{cases} x_1' = x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ x_2' = -x_2 \\ x_3' = -x_2 - 2x_3 \end{cases}$ เมื่อ $x_1(0) = -3, x_2(0) = 0$ และ $x_3(0) = 3$

(ข) $\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = -2x_2 + x_3 \\ x_3' = x_3 \end{cases}$ เมื่อ $x_1(0) = 2, x_2(0) = 7$ และ $x_3(0) = 15$

คำตอบแบบฝึกหัด 3.1 1.(ก) $\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}$, (ข) $\begin{bmatrix}-\frac{3}{11}\\-\frac{13}{11}\end{bmatrix}$, (ค) $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$, (ง) $\begin{bmatrix}\frac{7}{4}\\-\frac{5}{4}\end{bmatrix}$; 2.($P = \begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{3}\\-2 & 1 & -1\\0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$, $[\vec{v}]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$);
3.($\underset{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}{P} = \begin{bmatrix}4 & -6\\-1 & 1\end{bmatrix}$, $[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}6\\-2\end{bmatrix}$); 4.($\underset{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{9}{8}\\\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8}\\-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix} = \underset{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}{P^{-1}}$, $[\vec{w}_1 - 2\vec{w}_2 + 2\vec{w}_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}\frac{11}{4}\\-\frac{3}{4}\\\frac{3}{2}\end{bmatrix}$);
5. $\begin{bmatrix}2 & -4 & 0\\-1 & 1 & -1\end{bmatrix}$; 6.(ก) $\begin{bmatrix}2 & -3\\3 & -8\end{bmatrix}$, (ข) $\begin{bmatrix}3 & 4\\-2 & -\frac{17}{2}\end{bmatrix}$; 7.(ก) $\begin{bmatrix}-2 & 1\\-5 & 3\end{bmatrix}$, (ข) $\begin{bmatrix}3 & 2\\4 & 3\end{bmatrix}$, (ค) $\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 9\end{bmatrix}$;
8. $\begin{bmatrix}2 & -4 & 5\\0 & -1 & 3\end{bmatrix}$; 9. $3\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 + 4\vec{v}_3$; 10. $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}17 & 7 & -1\\-42 & -17 & 1\\-11 & -5 & 2\end{bmatrix}$, $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}7\\-18\\-3\end{bmatrix}$, $[T(\vec{x})]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-4\\9\\7\end{bmatrix}$;
11. $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-1 & -5 & -3 & -1\\0 & 9 & 5 & 1\\-4 & -22 & -14 & -4\\7 & 39 & 24 & 7\end{bmatrix}$, $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-2\\1\\-2\\8\end{bmatrix}$, $[T(\vec{x})]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-5\\7\\-18\\33\end{bmatrix}$;
12.($[T]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix}4 & 6 & -4\\-1 & -5 & 5\\-2 & -3 & 1\end{bmatrix}$, $[T]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix}-\frac{8}{3} & -\frac{7}{3} & -2\\-\frac{11}{3} & -\frac{13}{3} & -7\\5 & 4 & 7\end{bmatrix}$), ($\underset{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1}{P} = \begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\-1 & 4 & 3\\0 & 3 & 2\end{bmatrix}$,
$[\vec{x}]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $[\vec{x}]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix}0.5\\0\\0.5\end{bmatrix}$, $[T(\vec{x})]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix}6\\-1\\-4\end{bmatrix}$, $[T(\vec{x})]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix}-\frac{7}{3}\\-\frac{16}{3}\\6\end{bmatrix}$, $[T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}_1}$)

คำตอบแบบฝึกหัด 3.2 1.(ก)ไม่, (ข)เป็น; 2.(ก)ไม่ , (ข)เป็น/$\lambda = -2$;
3.(ก) $\left\{\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right\}$, (ข) $\left\{\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}\right\}$, (ค) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}\right\}$, (ง) $\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$, (จ) $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$, (ฉ) $\left\{\begin{bmatrix}2\\3\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$;
4.(ก)($\lambda^2 - \lambda - 6 = 0, \lambda = 3, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \lambda = -2, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$)/$P = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -2\end{bmatrix}$/$D = \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & -2\end{bmatrix}$,
(ข)($\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0, \lambda = 2, \vec{v} = \begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix}$)ไม่สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้,
(ค)($\lambda^2 - 4\lambda - 32 = 0, \lambda = -4, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}-5\\2\end{bmatrix}, \lambda = 8, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$)/$P = \begin{bmatrix}-5 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}$/$D = \begin{bmatrix}-4 & 0\\0 & 8\end{bmatrix}$,
(ง)($\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0, \lambda = 3, \vec{v} = \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$)ไม่สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้,
ข้อ (จ) ถึง (ฉ) ถ้าสามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้ให้เขียน P และ D ด้วยตนเอง*
(จ)($\lambda^3 - 4\lambda^2 - \lambda + 4 = 0, \lambda = 4, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \lambda = -1, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\-3\\0\end{bmatrix}, \lambda = 1, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}-1\\1\\-6\end{bmatrix}$),
(ฉ)($(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0, \lambda = 2, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}-3\\1\\3\end{bmatrix}, \lambda = -1, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \lambda = 1, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$),
(ช)($(\lambda - 2)(\lambda - 3)^2 = 0, \lambda = 3, \vec{v} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \lambda = 2, \vec{v} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$)ไม่สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้,
(ซ)($\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0, \lambda = 2, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}, \lambda = 1, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$),
(ฌ)($\lambda^3 - 12\lambda^2 + 47\lambda - 60 = 0, \lambda = 3, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}, \lambda = 5, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \lambda = 4, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$),
(ญ)($\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0, \lambda = -1, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}, \lambda = -2, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}-3\\1\\-3\end{bmatrix}$),
(ฎ)($(\lambda - 4)(\lambda - 3)^2(\lambda - 1) = 0, \lambda = 3, \vec{v} = \begin{bmatrix}7\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \lambda = 4, \vec{v} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \lambda = 1, \vec{v} = \begin{bmatrix}11\\5\\4\\1\end{bmatrix}$) ไม่สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้,

(ฎ)($(\lambda-3)^2(\lambda-2)^2=0, \lambda=3, \vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \vec{v}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \lambda=2, \vec{v}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \vec{v}_4=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$),

(ฏ)($(\lambda-3)^2(\lambda-1)^2\lambda=0, \lambda=1, \vec{v}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \lambda=3, \vec{v}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \lambda=0, \vec{v}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\3\\-6\\-13\end{bmatrix}$) ไม่สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้;

5.(ก)$B=\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\}, D=\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}$, (ข)$B=\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\}, D=\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}$, (ค)$B=\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\}, D=\begin{bmatrix}2&0\\0&5\end{bmatrix}$,

(ง)$\lambda=2,2, \vec{v}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ไม่มีฐานหลักที่ทำให้$[T]_B$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม; 6.(ก)$h\neq 6$, (ข)$h=6$

คำตอบแบบฝึกหัด 3.3 1.(ก)$\vec{y}=C_1e^{5t}\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix}+C_2e^{0t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, (ข)$\vec{y}=C_1e^{(1+\sqrt{2})t}\begin{bmatrix}1\\-2+\sqrt{2}\end{bmatrix}+C_2e^{(1-\sqrt{2})t}\begin{bmatrix}1\\-2-\sqrt{2}\end{bmatrix}$,

(ค)$\vec{y}=C_1e^{4t}\begin{bmatrix}2\\-3\\-3\end{bmatrix}+C_2e^{-2t}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}+C_3e^{t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, (ง)$\vec{y}=C_1e^{2t}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+C_2e^{4t}\begin{bmatrix}6\\2\\7\end{bmatrix}+C_3e^{-5t}\begin{bmatrix}0\\-7\\1\end{bmatrix}$;

2.(ก)($\vec{y}=C_1e^{t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+C_2e^{-2t}\begin{bmatrix}2\\0\\-3\end{bmatrix}+C_3e^{-t}\begin{bmatrix}-5\\-2\\2\end{bmatrix}, C_1=-1, C_2=-1, C_3=0$),

(ข)($\vec{y}=C_1e^{-2t}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+C_2e^{t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+C_3e^{t}\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}, C_1=2, C_2=2, C_3=5$)

บทที่ 4

เรขาคณิตเชิงเส้นและฐานหลักเชิงตั้งฉาก

4.1 ผลคูณภายในและเซตเชิงตั้งฉาก

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ เราเรียก $\vec{u}^T\vec{v}$ ว่า**ผลคูณภายใน (inner product) หรือ ผลคูณจุด (dot product) ของเวกเตอร์** $\vec{u}$ **และ** $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u}\cdot\vec{v}$ นั่นคือ

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}^T\vec{v}=\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & \dots & u_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}=u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n\in\mathbb{R}$$

เราสามารถแสดงได้โดยง่ายว่า

ทฤษฎีบท 4.1.1 *สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ ใน $\mathbb{R}^n$ และจำนวนจริง c เราได้ว่า*

1. $\vec{u}\cdot\vec{0}_n=0$
2. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
3. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$
4. $(c\vec{u})\cdot\vec{v}=c(\vec{u}\cdot\vec{v})=\vec{u}\cdot(c\vec{v})$
5. $\vec{u}\cdot\vec{u}\geq 0$ *และ* $\vec{u}\cdot\vec{u}=0$ *ก็ต่อเมื่อ* $\vec{u}=\vec{0}$

ความยาว (length) หรือนอร์ม (norm) ของเวกเตอร์ $\vec{v}=(v_1,v_2,\dots,v_n)$ เขียนแทนด้วย $\|\vec{v}\|$ กำหนดโดย

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}=\sqrt{v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2}$$

ดังนั้น

$$\vec{v}\cdot\vec{v}=\|\vec{v}\|^2 \qquad \text{และ} \qquad \|c\vec{v}\|=|c|\|\vec{v}\| \quad \text{สำหรับทุกๆ จำนวนจริง } c$$

ถ้า $\vec{x}$ และ $\vec{y}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ เราเรียก $\|\vec{x}-\vec{y}\|$ ว่า**ระยะทาง (distance) ระหว่างเวกเตอร์** $\vec{x}$ **และ** $\vec{y}$ สังเกตว่า ถ้า $\vec{v}\neq\vec{0}_n$ แล้วเวกเตอร์ $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีความยาวหนึ่งหน่วยในทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\vec{v}$

ตัวอย่าง 4.1.1 ให้ $\vec{v} = (1, 0, -2, 2) \in \mathbb{R}^4$ จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\vec{v}$ และเวกเตอร์สามหน่วยในทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ $\vec{v}$

วิธีทำ เพราะว่า $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

ดังนั้นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\vec{v}$ คือ $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\0\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$

และเวกเตอร์ 3 หน่วยในทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ $\vec{v}$ คือ $-\frac{3}{3}\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\0\\2\\-2\end{bmatrix}$ $\square$

เรากล่าวว่าเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ใน $\mathbb{R}^n$ **ตั้งฉากกัน (orthogonal or perpendicular)** ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ และเรียกเซตของเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ ใน $\mathbb{R}^n$ ว่า**เซตเชิงตั้งฉาก (orthogonal set)** ถ้าเวกเตอร์ที่ต่างกันแต่ละคู่ในเซต S ตั้งฉากกัน นั่นคือ $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$ สำหรับทุก $i \neq j$ เมื่อ $i, j \in \{1, 2, \ldots, p\}$

ตัวอย่าง 4.1.2 เซต $S = \left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-5\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากใน $\mathbb{R}^3$

สมบัติที่สำคัญของเซตเชิงตั้งฉากคือ

ทฤษฎีบท 4.1.2 *ถ้า $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากของเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์แล้ว S เป็นเซตอิสระเชิงเส้น ดังนั้น S เป็นฐานหลักสำหรับปริภูมิย่อย $H = \operatorname{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$*

เราเรียกฐานหลัก $\mathcal{B}$ สำหรับปริภูมิย่อย H ของ $\mathbb{R}^n$ ว่า**ฐานหลักเชิงตั้งฉาก (orthogonal basis)** ถ้า $\mathcal{B}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉาก สังเกตว่า *ฐานหลักมาตรฐานสำหรับ $\mathbb{R}^n$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉาก*

ตัวอย่าง 4.1.3 เซต S ในตัวอย่าง 4.1.2 เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับ $\mathbb{R}^3$

ฐานหลักเชิงตั้งฉากมีสมบัติที่สำคัญคือ

ทฤษฎีบท 4.1.3 *ให้ $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับปริภูมิย่อย H ของ $\mathbb{R}^n$ และ $\vec{y} \in H$ จะได้ว่า*

$$\begin{aligned}\vec{y} &= \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 + \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 + \cdots + \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_p}{\vec{u}_p\cdot\vec{u}_p}\vec{u}_p \\ &= \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2}\vec{u}_1 + \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|^2}\vec{u}_2 + \cdots + \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_p}{\|\vec{u}_p\|^2}\vec{u}_p\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.1.4 จาก $S = \left\{\vec{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{bmatrix}-5\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากฐานหนึ่ง

สำหรับ $\mathbb{R}^3$ ดังนั้น สำหรับ $\vec{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ เราได้ว่า

$$\begin{aligned}
\vec{y} &= \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 + \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 + \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_3}{\vec{u}_3\cdot\vec{u}_3}\vec{u}_3 \\
&= \frac{3(1)+(-1)(-2)+1(1)}{1^2+(-2)^2+1^2}\vec{u}_1 + \frac{3(0)+(-1)1+1(2)}{0^2+1^2+2^2}\vec{u}_2 + \frac{3(-5)+(-1)(-2)+1(1)}{(-5)^2+(-2)^2+1^2}\vec{u}_3 \\
&= \vec{u}_1 + \tfrac{1}{5}\vec{u}_2 - \tfrac{2}{5}\vec{u}_3
\end{aligned}$$

เราเรียกเซตเชิงตั้งฉากของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยว่า**เซตเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal set)** และกล่าวว่าฐานหลักเชิงตั้งฉาก $\mathcal{B}$ สำหรับปริภูมิย่อย H ของ $\mathbb{R}^n$ เป็น**ฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal basis)** ถ้า $\mathcal{B}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ

ตัวอย่าง 4.1.5 จากตัวอย่าง 4.1.2 เราได้ว่า

$$S' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติของ $\mathbb{R}^3$

เราสังเกตว่า

ทฤษฎีบท 4.1.4 *เซตของหลักของ $m \times n$ เมทริกซ์ U เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ ก็ต่อเมื่อ $U^TU = I_n$*

ดังนั้น เราได้โดยง่ายว่า

บทแทรก 4.1.5 *ให้ U เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ซึ่งเซตของหลักเป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ จะได้ว่า*
1. $\|U\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$
2. $U\vec{x}\cdot U\vec{y} = \vec{x}\cdot\vec{y}$
3. $U\vec{x}\cdot U\vec{y} = 0$ *ก็ต่อเมื่อ* $\vec{x}\cdot\vec{y} = 0$

ถ้าเซตของหลักของเมทริกซ์จัตุรัส U เป็นเซตเชิงตั้งฉาก [เชิงตั้งฉากปรกติ] เราเรียกเมทริกซ์ U ว่า **เมทริกซ์เชิงตั้งฉาก (orthogonal matrix)** [**เมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal matrix)**] ซึ่งโดยทฤษฎีบท 4.1.4 เราได้ว่า U เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ ก็ต่อเมื่อ U หาเมทริกซ์ผกผันได้และ $U^{-1} = U^T$

ตัวอย่าง 4.1.6 สังเกตว่า $U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 0 & -5/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ ดังนั้นเราได้ว่า

$$U^{-1} = U^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -5/\sqrt{30} & -2/\sqrt{30} & 1/\sqrt{30} \end{bmatrix}$$

แบบฝึกหัด 4.1

1. ให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
   จงหา $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{v} \cdot \vec{u}$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางเดียวและทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ $2\vec{u} + \vec{v}$
2. ให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
   จงหาเวกเตอร์ 3 หน่วยในทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\vec{u}$ และระยะห่างระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{x}$
3. กำหนดให้ $S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$ และ $\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
   (ก) จงแสดงว่าเซต S เป็นเซตเชิงตั้งฉากใน $\mathbb{R}^3$
   (ข) จงแสดงว่าเซต S เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากของ $\mathbb{R}^3$
   (ค) โดยใช้ทฤษฎีบท 4.1.2 จงเขียน $\vec{x}$ ในรูปผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ในเซต S
   (ง) จงหาเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ U ซึ่งมีหลักเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ในเซต S พร้อมทั้งหา U^{-1}
4. กำหนดให้ $S = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ และ $\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$
   (ก) จงแสดงว่าเซต S เป็นเซตเชิงตั้งฉากใน $\mathbb{R}^3$
   (ข) จงแสดงว่าเซต S เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากของ $\mathbb{R}^3$
   (ค) โดยใช้ทฤษฎีบท 4.1.2 จงเขียน $\vec{x}$ ในรูปผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ในเซต S
   (ง) จงหาเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ U ซึ่งมีหลักเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ในเซต S พร้อมทั้งหา U^{-1}
5. สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ใน $\mathbb{R}^n$ จงแสดงว่า
   (ก) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$
   (ข) $4\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$
   (ค) $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$
6. จงพิสูจน์ว่า ถ้า U เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ แล้ว $\det U = \pm 1$

4.2 การฉายเชิงตั้งฉาก และ กระบวนการกราม-ชมิดต์

ให้ $\vec{z}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ และ H เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$ เรากล่าวว่า $\vec{z}$ **ตั้งฉาก (orthogonal) กับปริภูมิย่อย** H ถ้า $\vec{z}$ ตั้งฉากกับทุกๆ เวกเตอร์ใน H เราเรียกเซตของเวกเตอร์ซึ่งตั้งฉากกับ H ทั้งหมดว่า**ส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉาก (orthogonal complement) ของ** H เขียนแทนด้วย $H^{\perp}$ (อ่านว่า "H perp") นั่นคือ

$$H^{\perp} = \{\vec{z} \in \mathbb{R}^n : \vec{z} \cdot \vec{a} = 0 \text{ สำหรับทุกๆ } \vec{a} \in H\}$$

สังเกตว่า $H \cap H^{\perp} = \{\vec{0}\}$ และ

ทฤษฎีบท 4.2.1 *ให้ H เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$ จะได้ว่า*

1. *$H^{\perp}$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$*
2. *ถ้า $H = \operatorname{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ แล้ว $\vec{z} \in H^{\perp}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{z} \cdot \vec{u}_1 = \vec{z} \cdot \vec{u}_2 = \cdots = \vec{z} \cdot \vec{u}_p = 0$*

พิสูจน์ 1. เพราะว่า $\vec{0}\cdot\vec{a}=0$ สำหรับทุกๆ $\vec{a}\in H$ ดังนั้น $\vec{0}\in H^{\perp}$
ให้ $\vec{x},\vec{y}\in H^{\perp}$ และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ และ ให้ $\vec{a}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ใน H
ดังนั้น $\vec{x}\cdot\vec{a}=0$ และ $\vec{y}\cdot\vec{a}=0$
ทำให้ได้ว่า $(\vec{x}+\vec{y})\cdot\vec{a}=\vec{x}\cdot\vec{a}+\vec{y}\cdot\vec{a}=0$ และ $(c\vec{x})\cdot\vec{a}=c(\vec{x}\cdot\vec{a})=c(0)=0$
เพราะฉะนั้น $\vec{x}+\vec{y}\in H^{\perp}$ และ $c\vec{x}\in H^{\perp}$
เราจึงสรุปได้ว่า $H^{\perp}$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$
2. สมมติว่า $\vec{z}\in H^{\perp}$ ดังนั้น $\vec{z}\cdot\vec{u}=0$ สำหรับทุกๆ $\vec{u}\in H$
เพราะว่า $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_p\}\subseteq H$ ทำให้ได้ว่า $\vec{z}\cdot\vec{u}_1=\vec{z}\cdot\vec{u}_2=\cdots=\vec{z}\cdot\vec{u}_p=0$
ในทางกลับกัน สมมติว่า $\vec{z}\cdot\vec{u}_1=\vec{z}\cdot\vec{u}_2=\cdots=\vec{z}\cdot\vec{u}_p=0$ และให้ $\vec{u}\in H$
เพราะว่า $H=\operatorname{Span}\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p\}$
ดังนั้น $\vec{u}=c_1\vec{u}_1+c_2\vec{u}_2+\cdots+c_p\vec{u}_p$ เมื่อ $c_1,c_2,\dots,c_p\in\mathbb{R}$
ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\vec{z}\cdot\vec{u}&=\vec{z}\cdot(c_1\vec{u}_1+c_2\vec{u}_2+\cdots+c_p\vec{u}_p)\\&=\vec{z}\cdot(c_1\vec{u}_1)+\vec{z}\cdot(c_2\vec{u}_2)+\cdots+\vec{z}\cdot(c_p\vec{u}_p)\\&=c_1(\vec{z}\cdot\vec{u}_1)+c_2(\vec{z}\cdot\vec{u}_2)+\cdots+c_p(\vec{z}\cdot\vec{u}_p)=0\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\vec{u}\in H^{\perp}$ □

จากทฤษฎีบทข้างต้นเรายังได้อีกว่า

ข้อสังเกต ถ้า $H=\operatorname{Span}\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p\}$ แล้ว

$$\begin{aligned}H^{\perp}&=\{\vec{z}\in\mathbb{R}^n:\vec{u}_1\cdot\vec{z}=\vec{u}_2\cdot\vec{z}=\cdots=\vec{u}_p\cdot\vec{z}=0\}\\&=\{\vec{z}\in\mathbb{R}^n:\vec{u}_1^T\vec{z}=\vec{u}_2^T\vec{z}=\cdots=\vec{u}_p^T\vec{z}=0\}\\&=\operatorname{Nul}A^T\qquad\text{เมื่อ } A=\begin{bmatrix}\vec{u}_1&\vec{u}_2&\dots&\vec{u}_p\end{bmatrix}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.2.1 ให้ $H=\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$ จงหาฐานหลักสำหรับ $H^{\perp}$

วิธีทำ เพราะว่า

$$H^{\perp}=\left\{\begin{bmatrix}x_1,x_2,x_3\end{bmatrix}:\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}=0\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}:x_1-2x_2+x_3=0\right\}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}H^{\perp}&=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}:x_1=2x_2-x_3\right\}=\left\{\begin{bmatrix}2x_2-x_3\\x_2\\x_3\end{bmatrix}:x_2,x_3\in\mathbb{R}\right\}\\&=\left\{x_2\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}:x_2,x_3\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น ฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $H^{\perp}$ คือ $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ $\square$

ตัวอย่าง 4.2.2 ให้ $H = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ จงหาฐานหลักสำหรับ $H^{\perp}$

วิธีทำ จากข้อสังเกตหลังทฤษฎีบท 4.2.1 เราได้ว่า

$$H^{\perp} = \operatorname{Nul} A^T \text{ เมื่อ } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น เราจึงลดรูป A^T ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งสมนัยกับสมการเอกพันธุ์

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{นั่นคือ} \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_3 \\ x_2 &= -x_3 \end{aligned} \quad \text{โดยที่ } x_3 \in \mathbb{R}$$

ทำให้ได้ว่า $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ เมื่อ $x_3 \in \mathbb{R}$

ดังนั้น ฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $H^{\perp} = \operatorname{Nul} A^T$ คือ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ $\square$

ให้ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ และ $H = \operatorname{Span}\{\vec{u}\}$ สำหรับแต่ละเวกเตอร์ $\vec{y}$ ใน $\mathbb{R}^n$ เราสนใจที่จะแยก $\vec{y}$ ออกเป็นผลบวกของเวกเตอร์ใน H และเวกเตอร์ใน $H^{\perp}$ กล่าวคือ

$$\vec{y} = \hat{y} + \vec{z}$$

โดยที่ $\hat{y} = \alpha\vec{u}$ สำหรับบาง $\alpha \in \mathbb{R}$ และ $\vec{z} \perp \vec{u}$ เราคำนวณ α โดยเริ่มจากการสังเกตว่า $\vec{z} = \vec{y} - \hat{y} = \vec{y} - \alpha\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ ดังนั้น $(\vec{y} - \alpha\vec{u}) \cdot \vec{u} = 0$ ทำให้

$$\alpha = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \qquad \text{และ} \qquad \hat{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\vec{u}$$

ในกรณีทั่วไปเรามี

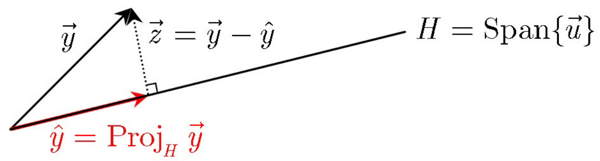
ทฤษฎีบท 4.2.2 *[การแยกเชิงตั้งฉาก (Orthogonal Decomposition)]*
ให้ $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากของเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์และ $H = \text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ จะได้ว่าสำหรับแต่ละเวกเตอร์ $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ จะมีเวกเตอร์

$$\hat{y} = \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 + \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 + \cdots + \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_p}{\vec{u}_p\cdot\vec{u}_p}\vec{u}_p \in H$$

และเวกเตอร์ $\vec{z} = \vec{y} - \hat{y} \in H^\perp$ ซึ่งทำให้

$$\vec{y} = \hat{y} + \vec{z}$$

เราเรียกเวกเตอร์ $\hat{y}$ ว่า**การฉายเชิงตั้งฉากของเวกเตอร์ $\vec{y}$ บน H (orthogonal projection of $\vec{y}$ onto H)** เขียนแทนด้วย $\text{proj}_H\vec{y}$ และเรียกเวกเตอร์ $\vec{z}$ ว่า**ส่วนเติมเต็ม (complement) ของเวกเตอร์ $\vec{y}$ ซึ่งตั้งฉากกับ H**



ตัวอย่าง 4.2.3 กำหนดให้ $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix}-1\\4\\1\end{bmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}$ และ $\vec{x} = \begin{bmatrix}8\\-4\\-3\end{bmatrix}$
เราได้ว่า $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากของ $\mathbb{R}^3$ จงเขียนเวกเตอร์ $\vec{x}$ ในรูปของผลรวมของสองเวกเตอร์ $\vec{y}$ และ $\vec{z}$ โดยที่ $\vec{y} \in \text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ และ $\vec{z} \in \text{Span}\{\vec{u}_3\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากของ $\mathbb{R}^3$ โดยทฤษฎีบท 4.1.3 เราได้ว่า

$$\vec{x} = \frac{\vec{x}\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 + \frac{\vec{x}\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 + \frac{\vec{x}\cdot\vec{u}_3}{\vec{u}_3\cdot\vec{u}_3}\vec{u}_3 = \frac{5}{2}\vec{u}_1 - \frac{3}{2}\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$$

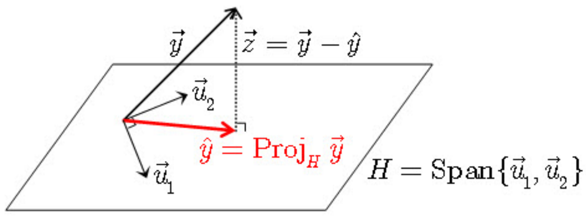
ดังนั้น เรามี $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ โดยที่ $\vec{y} = \frac{5}{2}\vec{u}_1 - \frac{3}{2}\vec{u}_2 \in \text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ และ $\vec{z} = 2\vec{u}_3 \in \text{Span}\{\vec{u}_3\}$
และเรายังได้อีกด้วยว่า $\vec{y} = \text{proj}_H\vec{x} \in H$ เมื่อ $H = \text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ และ $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y} \in \text{Span}\{\vec{u}_3\} = H^\perp$
□

ตัวอย่าง 4.2.4 ให้ $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ และ $\vec{y} = \begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}$ จะได้ว่า $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับปริภูมิย่อย $H = \text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ จงแยกเวกเตอร์ $\vec{y}$ เป็นผลบวกของเวกเตอร์ใน H และ $H^\perp$

วิธีทำ เนื่องจาก $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉาก โดยทฤษฎีบท 4.2.2 เราได้ว่า $\vec{y} = \hat{y} + \vec{z}$ โดยที่

$$\hat{y} = \text{proj}_H\vec{y} = \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 + \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 = -\frac{1}{6}\vec{u}_1 - \frac{2}{3}\vec{u}_2 = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

และ $\vec{z} = \vec{y} - \hat{y} = \begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\\frac{1}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{5}{2}\\0\\\frac{5}{2}\end{bmatrix}$ □



จากทฤษฎีบท 4.2.2 เราเห็นว่าฐานหลักเชิงตั้งฉากมีบทบาทสำคัญในการแยกเชิงตั้งฉาก เราจะปิดท้ายหัวข้อนี้ด้วยการแสดงว่าเราสามารถสร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$ ได้เสมอโดยก่อนอื่นเราจะพิจารณาการสร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.2.5 ให้ $H = \text{Span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ โดยที่ $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ จงสร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับ H

วิธีทำ เราต้องการเซตของเวกเตอร์ $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ ซึ่ง $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ และ $H = \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ ถ้าให้ $\vec{v}_1 = \vec{x}_1$ และ $\vec{v}_2$ เป็นส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉากของ $\vec{x}_2$ บน $\text{Span}\{\vec{x}_1\}$ นั่นคือ

$$\vec{v}_2 = \vec{x}_2 - \hat{x}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1}{\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1}\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} - \frac{5}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $\vec{v}_2 \perp \vec{v}_1$ และ $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \text{Span}\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2 - \frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1}{\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1}\vec{x}_1\right\} = \text{Span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\} = H$
เพราะฉะนั้น $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}\right\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากฐานหนึ่งสำหรับ H $\square$

ตัวอย่าง 4.2.6 ให้ $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น ซึ่งทำให้เป็นฐานหลักสำหรับปริภูมิย่อย $H = \text{Span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ ของ $\mathbb{R}^4$ จงสร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากและฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับ H

วิธีทำ ในการสร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับ H เราจะเริ่มจาก

1. ให้ $\vec{v}_1 = \vec{x}_1$ และ $\vec{v}_2$ เป็นส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉากของ $\vec{x}_2$ บน $\text{Span}\{\vec{x}_1\}$ นั่นคือ

$$\vec{v}_2 = \vec{x}_2 - \text{proj}_{\text{Span}\{x_1\}}\vec{x}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1}{\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1}\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{6}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

ทั้งนี้เราอาจเลือกเวกเตอร์ $\vec{v}_2' = 2\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}$ ซึ่งเป็นพหุคูณของ $\vec{v}_2$ เพื่อความสะดวกในการคำนวณต่อไป ซึ่งในทำนองเดียวกับตัวอย่าง 4.2.5 จะได้ว่า $\vec{v}_2'$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}_1$ และ $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2'\} = \text{Span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ เพราะฉะนั้น $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2'\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากฐานหนึ่งสำหรับ $\text{Span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$

2. ให้ $\vec{v}_3$ เป็นส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉากของ $\vec{x}_3$ บน $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2'\}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}\vec{v}_3 = \vec{x}_3 - \text{proj}_{\text{Span}\{\vec{v}_1,\vec{v}_2'\}}\vec{x}_3 &= \vec{x}_3 - \frac{\vec{x}_3\cdot\vec{v}_1}{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1}\vec{v}_1 + \frac{\vec{x}_3\cdot\vec{v}_2'}{\vec{v}_2'\cdot\vec{v}_2'}\vec{v}_2' \\ &= \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} - \left(-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-1\\2\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{3}{6}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

โดยเราอาจเลือกเวกเตอร์ $\vec{v}_3' = 3\vec{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\0\end{bmatrix}$ ซึ่งเราได้ว่า $\vec{v}_3'$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2'$ และ $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2', \vec{v}_3'\} = \text{Span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$

เพราะฉะนั้น $\left\{\begin{bmatrix}-1\\2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากฐานหนึ่งสำหรับ H

และหากเราทำให้เวกเตอร์ในฐานหลักนี้เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยจะได้ว่า

$\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\2\\1\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติฐานหนึ่งสำหรับ H $\square$

ในกรณีทั่วไป ถ้าเรามี $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับปริภูมิย่อย H จะได้ขั้นตอนในการหาฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับ H เป็น

1. ให้ $\vec{v}_1 = \vec{x}_1$ และ $\vec{v}_2$ เป็นส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉากของ $\vec{x}_2$ บนปริภูมิย่อย $\text{Span}\{\vec{v}_1\}$
2. ให้ $\vec{v}_3$ เป็นส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉากของ $\vec{x}_3$ บนปริภูมิย่อย $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ และโดยการกำหนดเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\vec{v}_i &= \text{ ส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉากของ } \vec{x}_i \text{ บนปริภูมิย่อย } \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{i-1}\} \\ &= \vec{x}_i - \text{proj}_{\text{Span}\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_{i-1}\}}\vec{x}_i \\ &= \vec{x}_i - \left(\frac{\vec{x}_i\cdot\vec{v}_2}{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2}\vec{v}_2 + \cdots + \frac{\vec{x}_i\cdot\vec{v}_{i-1}}{\vec{v}_{i-1}\cdot\vec{v}_{i-1}}\vec{v}_{i-1}\right) \text{ สำหรับทุก } i \in \{2, 3, \ldots, p\}\end{aligned}$$

และเซตของเวกเตอร์ $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ ที่ได้จะเป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากฐานหนึ่งสำหรับ H

เราเรียกกระบวนการสร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับปริภูมิย่อย H ของ $\mathbb{R}^n$ ว่า**กระบวนการกราม-ชมิดต์ (Gram-Schmidt process)** ซึ่งกล่าวโดยสรุปได้เป็น

ทฤษฎีบท 4.2.3 *[กระบวนการกราม-ชมิดต์ (The Gram-Schmidt Process)]*
ให้ $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับปริภูมิย่อย H ของ $\mathbb{R}^n$ กำหนด

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= \vec{x}_1 \\
\vec{v}_2 &= \vec{x}_2 - \frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\vec{v}_1 \\
\vec{v}_3 &= \vec{x}_3 - \frac{\vec{x}_3 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\vec{v}_1 - \frac{\vec{x}_3 \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2}\vec{v}_2 \\
&\vdots \\
\vec{v}_p &= \vec{x}_p - \frac{\vec{x}_p \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\vec{v}_1 - \frac{\vec{x}_p \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2}\vec{v}_2 - \cdots - \frac{\vec{x}_p \cdot \vec{v}_{p-1}}{\vec{v}_{p-1} \cdot \vec{v}_{p-1}}\vec{v}_{p-1}
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากฐานหนึ่งสำหรับ H

เราจึงได้ด้วยว่า

บทแทรก 4.2.4 *ถ้า $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับปริภูมิย่อย H แล้วเราสามารถสร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับ H จากฐานหลัก $\mathcal{B}$ ได้เสมอ*

ตัวอย่าง 4.2.7 จงสร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับ

$$H = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix}\right\}$$

วิธีทำ เราจะตรวจสอบก่อนว่าเซตของเวกเตอร์ $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix}\right\}$ เป็นฐานหลักของ H หรือไม่ โดยเขียนเป็นเมทริกซ์และลดรูปจนได้รูปแบบขั้นบันไดดังนี้

$$A = \begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\1 & 0 & 1\\2 & 1 & 3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

จึงได้โดยทฤษฎีบท 2.2.4 ว่าฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $H = \operatorname{Col} A$ คือ $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

ให้ $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$ และ $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ ซึ่งเราได้โดยกระบวนการกราม-ชมิดต์ว่า ถ้า

$$\vec{v}_1 = \vec{x}_1 \quad \text{และ} \quad \vec{v}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{2}{5}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-\frac{2}{5}\\\frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

จะได้ $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับ H โดยเราอาจเลือก $\vec{v}_2' = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ แทน $\vec{v}_2$

ดังนั้น $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากฐานหนึ่งสำหรับ H □

ทฤษฎีบท 4.2.5 *[การแยกตัวประกอบ QR (QR Factorization)]*
ให้ A เป็นเมทริกซ์มิติ $m \times n$ ซึ่งหลักของ A เป็นเซตอิสระเชิงเส้น จะได้ว่า A สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น $A = QR$ โดยที่ Q เป็นเมทริกซ์มิติ $m \times n$ ซึ่งเซตของหลักของ Q เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติของ $\operatorname{Col} A$ และ R เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนไม่เอกฐานมิติ $n \times n$ ซึ่งทุกสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเป็นบวก

ตัวอย่าง 4.2.8 จงหาการแยกตัวประกอบ QR ของเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ จากตัวอย่าง 4.2.6 เราได้ว่า $\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติฐานหนึ่งสำหรับ $H = \operatorname{Col} A$ เราจึงได้ $A = QR$ เมื่อ

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad R = Q^T A = \begin{bmatrix} \frac{6}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

เป็นการแยกตัวประกอบ QR ของ A □

แบบฝึกหัด 4.2

1. จงหาฐานหลักสำหรับ $H^{\perp}$ เมื่อ

   (ก) $H = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ (ข) $H = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

2. กำหนดให้ $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \vec{u}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

   เราได้ว่า $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากของ $\mathbb{R}^4$ จงเขียนเวกเตอร์ $\vec{x}$ ในรูปของผลรวมของสองเวกเตอร์ $\vec{y}$ และ $\vec{z}$ โดยที่ $\vec{y} \in \operatorname{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ และ $\vec{z} \in \operatorname{Span}\{\vec{u}_4\}$

3. กำหนดให้ $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix}-2\\1\\-1\\1\end{bmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\-2\\-1\end{bmatrix}$, $\vec{u}_4 = \begin{bmatrix}-1\\1\\1\\-2\end{bmatrix}$ และ $\vec{x} = \begin{bmatrix}4\\5\\-3\\3\end{bmatrix}$
เราได้ว่า $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากของ $\mathbb{R}^4$ จงเขียนเวกเตอร์ $\vec{x}$ ในรูปของผลรวมของสองเวกเตอร์ $\vec{y}$ และ $\vec{z}$ โดยที่ $\vec{y} \in \operatorname{Span}\{\vec{u}_1\}$ และ $\vec{z} \in \operatorname{Span}\{\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$

4. จงแสดงว่า $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากและหาการฉายเชิงตั้งฉากของเวกเตอร์ $\vec{y}$ บนปริภูมิย่อย $\operatorname{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$

(ก) $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix}1\\-4\\3\end{bmatrix}$ (ข) $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix}-1\\2\\6\end{bmatrix}$

5. กำหนดให้ H เป็นปริภูมิย่อยที่แผ่ทั่วโดยเซตเชิงตั้งฉากของเวกเตอร์ $\vec{u}$'s
จงแยกเวกเตอร์ $\vec{y}$ เป็นผลบวกของเวกเตอร์ใน H และ $H^\perp$

(ก) $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix}3\\4\\0\end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix}-4\\3\\0\end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix}6\\3\\-2\end{bmatrix}$ (ข) $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix}5\\1\\4\end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}$

(ค) $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix}-1\\3\\1\\-2\end{bmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\\1\end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix}4\\3\\3\\1\end{bmatrix}$ (ง) $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{bmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}$

6. ให้ $\vec{y} = \begin{bmatrix}4\\8\\1\end{bmatrix}$, $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix}2/3\\1/3\\2/3\end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix}-2/3\\2/3\\1/3\end{bmatrix}$, $H = \operatorname{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ และ $U = \begin{bmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2\end{bmatrix}$
จงหา U^TU, UU^T, $\operatorname{proj}_H \vec{y}$ และ $(UU^T)\vec{y}$

7. จงใช้กระบวนการกราม-ชมิดต์สร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากของปริภูมิย่อยที่แผ่ทั่วโดยเวกเตอร์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

(ก) $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ (ข) $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix}8\\5\\-6\end{bmatrix}$ (ค) $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix}2\\-5\\1\end{bmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix}4\\-1\\2\end{bmatrix}$

(ง) $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\-4\\0\\1\end{bmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix}7\\-7\\0\\1\end{bmatrix}$ (จ) $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix}3\\-1\\2\\-1\end{bmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix}-5\\9\\-9\\3\end{bmatrix}$ (ฉ) $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$

8. จงหาฐานหลัก และ ใช้กระบวนการกราม-ชมิดต์สร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติของ $\operatorname{Col} A$ เมื่อกำหนด

(ก) $A = \begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ (ข) $A = \begin{bmatrix}-1&6&6\\1&-2&6\\1&-4&-3\\3&-8&3\end{bmatrix}$ (ค) $A = \begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&-1&1&1\\1&0&1&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}$

9. จงหาการแยกตัวประกอบ QR ของเมทริกซ์ A ต่อไปนี้

(ก) $A = \begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}$ (ข) $A = \begin{bmatrix}1&2\\0&1\\1&4\end{bmatrix}$ (ค) $A = \begin{bmatrix}1&1\\-2&1\\2&1\end{bmatrix}$

(ง) $A = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$ (จ) $A = \begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&1\\1&2&0\end{bmatrix}$ (ฉ) $A = \begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

10. ให้ H เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$ จงแสดงว่า
    (ก) $H \cap H^{\perp} = \{\vec{0}\}$ (ข) $(H^{\perp})^{\perp} = H$

11. ให้ $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากของปริภูมิย่อย H ของ $\mathbb{R}^n$ จงแสดงว่าฟังก์ชัน $T : \mathbb{R}^n \to H$ ซึ่งกำหนดโดย $T(\vec{x}) = \text{proj}_H(\vec{x})$ สำหรับทุกๆ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ เป็นการแปลงเชิงเส้น

12. ให้ $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติของปริภูมิย่อย H ของ $\mathbb{R}^n$ และ $\vec{y}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ จงพิสูจน์ว่า
    (ก) $\text{proj}_H\vec{y} = (\vec{y} \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 + (\vec{y} \cdot \vec{u}_2)\vec{u}_2 + \cdots + (\vec{y} \cdot \vec{u}_p)\vec{u}_p$
    (ข) ถ้า $U = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \ldots & \vec{u}_p \end{bmatrix}$ แล้ว $\text{proj}_H\vec{y} = (UU^T)\vec{y}$

4.3 ปัญหากำลังสองน้อยสุด

ให้ H เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$ และ $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$

สังเกตว่าถ้า $\vec{y} \in H$ แล้ว $\text{proj}_H\vec{y} = \vec{y}$ ในกรณีที่ $\vec{y} \notin H$ เราจะได้ว่า $\|\vec{y} - \text{proj}_H\vec{y}\|$ เป็นระยะทางที่สั้นสุดจาก $\vec{y}$ ไปยัง H จาก

ทฤษฎีบท 4.3.1 *[ทฤษฎีบทการประมาณที่ดีสุด (The Best Approximation Theorem)]*
ให้ H เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$ และ $\vec{y}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ใน $\mathbb{R}^n$ จะได้ว่า $\hat{y} = \text{proj}_H\vec{y}$ เป็นจุดบนปริภูมิย่อย H ซึ่งใกล้ $\vec{y}$ มากสุดในแง่

$$\|\vec{y} - \hat{y}\| < \|\vec{y} - \vec{v}\|$$

สำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{v}$ ใน $H \setminus \{\hat{y}\}$

โดยทฤษฎีบทข้างต้นเราอาจเรียก $\text{proj}_H\vec{y}$ ว่า**การประมาณที่ดีสุดของ $\vec{y}$ โดยเวกเตอร์ใน H (the best approximation to $\vec{y}$ by elements of H)** และเราเรียก $\|\vec{y} - \text{proj}_H\vec{y}\|$ ว่า**ระยะทาง (distance) จาก $\vec{y}$ ไปยังปริภูมิย่อย H**

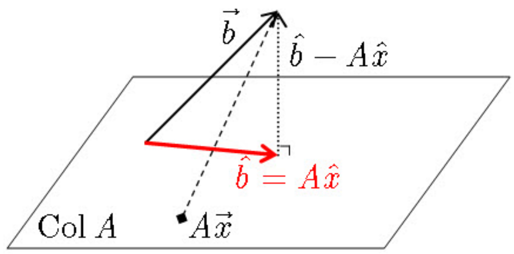
ตัวอย่าง 4.3.1 จงหาการประมาณที่ดีสุดของ $\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ โดยเวกเตอร์ในปริภูมิย่อย $H = \text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ เมื่อ $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ เพราะว่า $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$ ดังนั้น $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับ H
เราจึงได้โดยทฤษฎีบท 4.3.1 ว่า

$$\hat{y} = \text{proj}_H\vec{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\vec{u}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2}\vec{u}_2 = \frac{9}{30}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{-3}{6}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ 2 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

เป็นการประมาณที่ดีสุดของ $\vec{y}$ โดยเวกเตอร์ในปริภูมิย่อย H $\square$

เมื่อระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \vec{b}$ ไม่มีผลเฉลย นั่นคือ $\vec{b}$ ไม่อยู่ใน $\text{Col}\, A$ โดยทฤษฎีบท 4.3.1 เราอาจใช้ตัวประมาณที่ดีสุด $\hat{b}$ จากการฉายเชิงตั้งฉากของเวกเตอร์ $\vec{b}$ บน $\text{Col}\, A$ แล้วหาผลเฉลย $\hat{x}$ ของระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \hat{b}$ ซึ่งเป็นจุดบน $\text{Col}\, A$ ที่อยู่ใกล้ $\vec{b}$ มากสุด ดังรูป



ดังนั้น เราสรุปได้ว่า

บทแทรก 4.3.2 *ถ้า A เป็นเมทริกซ์มิติ $m \times n$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^m$ เราได้ว่า ระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \hat{b}$ เป็นระบบเชิงเส้นต้องกัน เมื่อ $\hat{b} = \mathrm{proj}_{\mathrm{Col}\,A}\vec{b}$ และผลเฉลย $\hat{x}$ ของระบบเชิงเส้นนี้สอดคล้อง*

$$\|\vec{b} - A\hat{x}\| \leq \|\vec{b} - A\vec{x}\|$$

สำหรับทุกๆ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

เราเรียกผลเฉลยของระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \hat{b}$ ว่า**ผลเฉลยกำลังสองน้อยสุด (least-squares solution) ของระบบเชิงเส้น** $A\vec{x} = \vec{b}$ ซึ่งเมื่อหลักของเมทริกซ์ A ตั้งฉากกัน เราสามารถหาผลเฉลยกำลังสองน้อยสุดได้โดยง่าย เช่น

ตัวอย่าง 4.3.2 จงหาผลเฉลยกำลังสองน้อยสุดของระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \vec{b}$ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \text{ และ } \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ สังเกตว่าหลักของเมทริกซ์ A ตั้งฉากกัน ดังนั้นถ้า $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น

$$\hat{b} = \mathrm{proj}_{\mathrm{Col}\,A}\vec{b} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 + \frac{\vec{b}\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 = \frac{8}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{45}{90}\begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

จึงได้โดยบทแทรก 4.3.2 ว่า $\hat{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ เป็นผลเฉลยกำลังสองน้อยสุดของ $A\vec{x} = \vec{b}$ $\square$

ในกรณีทั่วไป ให้ A เป็นเมทริกซ์มิติ $m \times n$, $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^m$ และ $\hat{b} = \mathrm{proj}_{\mathrm{Col}\,A}\vec{b}$ ถ้า $\hat{x}$ สอดคล้องระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \hat{b}$ โดยทฤษฎีบทการแยกเชิงตั้งฉาก เราได้ว่า $\vec{b} - \hat{b} = \vec{b} - A\hat{x} \in (\mathrm{Col}\,A)^{\perp}$ ดังนั้น $b - A\vec{x}$ ตั้งฉาก

กับทุกๆ หลักของเมทริกซ์ A นั่นคือ ถ้า $A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$ เมื่อ $\vec{v}_j \in \mathbb{R}^m$ แล้ว $\vec{v}_j \cdot (\vec{b} - A\vec{x}) = 0$ สำหรับทุก $j = 1, 2, \dots, n$ ทำให้

$$A^T(\vec{b} - A\hat{x}) = \begin{bmatrix} \vec{v}_1^T \\ \vec{v}_2^T \\ \vdots \\ \vec{v}_n^T \end{bmatrix} (\vec{b} - A\hat{x}) = \begin{bmatrix} \vec{v}_1^T(\vec{b} - A\hat{x}) \\ \vec{v}_2^T(\vec{b} - A\hat{x}) \\ \vdots \\ \vec{v}_n^T(\vec{b} - A\hat{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \cdot (\vec{b} - A\hat{x}) \\ \vec{v}_2 \cdot (\vec{b} - A\hat{x}) \\ \vdots \\ \vec{v}_n \cdot (\vec{b} - A\hat{x}) \end{bmatrix} = \vec{0}_n$$

เพราะฉะนั้น

$$A^T A\hat{x} = A^T\vec{b}$$

นั่นคือ

ทฤษฎีบท 4.3.3 *เซตผลเฉลยกำลังสองน้อยสุดของระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \vec{b}$ เป็นเซตเดียวกับเซตผลเฉลยของสมการเมทริกซ์ $A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}$ ซึ่งเป็นระบบเชิงเส้นต้องกัน*

เราเรียกสมการ $A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}$ ว่า**สมการปรกติ (normal equations)** สำหรับระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \vec{b}$ ซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญในการหาผลเฉลยกำลังสองน้อยสุดของระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \vec{b}$

ตัวอย่าง 4.3.3 จงหาผลเฉลยกำลังสองน้อยสุดของระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \vec{b}$ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ สร้างสมการปรกติโดยคำนวณ

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -11 \\ -11 & 22 \end{bmatrix}$$

และ

$$A^T\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 11 \end{bmatrix}$$

ทำให้ได้สมการปรกติ $A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}$ เป็น

$$\begin{bmatrix} 6 & -11 \\ -11 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 11 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ผลเฉลยกำลังสองน้อยสุด $\hat{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 22 & 11 \\ 11 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ □

ตัวอย่าง 4.3.4 จงหาผลเฉลยกำลังสองน้อยสุดของระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \vec{b}$ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ สร้างสมการปรกติโดยคำนวณ

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

และ

$$A^T\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

ทำให้ได้สมการปรกติ $A^TA\vec{x} = A^T\vec{b}$ เป็น

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

ซึ่งเราหาผลเฉลยโดยลดรูปเมทริกซ์แต่งเติมจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นไดลดรูปดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 14 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{นั่นคือ} \quad \begin{array}{rcr} x_1 + x_3 & = & 5 \\ x_2 - x_3 & = & -3 \end{array}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - x_3 \\ -3 + x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ } x_3 \in \mathbb{R}$$

เป็นผลเฉลยกำลังสองน้อยสุดของระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \vec{b}$ □

จากผลเฉลยกำลังสองน้อยสุด $\hat{x}$ จะได้ว่า $A\hat{x}$ เป็นตัวประมาณที่ดีสุดของ $\vec{b}$

เราเรียกระยะทางจาก $\vec{b}$ ไปยัง $A\hat{x}$ ซึ่งเท่ากับ $\|\vec{b} - A\hat{x}\|$ ว่า**ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองน้อยสุด (least-squares error)** ของการประมาณนี้

ตัวอย่าง 4.3.5 จากตัวอย่าง 4.3.3 เรามี

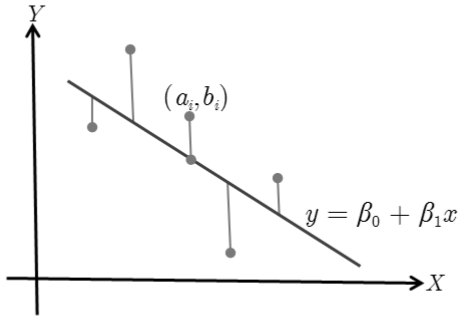
$$\vec{b} - A\hat{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ทำให้ได้ว่าค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองน้อยสุดของการประมาณคือ $\|\vec{b} - A\hat{x}\| = \sqrt{11}$

บ่อยครั้งในการเก็บรวบรวมข้อมูลทำให้เกิดจุด

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$$

ซึ่งเมื่อนำมากราฟ เราจะเห็นว่าความสัมพันธ์ของจุดต่างๆ ดังกล่าวกระจายใกล้เคียงกับเส้นตรง ดังนั้นเราจึงสนใจที่จะหา β_0 และ β_1 ซึ่งทำให้เส้นตรง $y = \beta_0 + \beta_1 x$ อยู่ใกล้จุดต่างๆ มากสุดเท่าที่จะเป็นได้ เราเรียกเส้นตรงนี้ว่า**เส้นกำลังสองน้อยสุด (least-squares line)**



ถ้าจุดข้อมูลอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน เราได้ว่า β_0 และ β_1 สอดคล้องระบบเชิงเส้น

$$\begin{aligned} \beta_0 + \beta_1 a_1 &= b_1 \\ \beta_0 + \beta_1 a_2 &= b_2 \\ &\vdots \\ \beta_0 + \beta_1 a_n &= b_n \end{aligned}$$

ซึ่งเราเขียนเป็นสมการเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

หรือ

$$A\vec{\beta} = \vec{b}$$

แต่จุดต่างๆ ไม่จำเป็นต้องอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ดังนั้นระบบเชิงเส้น $A\vec{\beta} = \vec{b}$ ไม่มีผลเฉลยและเราจะใช้ผลเฉลยกำลังสองน้อยสุดแก้ปัญหานี้

ตัวอย่าง 4.3.6 จงหาเส้นกำลังสองน้อยสุดของจุดข้อมูล

$$(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 2)$$

วิธีทำ นำจุดข้อมูลที่กำหนดให้มาสร้างเมทริกซ์ A และเวกเตอร์ $\vec{b}$ ได้เป็น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

และหาผลเฉลยกำลังสองน้อยสุดของระบบเชิงเส้น $A\vec{\beta} = \vec{b}$ โดยสร้างสมการปรกติจาก

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

และ

$$A^T\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \end{bmatrix}$$

ซึ่งทำให้ได้สมการปรกติ $A^TA\vec{\beta} = A^T\vec{b}$ เป็น

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ผลเฉลยกำลังสองน้อยสุด $\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.4 \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น เส้นกำลังสองน้อยสุดของจุดข้อมูลคือ $y = \beta_0 + \beta_1 x = 0.9 + 0.4x$ □

แบบฝึกหัด 4.3

1. จงหาการประมาณที่ดีสุดของ $\vec{y}$ โดยเวกเตอร์ใน $H = \mathrm{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ เมื่อ

   (ก) $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (ข) $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 13 \end{bmatrix}$

2. จงหาระยะทางจาก $\vec{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}$ ไปยังปริภูมิย่อย $H = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

3. จงหาผลเฉลยกำลังสองน้อยสุดของระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \vec{b}$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากในแต่ละข้อต่อไปนี้

   (ก) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ (ข) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

   (ค) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$ (ง) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. จงหาผลเฉลยกำลังสองน้อยสุดของระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \vec{b}$ พร้อมทั้งหาค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองน้อยสุดของการประมาณในแต่ละข้อต่อไปนี้

(ก) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ข) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

(ค) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ (ง) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

5. จงหาเส้นกำลังสองน้อยสุดของจุดข้อมูลต่อไปนี้

(ก) $(1,0),(2,1),(4,2),(5,3)$ (ข) $(-3,8),(-1,5),(1,3),(3,0)$

(ค) $(1,1),(2,4),(3,6),(4,9)$ (ง) $(0,0),(1,1),(2,3),(3,8)$

4.4 การแปลงเป็นทแยงมุมของเมทริกซ์สมมาตร

เราเรียกเมทริกซ์ A ว่า**เมทริกซ์สมมาตร (symmetric matrix)** ก็ต่อเมื่อ $A^T = A$

ตัวอย่าง 4.4.1 (ก) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร

(ข) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ ไม่เป็นเมทริกซ์สมมาตร

ตัวอย่าง 4.4.2 จงแปลงเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ เป็นทแยงมุม

วิธีทำ คำนวณสมการลักษณะเฉพาะของ A ได้เป็น

$$\det(A - \lambda I_3) = (\lambda+1)(\lambda+4)(5-\lambda) = 0$$

ดังนั้นค่าลักษณะเฉพาะของ A คือ $\lambda = -1, -4, 5$

ต่อมา เราจะหาปริภูมิลักษณะเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะแต่ละค่าดังนี้

$\lambda = -1$ ดำเนินการแถวลดรูป $A + I_3$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A + I_3 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับ} \quad \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $x_1 = 0$ และ $x_2 = -x_3$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A_{-1} = \text{Nul}\,(A + I_3) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\lambda = -4$ ดำเนินการแถวลดรูป $A + 4I_3$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A + 4I_3 = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับ} \quad \begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $\quad x_1 = -x_3 \quad$ และ $\quad x_2 = x_3$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A_{-4} = \text{Nul}\,(A + 4I_3) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\lambda = 5$ ดำเนินการแถวลดรูป $A - 5I_3$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A - 5I_3 = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับ} \quad \begin{aligned} x_1 - 2x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $\quad x_1 = 2x_3 \quad$ และ $\quad x_2 = x_3$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A_5 = \text{Nul}\,(A + 5I_3) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

โดยทฤษฎีบท 3.2.5 เราสรุปได้ว่า A สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้

และเรามี $A = PDP^{-1}$ โดยที่ $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ และ $P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ □

จากตัวอย่าง 4.4.2 สังเกตว่าเมทริกซ์ P ที่ได้จากเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะซึ่งแตกต่างกันแต่ละค่าเป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก เราสรุปกรณีทั่วไปได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 4.4.1 *ถ้า A เป็นเมทริกซ์สมมาตรแล้วปริภูมิลักษณะเฉพาะสองปริภูมิซึ่งสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะที่แตกต่างกันจะตั้งฉากกัน*

เรากล่าวว่าเมทริกซ์จัตุรัส A **สามารถแปลงเป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้ (orthogonally diagonalizable)** ถ้ามีเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ P (เมทริกซ์เชิงตั้งฉาก P ซึ่ง $P^{-1} = P^T$) และเมทริกซ์ทแยงมุม D ซึ่ง $A = PDP^{-1} = PDP^T$

ตัวอย่าง 4.4.3 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

จากตัวอย่าง 4.4.2 เราสังเกตว่าเราอาจเลือกเมทริกซ์

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

ซึ่งเป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ ทำให้ได้ว่า $P^{-1} = P^T$ และ $A = P \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} P^T$
ดังนั้น A สามารถแปลงเป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้

สังเกตว่า ถ้า A สามารถแปลงเป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้ เรามีเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ P และเมทริกซ์ทแยงมุม D ซึ่ง $A = PDP^{-1} = PDP^T$ ดังนั้น

$$A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = A$$

นั่นคือ A เป็นเมทริกซ์สมมาตร ยิ่งกว่านั้น เรามี

ทฤษฎีบท 4.4.2 *ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส เราได้ว่า A สามารถแปลงเป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้ ก็ต่อเมื่อ A เป็นเมทริกซ์สมมาตร*

ในการแปลงเมทริกซ์สมมาตร A เป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากนั้น เราเริ่มจากหาฐานหลักสำหรับแต่ละปริภูมิลักษณะเฉพาะของ A และหาฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับปริภูมิลักษณะเฉพาะของ A จากฐานหลักนั้น ซึ่งบางครั้งต้องอาศัยกระบวนการกราม-ชมิทต์ที่ได้ศึกษาไว้แล้ว และนำฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติเหล่านั้นมาสร้างเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ P ที่ทำให้ $A = PDP^T$ เมื่อ D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมที่สมาชิกทแยงมุมคือค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A ที่สมนัยตามลำดับกับเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะหนึ่งหน่วยในเมทริกซ์ P เช่น

ตัวอย่าง 4.4.4 จงแปลงเมทริกซ์สมมาตร $A = \begin{bmatrix} 7 & -16 & -8 \\ -16 & 7 & 8 \\ -8 & 8 & -5 \end{bmatrix}$ ซึ่งมีสมการลักษณะเฉพาะเป็น $(27-\lambda)(\lambda+9)^2 = 0$ เป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉาก

วิธีทำ ค่าลักษณะเฉพาะของ A คือ $\lambda = 27, -9, -9$
ต่อมา เราจะหาปริภูมิลักษณะเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะแต่ละค่าดังนี้
$\lambda = 27$ ดำเนินการแถวลดรูป $A - 27I_3$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A - 27I_3 = \begin{bmatrix} -20 & -16 & -8 \\ -16 & -20 & 8 \\ -8 & 8 & -32 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ซึ่งสมนัยกับ $$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $x_1 = -2x_3$ และ $x_2 = 2x_3$ เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A_{27} = \text{Nul}\,(A + 27I_3) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติฐานหนึ่งเป็น $\left\{\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}\right\}$

$\lambda = -9$ ดำเนินการแถวลดรูป $A + 9I_3$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A + 9I_3 = \begin{bmatrix} 16 & -16 & -8 \\ -16 & 16 & 8 \\ -8 & 8 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งสมนัยกับ $x_1 - x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0$ ทำให้ได้ว่า $x_1 = x_2 + \frac{1}{2}x_3$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A_{-9} = \text{Nul}\,(A + 9I_3) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{ \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ ซึ่งไม่เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉาก

เราจึงใช้กระบวนการกราม-ชมิดต์หาฐานหลักเชิงตั้งฉากของ A_{-9} ดังนี้

ให้ $\vec{v}_1 = \vec{x}_1$ และ $\vec{v}_2 = \vec{x}_2 - \dfrac{\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1}{\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1}\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$

โดยเราอาจเลือก $\vec{v}_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ แทน $\vec{v}_2$

ดังนั้น $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{4}{\sqrt{18}} \end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติฐานหนึ่งของ A_{-9}

ดังนั้น A สามารถแปลงเป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้และเรามี $A = PDP^T$

โดยที่ $D = \begin{bmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$ และ $P = \begin{bmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} \end{bmatrix}$ $\square$

เราเรียกเซตของค่าลักษณะเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์จัตุรัส A ว่า**สเปกตรัม (spectrum) ของเมทริกซ์** A โดยสำหรับเมทริกซ์สมมาตร A เราได้

ทฤษฎีบท 4.4.3 *[ทฤษฎีบทเชิงสเปกตรัมสำหรับเมทริกซ์สมมาตร (The Spectral Theorem for Symmetric Matrices)] เมทริกซ์สมมาตร A มีสมบัติดังต่อไปนี้*

1. *ค่าลักษณะเฉพาะทุกตัวของ A เป็นจำนวนจริง*
2. *มิติของปริภูมิลักษณะเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ λ มีค่าเท่ากับจำนวนการซ้ำกันของราก λ ในสมการลักษณะเฉพาะ*
3. *ปริภูมิลักษณะเฉพาะสองปริภูมิซึ่งสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะที่ต่างกันจะตั้งฉากกัน*
4. *A สามารถแปลงเป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้*

ให้ A เป็นเมทริกซ์สมมาตรมิติ $n \times n$ ดังนั้น A สามารถแปลงเป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้ ทำให้มีเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ P ซึ่งทำให้ $A = PDP^T$ โดยที่หลักของเมทริกซ์ P คือเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะหนึ่งหน่วย $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (ซ้ำได้) ซึ่งเป็นสมาชิกทแยงมุมของเมทริกซ์ทแยงมุม D และ

$$\begin{aligned} A = PDP^T &= \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \ldots & \vec{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vec{u}_2^T \\ \vdots \\ \vec{u}_n^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1\vec{u}_1 & \lambda_2\vec{u}_2 & \ldots & \lambda_n\vec{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vec{u}_2^T \\ \vdots \\ \vec{u}_n^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

นั่นคือ เราสามารถเขียน A ได้ในรูป

$$A = \lambda_1\vec{u}_1\vec{u}_1^T + \lambda_2\vec{u}_2\vec{u}_2^T + \cdots + \lambda_n\vec{u}_n\vec{u}_n^T$$

เรียกว่า**การแยกเชิงสเปกตรัม (spectral decomposition) ของเมทริกซ์** A โดยแต่ละพจน์ในการแยกนี้จะขึ้นกับ ค่าลักษณะเฉพาะหรือสเปกตรัม และเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ ซึ่งมีแรงก์เป็น 1 (สังเกตว่า $\mathrm{Col}(\vec{u}_i\vec{u}_i^T) = \mathrm{Span}\{\vec{u}_i\}$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \ldots, n$)

ตัวอย่าง 4.4.5 เมทริกซ์สมมาตร A ซึ่ง

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

มีการแยกเชิงสเปกตรัมเป็น

$$\begin{aligned} A &= 8 \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \\ &= 8 \begin{bmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 4.4

1. จงแปลงเมทริกซ์ต่อไปนี้เป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉาก

(ก) $A = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ (ข) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(ค) $A = \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix}$ (ง) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1.5 \\ -1.5 & 7 \end{bmatrix}$

(จ) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (ฉ) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (ช) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(ซ) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix}$ (ฌ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (ญ) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(ฎ) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \lambda = 0, 2$ (ฏ) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \lambda = 1, 3$

2. จงหาการแยกเชิงสเปกตรัมของเมทริกซ์สมมาตร A ในข้อ 1. (ก)–(ง)
3. ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

   จงแสดงว่า 5 เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ A (นั่นคือ $\det(A - 5I) = 0$) และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A และจงแปลง A เป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉาก
4. ให้ $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

   จงแสดงว่า $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A และจงแปลง A เป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉาก
5. ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ โดยที่ $b \neq 0$ จงแปลง A เป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉาก
6. จงแสดงว่า สำหรับเมทริกซ์ A ใดๆ เราได้ว่า AA^T และ A^TA เป็นเมทริกซ์สมมาตร
7. ให้ A เป็นเมทริกซ์สมมาตรไม่เอกฐาน จงแสดงว่า A^{-1} สามารถแปลงเป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้
8. ให้ A เป็นเมทริกซ์สมมาตรมิติ $n \times n$ จงแสดงว่า $(A\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (A\vec{y})$ สำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

4.5 รูปแบบกำลังสอง

ตัวอย่าง 4.5.1 ให้ $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ จงหา $\vec{x}^TA\vec{x}$ สำหรับเมทริกซ์ A ต่อไปนี้

(ก) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ เราได้ว่า $\vec{x}^TA\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 - 3x_2^2$

(ข) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ เราได้ว่า $\vec{x}^TA\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$

ให้ A เป็นเมทริกซ์สมมาตร เราเรียกฟังก์ชัน $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ซึ่งกำหนดโดย

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^TA\vec{x} = \vec{x} \cdot (A\vec{x}) = (A\vec{x}) \cdot \vec{x}$$

สำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ว่า**รูปแบบกำลังสอง (quadratic form)** และเราเรียกเมทริกซ์สมมาตร A ว่า **เมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสอง Q (matrix of the quadratic form Q)**

ข้อสังเกต รูปแบบกำลังสอง Q มี $Q(\vec{0}) = 0$ แต่ไม่เป็นการแปลงเชิงเส้น

ตัวอย่าง 4.5.2 ให้ $Q(\vec{x}) = 3x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + x_2x_3$ สำหรับทุก $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ จงแสดงว่า Q เป็นรูปแบบกำลังสอง พร้อมทั้งหาเมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสอง Q

วิธีทำ ให้ $A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรซึ่ง $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x}$
ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = Q(\vec{x})$$

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2dx_1x_2 + 2ex_1x_3 + 2fx_2x_3 = 3x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + x_2x_3$$

ทำให้ได้ว่า $a = 3,\ b = -5,\ c = 1,\ d = -1,\ e = 0$ และ $f = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & -5 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ $\square$

ข้อสังเกต เราได้ว่ารูปแบบกำลังสองบน $\mathbb{R}^2$ อยู่ในรูปแบบ

$$Q(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = ax_1^2 + bx_2^2 + 2cx_1x_2$$

และรูปแบบกำลังสองบน $\mathbb{R}^3$ อยู่ในรูปแบบ

$$\begin{aligned} Q(\vec{x}) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2dx_1x_2 + 2ex_1x_3 + 2fx_2x_3 \end{aligned}$$

เราเรียกพจน์ cx_ix_j เมื่อ $i \neq j$ ในรูปแบบกำลังสอง Q ว่า**พจน์ผลคูณไขว้ (cross-product term)**
ให้ $\vec{x}$ แทนเวกเตอร์ตัวแปรใน $\mathbb{R}^n$ เราเรียกสมการ

$$\vec{x} = P\vec{y} \quad \text{หรือ} \quad \vec{y} = P^{-1}\vec{x}$$

เมื่อ P เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานและ $\vec{y}$ แทนเวกเตอร์ตัวแปรตัวใหม่ใน $\mathbb{R}^n$ ว่า**การเปลี่ยนตัวแปร (change of variables)**

ต่อไปให้ A เป็นเมทริกซ์สมมาตรและแปลง A เป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉาก โดยเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ P และเมทริกซ์ทแยงมุม D นั่นคือ $P^TAP = D$ ดังนั้น สำหรับรูปแบบกำลังสอง $\vec{x}^TA\vec{x}$ ในเวกเตอร์ตัวแปร $\vec{x}$ เราสามารถเปลี่ยนตัวแปรใหม่โดยใช้เมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ P ได้เป็น $\vec{x} = P\vec{y}$ ซึ่งทำให้

$$\vec{x}^TA\vec{x} = (P\vec{y})^TA(P\vec{y}) = \vec{y}^T(P^TAP)\vec{y} = \vec{y}^TD\vec{y}$$

ไม่มีพจน์ผลคูณไขว้ในตัวแปร $\vec{y}$ ดังนั้น

ทฤษฎีบท 4.5.1 *[ทฤษฎีบทแกนมุขสำคัญ (The Principal Axis Theorem)]*
ให้ A เป็นเมทริกซ์สมมาตร เราได้ว่ามีการเปลี่ยนตัวแปร $\vec{x} = P\vec{y}$ ซึ่งแปลงรูปแบบกำลังสอง $\vec{x}^TA\vec{x}$ ให้อยู่ในรูปแบบ $\vec{y}^TD\vec{y}$ ซึ่งไม่มีพจน์ผลคูณไขว้

ตัวอย่าง 4.5.3 ให้ $Q(x_1,x_2) = 3x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_1x_2$ เป็นรูปแบบกำลังสอง
จงเปลี่ยนตัวแปร $\vec{x} = P\vec{y}$ ซึ่งทำให้ Q ไม่มีพจน์ผลคูณไขว้
พร้อมทั้งร่างกราฟของความสัมพันธ์ $3x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_1x_2 = 14$ อย่างคร่าวๆ

วิธีทำ หาเมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสองได้เป็น $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$
คำนวณค่าลักษณะเฉพาะของ A จากสมการลักษณะเฉพาะของ A

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = (\lambda - 2)(\lambda - 7) = 0$$

ดังนั้น $\lambda = 2, 7$
ต่อมา เราจะหาปริภูมิลักษณะเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะแต่ละค่าดังนี้
$\lambda = 2$ ดำเนินการแถวลดรูป $A - 2I_2$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A - 2I_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับ} \quad x_1 - 2x_2 = 0$$

ทำให้ได้ว่า $x_1 = 2x_2$ เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
ดังนั้น $\operatorname{Nul}(A - 2I_2) = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$
$\lambda = 7$ ดำเนินการแถวลดรูป $A - 7I_2$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A - 7I_2 = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับ} \quad x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0$$

ทำให้ได้ว่า $x_2 = -2x_1$ เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$
ดังนั้น $\operatorname{Nul}(A - 7I_2) = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}$
เนื่องจาก A เป็นเมทริกซ์สมมาตร โดยทฤษฎีบท 4.4.3 จะได้ว่า A แปลงเป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้ นั่นคือเรามี $A = PDP^T$ โดยที่

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ และ } P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \text{ เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ}$$

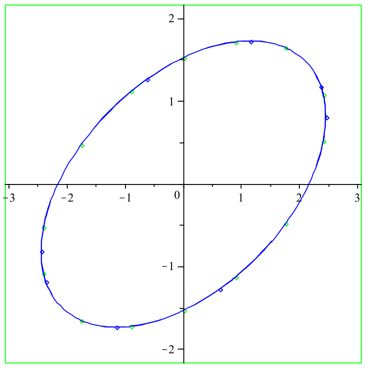
เพราะฉะนั้นถ้าเราแทนค่า $\vec{x} = P\vec{y}$ จะได้ว่า

$$Q(x_1,x_2) = \vec{x}^T A\vec{x} = (P\vec{y})^T A(P\vec{y}) = \vec{y}^T(P^T AP)\vec{y} = \vec{y}^T D\vec{y}$$

นั่นคือ เราเปลี่ยนตัวแปรให้ความสัมพันธ์ $3x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_1x_2 = 14$ ไม่มีพจน์ผลคูณไขว้เป็น

$$2y_1^2 + 7y_2^2 = 14$$

ซึ่งให้กราฟเป็นวงรีสัมพัทธ์กับแกนพิกัด y_1 และ y_2 ดังรูป □



ตัวอย่าง 4.5.4 จงเปลี่ยนตัวแปร $\vec{x} = P\vec{y}$ ซึ่งทำให้ความสัมพันธ์

$$x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 + 4\sqrt{5}x_1 + 3\sqrt{5}x_2 = 0$$

ไม่มีพจน์ผลคูณไขว้ พร้อมทั้งร่างกราฟของความสัมพันธ์นี้อย่างคร่าวๆ

วิธีทำ ก่อนอื่นเราพิจารณารูปแบบกำลังสอง $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2$ ซึ่งมีเมทริกซ์เป็น $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ดังนั้นเราจึงแปลงเมทริกซ์สมมาตร A เป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากโดยคำนวณค่าลักษณะเฉพาะของ A จากสมการลักษณะเฉพาะของ A

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5) = 0$$

ดังนั้น $\lambda = 0, 5$
ต่อมา เราจะหาปริภูมิลักษณะเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะแต่ละค่าดังนี้
$\lambda = 0$ ดำเนินการแถวลดรูป $A - 0I_2$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A - 0I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับ} \quad x_1 + 2x_2 = 0$$

ทำให้ได้ว่า $x_1 = -2x_2$ เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$
ดังนั้น $\operatorname{Nul}(A - 0I_2) = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$
$\lambda = 5$ ดำเนินการแถวลดรูป $A - 5I_2$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A - 5I_2 = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับ} \quad x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0$$

ทำให้ได้ว่า $x_2 = 2x_1$ เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
ดังนั้น $\operatorname{Nul}(A - 5I_2) = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$
เพราะฉะนั้น เรามี $A = PDP^T$ โดยที่

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ และ } P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \text{ เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ}$$

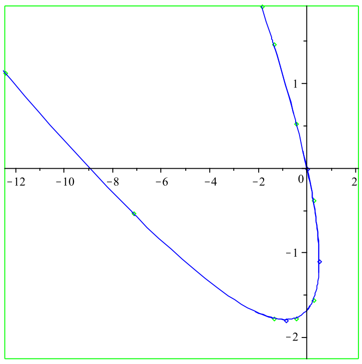
เพราะฉะนั้นถ้าเราแทนค่า $\vec{x} = P\vec{y}$ จะได้ว่า

$$Q(x_1, x_2) = \vec{x}^T A\vec{x} = (P\vec{y})^T A(P\vec{y}) = \vec{y}^T (P^T AP)\vec{y} = \vec{y}^T D\vec{y}$$

และเราสามารถเปลี่ยนตัวแปรให้ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ไม่มีพจน์ผลคูณไขว้เป็น

$$\begin{aligned} x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 + 4\sqrt{5}x_1 + 3\sqrt{5}x_2 &= \vec{x}^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 4\sqrt{5} & 3\sqrt{5} \end{bmatrix} \vec{x} \\ &= \vec{y}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \vec{y} + \begin{bmatrix} 4\sqrt{5} & 3\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \vec{y} \\ &= 5y_2^2 - 5y_1 + 10y_2 \end{aligned}$$

นั่นคือ $5y_2^2 - 5y_1 + 10y_2 = 0$ ซึ่งให้กราฟเป็นพาราโบลาสัมพัทธ์กับแกนพิกัด y_1 และ y_2 ดังรูป $\square$



ตัวอย่าง 4.5.5 จงเปลี่ยนตัวแปร $\vec{x} = P\vec{y}$ ซึ่งทำให้ความสัมพันธ์

$$2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 24x_1 + 12x_2 + 12x_3 - 12 = 0$$

ไม่มีพจน์ผลคูณไขว้

วิธีทำ พิจารณารูปแบบกำลังสอง $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ ซึ่งมีเมทริกซ์เป็น $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ดังนั้นเราจึงแปลงเมทริกซ์สมมาตร A เป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากโดยคำนวณค่าลักษณะเฉพาะของ A จากสมการลักษณะเฉพาะของ A

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 - 3(2-\lambda) - 2 = -\lambda(\lambda-3)^2 = 0$$

ดังนั้น $\lambda = 0, 3$

ต่อมา เราจะหาปริภูมิลักษณะเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะแต่ละค่าดังนี้

$\lambda = 0$ ดำเนินการแถวลดรูป $A - 0I_3$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A - 0I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับ} \quad \begin{aligned} x_1 &= -x_3 \\ x_2 &= x_3 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\text{Nul}\,(A - 0I_2) = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\lambda = 3$ ดำเนินการแถวลดรูป $A - 3I_3$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A - 3I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับ} \quad x_1 = x_2 + x_3$$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\text{Nul}\,(A - 3I_2) = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{ \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ แต่ฐานหลักนี้ไม่เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากจึงใช้กระบวนการกราม-ชมิดต์เพื่อหาฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับ $\text{Nul}\,(A - 3I_2)$ ดังนี้

$$\vec{v}_1 = \vec{x}_1 \quad \text{และ} \quad \vec{v}_2 = \vec{x}_2 - \hat{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งอาจเลือก } \vec{v}_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับ $\text{Nul}\,(A - 3I_2)$

เพราะฉะนั้น เรามี $A = PDP^T$ โดยที่

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ และ } P = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \text{ เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ}$$

เพราะฉะนั้นถ้าเราแทนค่า $\vec{x} = P\vec{y}$ จะได้ว่า

$$Q(x_1, x_2) = \vec{x}^T A \vec{x} = (P\vec{y})^T A (P\vec{y}) = \vec{y}^T (P^T AP)\vec{y} = \vec{y}^T D \vec{y}$$

และเราสามารถเปลี่ยนตัวแปรให้ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ไม่มีพจน์ผลคูณไขว้เป็น

$$\begin{aligned}
&2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3+24x_1+12x_2+12x_3-12\\
&=\vec{x}^T\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}\vec{x}+\begin{bmatrix}24&12&12\end{bmatrix}\vec{x}-\begin{bmatrix}12\end{bmatrix}\\
&=\vec{y}^T\begin{bmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}\vec{y}+\begin{bmatrix}24&12&12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\vec{y}-\begin{bmatrix}12\end{bmatrix}\\
&=3y_2^2+3y_3^2+\frac{36}{\sqrt{2}}y_2+\frac{36}{\sqrt{6}}y_3-12
\end{aligned}$$

นั่นคือ $y_2^2+y_3^2+6\sqrt{2}y_2+2\sqrt{6}y_3-4=0$ □

เราเรียกรูปแบบกำลังสอง Q ว่า

(ก) **เป็นบวกแน่นอน (positive definite)** [**เป็นบวกกึ่งแน่นอน (positive semidefinite)**] ถ้า $Q(\vec{x})>0$ สำหรับทุกๆ $\vec{x}\neq\vec{0}$ [$Q(\vec{x})\geq 0$ สำหรับทุกๆ $\vec{x}$]

(ข) **เป็นลบแน่นอน (negative definite)** [**เป็นลบกึ่งแน่นอน (negative semidefinite)**] ถ้า $Q(\vec{x})<0$ สำหรับทุกๆ $\vec{x}\neq\vec{0}$ [$Q(\vec{x})\leq 0$ สำหรับทุกๆ $\vec{x}$]

(ค) **ไม่แน่นอน (indefinite)** ถ้า $Q(\vec{x})$ มีค่าได้ทั้งบวกและลบ

ซึ่งเราสามารถตรวจสอบได้จากค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสอง ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.5.2 *ให้ A เป็นเมทริกซ์สมมาตรไม่เอกฐาน*
เราได้ว่ารูปแบบกำลังสอง $\vec{x}^TA\vec{x}$
(ก) เป็นบวกแน่นอน ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ ค่าลักษณะเฉพาะของ A มีค่าเป็นบวก
(ข) เป็นลบแน่นอน ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ ค่าลักษณะเฉพาะของ A มีค่าเป็นลบ
(ค) ไม่แน่นอน ก็ต่อเมื่อ A มีค่าลักษณะเฉพาะเป็นบวกและเป็นลบ

ตัวอย่าง 4.5.6 จงพิจารณาว่ารูปแบบกำลังสอง Q ต่อไปนี้เป็นบวกแน่นอน เป็นลบแน่นอน หรือไม่แน่นอน

(ก) $Q(x_1,x_2)=3x_1^2+6x_2^2-4x_1x_2$

(ข) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3$

วิธีทำ (ก) เมทริกซ์สำหรับ Q คือ $A=\begin{bmatrix}3&-2\\-2&3\end{bmatrix}$

ซึ่งโดยตัวอย่าง 4.5.3 A มีค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda=2,7>0$ ดังนั้น Q เป็นบวกแน่นอน

(ข) เมทริกซ์สำหรับ Q คือ $A=\begin{bmatrix}1&1&3\\1&3&1\\3&1&1\end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น สมการลักษณะเฉพาะของ A คือ

$$\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&3\\1&3-\lambda&1\\3&1&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-5)=0$$

ทำให้ได้ว่า A มีค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda=-2,2,5$ ดังนั้น Q ไม่แน่นอน □

แบบฝึกหัด 4.5

1. จงหาค่าของ $\vec{x}^T A\vec{x}$ สำหรับเมทริกซ์สมมาตร A ต่อไปนี้

   (ก) $\begin{bmatrix} 5 & 0.5 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix}$ (ข) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. จงแสดงว่า Q เป็นรูปแบบกำลังสอง พร้อมทั้งหาเมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสอง Q

   (ก) $Q(x_1, x_2) = -5x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2$ (ข) $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2$

   (ค) $Q(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2$ (ง) $Q(x_1, x_2) = x_1x_2$

   (จ) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3$

   (ฉ) $Q(x_1, x_2, x_3) = 9x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3$

3. จงพิจารณาว่ารูปแบบกำลังสอง Q ในข้อ 2. เป็นบวกแน่นอน เป็นลบแน่นอน หรือไม่แน่นอน และจงเปลี่ยนตัวแปร $\vec{x} = P\vec{y}$ ซึ่งทำให้ Q ไม่มีพจน์ผลคูณไขว้

4. ให้ $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2$ เป็นรูปแบบกำลังสอง จงเปลี่ยนตัวแปร $\vec{x} = P\vec{y}$ ซึ่งทำให้ Q ไม่มีพจน์ผลคูณไขว้ พร้อมทั้งร่างกราฟของความสัมพันธ์ $3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 = 1$ อย่างคร่าวๆ

5. จงหาค่าของ k ทั้งหมดที่ทำให้รูปแบบกำลังสองต่อไปนี้เป็นบวกแน่นอน

   (ก) $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + kx_2^2 - 4x_1x_2$

   (ข) $Q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + kx_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

   (ค) $Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2kx_2x_3$

6. โดยอาศัยการคำนวณในแบบฝึกหัด 4.4 ข้อ 1. (ก)–(ฉ) จงเปลี่ยนตัวแปร $\vec{x} = P\vec{y}$ ซึ่งทำให้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้ ไม่มีพจน์ผลคูณไขว้ พร้อมทั้งร่างกราฟของความสัมพันธ์ในข้อ (ก)–(ง) อย่างคร่าวๆ

   (ก) $8x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2 + 2\sqrt{5}x_1 + 4\sqrt{5}x_2 + 4 = 0$

   (ข) $x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1 + 6\sqrt{2}x_2 - 10 = 0$

   (ค) $9x_1^2 + 16x_2^2 - 24x_1x_2 + 25x_1 + 50x_2 - 12 = 0$

   (ง) $3x_1^2 + 7x_2^2 - 3x_1x_2 + 2\sqrt{10}x_1 + 2 = 0$

   (จ) $2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 72 = 0$

   (ฉ) $2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 16$

คำตอบแบบฝึกหัด 4.1 1.($\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}=1$, $\|\vec{u}\|=\sqrt{5}$, $\|\vec{v}\|=\sqrt{13}$)/ $2\vec{u}+\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}$/เวกเตอร์หนึ่งหน่วยคือ $\pm\frac{1}{\sqrt{37}}\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}$;

2.เวกเตอร์ 3 หน่วยทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ คือ $\begin{bmatrix}-\frac{18}{7}\\ \frac{6}{7}\\ -\frac{9}{7}\end{bmatrix}$/$\|\vec{u}-\vec{x}\|=\sqrt{33}$;

3.$\vec{x}=\frac{2}{3}\vec{u}_1+\vec{u}_2+\frac{1}{3}\vec{u}_3$/$U=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{8}{\sqrt{105}}\\ \frac{4}{\sqrt{21}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{105}}\\ -\frac{1}{\sqrt{21}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{105}}\end{bmatrix}$/$U^{-1}=U^T$;

4.$\vec{x}=-\frac{4}{3}\vec{u}_1-\frac{1}{3}\vec{u}_2+\frac{1}{3}\vec{u}_3$/$U=\begin{bmatrix}-\frac{3}{\sqrt{18}} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{18}}\\ \frac{3}{\sqrt{18}} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{18}}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{\sqrt{18}}\end{bmatrix}$/$U^{-1}=U^T$

คำตอบแบบฝึกหัด 4.2 1.(ก)$H^{\perp}=\text{Span}\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$, (ข)$H^{\perp}=\text{Span}\left\{\begin{bmatrix}0\\-2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$;

2.$\vec{x}=\begin{bmatrix}0\\-2\\4\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10\\-6\\-2\\2\end{bmatrix}=\vec{y}+\vec{z}$; 3.$\vec{x}=\begin{bmatrix}2\\4\\2\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\1\\-5\\1\end{bmatrix}=\vec{y}+\vec{z}$; 4.(ก)$\vec{y}=-\frac{3}{2}\vec{u}_1-\frac{5}{2}\vec{u}_2$, (ข)$\vec{y}=\frac{7}{14}\vec{u}_1-\frac{15}{6}\vec{u}_2$;

5.(ก)$\hat{y}=\begin{bmatrix}6\\3\\0\end{bmatrix}$/$\vec{z}=\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}$, (ข)$\hat{y}=\begin{bmatrix}5\\1\\4\end{bmatrix}$/$\vec{z}=\begin{bmatrix}-4\\2\\1\end{bmatrix}$, (ค)$\hat{y}=\begin{bmatrix}\frac{34}{15}\\ \frac{58}{15}\\ \frac{2}{5}\\ \frac{28}{15}\end{bmatrix}$/$\vec{z}=\begin{bmatrix}\frac{26}{15}\\ -\frac{13}{15}\\ \frac{13}{5}\\ -\frac{13}{15}\end{bmatrix}$, (ง)$\hat{y}=\begin{bmatrix}5\\2\\3\\6\end{bmatrix}$/$\vec{z}=\begin{bmatrix}-2\\2\\2\\0\end{bmatrix}$;

6.$U^TU=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$/$UU^T=\begin{bmatrix}\frac{8}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{4}{9}\\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{5}{9}\end{bmatrix}$/ $\text{proj}_H\vec{y}=(UU^T)\vec{y}=\begin{bmatrix}2\\4\\5\end{bmatrix}$;

7.(ก)$\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}\right\}$, (ข)$\left\{\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\5\\-3\end{bmatrix}\right\}$, (ค)$\left\{\begin{bmatrix}2\\-5\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\3\\3\end{bmatrix}\right\}$,

(ง)$\left\{\begin{bmatrix}1\\-4\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}$, (จ)$\left\{\begin{bmatrix}3\\-1\\2\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\6\\-3\\0\end{bmatrix}\right\}$, (ฉ)$\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\\-3\end{bmatrix}\right\}$;

8.(ก)ฐานหลักคือ $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$/ ฐานหลักเชิงตั้งฉากคือ $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}\right\}$,

(ข)ฐานหลักคือ $\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-2\\-4\\-8\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\6\\-3\\3\end{bmatrix}\right\}$/ฐานหลักเชิงตั้งฉากคือ $\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\3\\-1\\-1\end{bmatrix}\right\}$,

(ค)ฐานหลัก คือ$\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$/ฐานหลักเชิงตั้งฉากคือ $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\3\end{bmatrix}\right\}$;

9.(ก)$Q=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}\sqrt{5} & -2\sqrt{5}\\ 2\sqrt{5} & \sqrt{5}\end{bmatrix}$/$R=\begin{bmatrix}\sqrt{5} & \sqrt{5}\\ 0 & \sqrt{5}\end{bmatrix}$, (ข)$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$/$R=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 3\sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$,

(ค)$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{8}{\sqrt{234}}\\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{\sqrt{234}}\\ \frac{2}{3} & \frac{7}{\sqrt{234}}\end{bmatrix}$/$R=\begin{bmatrix}3 & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt{26}}{3}\end{bmatrix}$, (ง)$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$/$R=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$,

(จ)$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$/$R=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$,

(ฉ)$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$/$R=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

คำตอบแบบฝึกหัด 4.3 1.(ก)$\vec{y} = \frac{1}{2}\vec{u}_1 + \frac{3}{2}\vec{u}_2$, (ข)$\vec{y} = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_2$; 2. $2\sqrt{10}$;

3.(ก)$\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix}$, (ข)$\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{8}{7} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$, (ค)$\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{14}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$, (ง)$\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$;

4.(ก)$\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, (ข)$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, (ค)$\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{8}{7} \\ -\frac{13}{7} \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix}$, (ง)$\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

5.(ก)$\vec{\beta} = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.7 \end{bmatrix}$, (ข)$\vec{\beta} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1.3 \end{bmatrix}$, (ค)$\vec{\beta} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{13}{5} \end{bmatrix}$, (ง)$\vec{\beta} = \begin{bmatrix} -0.9 \\ 2.6 \end{bmatrix}$

คำตอบแบบฝึกหัด 4.4 1.(ก)$\lambda = 4, 9/ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$, (ข)$\lambda = -1, 3/ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, (ค)$\lambda = 0, 25/ \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$,

(ง)$\lambda = \frac{5}{2}, \frac{15}{2}/ \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$, (จ)$\lambda = -6, -2, 6/ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$, (ฉ)$\lambda = 2, -1, -1/ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$,

(ช)$\lambda = 3, 3, 0/ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$, (ซ)$\lambda = -3, -50, 25/ \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$, (ฌ)$\lambda = 0, 0, 2/ \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

(ญ)$\lambda = 0, 3, 3/ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$, (ฎ)$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$, (ฏ)$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$;

2.(ก)$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$, (ข)$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$,

(ค)$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$, (ง)$\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{15}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$;

3.$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} /D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

4.$P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} \end{bmatrix} /D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; 5.$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} /\lambda = a \pm b$

คำตอบแบบฝึกหัด 4.5 1.(ก)$5x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2$, (ข)$4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3$;

2.(ก)$\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, (ข)$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, (ค)$\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, (ง)$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$, (จ)$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, (ฉ)$\begin{bmatrix} 9 & -4 & 4 \\ -4 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \end{bmatrix}$;

3.(ก)ลบแน่นอน$\lambda = -1, -6/P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} / - y_1^2 - 6y_2^2$,

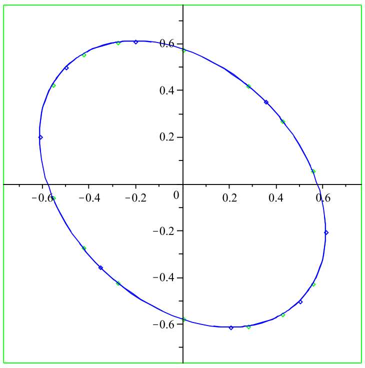
(ข)บวกแน่นอน$\lambda = 1, 5/P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} /y_1^2 + 5y_2^2$,

(ค)บวกแน่นอน$\lambda = 11, 1/P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} /11y_1^2 + y_2^2$,

(ง)ไม่แน่นอน$\lambda = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}/P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} / \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2$,

(จ)บวกกึ่งแน่นอน$\lambda = 0, 1, 2/P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} /y_2^2 + 2y_3^2$,

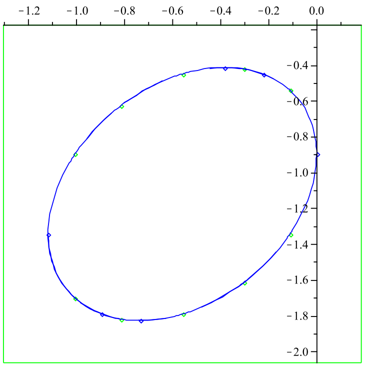
(ฉ)บวกแน่นอน$\lambda = 3, 9, 15/P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} /3y_1^2 + 9y_2^2 + 15y_3^2$;



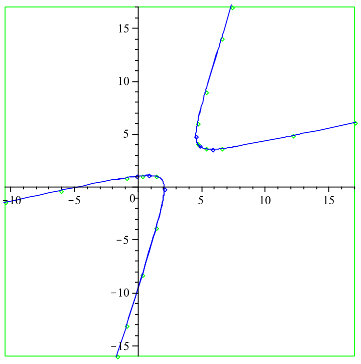
4.$\lambda = 2, 4 / P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} / 2y_1^2 + 4y_2^2 = 1,$

5.(ก)$k > 4$,(ข)$k > 2$,(ค)$k^2 \leq 1$;

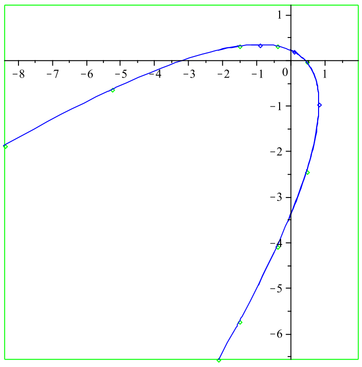
6.



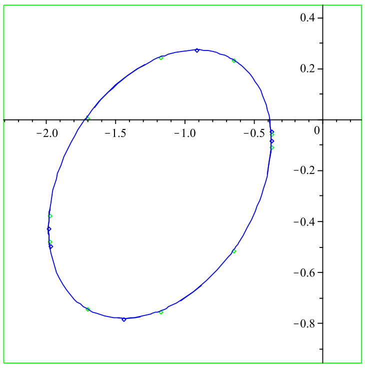
(ก)



(ข)



(ค)



(ง)

บทที่ 5

แนวคิดเชิงนามธรรมของพีชคณิตเชิงเส้น

5.1 ปริภูมิเวกเตอร์และปริภูมิย่อย

เราเคยทราบมาจากระดับมัธยมศึกษาแล้วว่า เซตของจำนวนตรรกยะ $\mathbb{Q}$, เซตของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ และ เซตของจำนวนเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ภายใต้การดำเนินการการบวก $+$ และการคูณ $\times$ สอดคล้องสมบัติดังต่อไปนี้

ให้ F แทนเซตใดเซตหนึ่งข้างต้น

(+1) (การปิด (closure) การบวก) $x + y \in F$ สำหรับทุกๆ $x, y \in F$

(+2) (การเปลี่ยนหมู่ (associativity) การบวก) $(x + y) + z = x + (y + z)$ สำหรับทุกๆ $x, y, z \in F$

(+3) (การมีเอกลักษณ์การบวก) มี $0 \in F$ ที่ทำให้ $x + 0 = x = 0 + x$ สำหรับทุกๆ $x \in F$ เรียก 0 ว่า**สมาชิกเอกลักษณ์ (identity) ภายใต้การบวก**ของเซต F

(+4) (การสลับที่ (commutativity) การบวก) $x + y = y + x$ สำหรับทุกๆ $x, y \in F$

(+5) (การมีตัวผกผันการบวก) สำหรับแต่ละ $x \in F$ มี $u \in F$ ที่ทำให้ $x + u = 0 = u + x$ เรียก u ว่า**ตัวผกผัน (inverse) การบวก**ของ x ซึ่งโดยทั่วไป เราเขียนแทนด้วย $-x$

($\times$1) (การปิดการคูณ) $x \times y \in F$ สำหรับทุกๆ $x, y \in F$

($\times$2) (การเปลี่ยนหมู่การคูณ) $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$ สำหรับทุกๆ $x, y, z \in F$

($\times$3) (การมีเอกลักษณ์การคูณ) มี $1 \in F$ ที่ทำให้ $x \times 1 = x = 1 \times x$ สำหรับทุกๆ $x \in F$ เรียก 1 ว่า**สมาชิกเอกลักษณ์ภายใต้การคูณ**ของเซต F

($\times$4) (การสลับที่การคูณ) $x \times y = y \times x$ สำหรับทุกๆ $x, y \in F$

($\times$5) (การมีตัวผกผันการคูณ) สำหรับแต่ละ $x \neq 0$ ใน F มี $v \in F$ ที่ทำให้ $x \times v = 1 = v \times x$ เรียก v ว่า**ตัวผกผันการคูณ**ของ x ซึ่งโดยทั่วไป เราเขียนแทนด้วย x^{-1}

(+$\times$) (การแจกแจง distributive) $(x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$ และ $z \times (x + y) = (z \times x) + (z \times y)$ สำหรับทุกๆ $x, y, z \in F$

เราเรียกเซต F ใดๆ ภายใต้การดำเนินการ **การบวก** $+$ และ**การคูณ** $\times$ สอดคล้องทุกสมบัติข้างต้นว่า**ฟีลด์ (field)** นอกจากฟีลด์ $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ และ $\mathbb{C}$ แล้ว เรายังได้ว่า

ตัวอย่าง 5.1.1 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $F_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ สำหรับ a และ b ใดๆ ใน F_p เรากำหนด

$$a + b = \text{เศษจากการหาร } a + b \text{ ด้วย } p$$

$$a \times b = \text{เศษจากการหาร } ab \text{ ด้วย } p$$

จะได้ว่า $(F_p, +, \times)$ เป็นฟีลด์ที่มีสมาชิกจำนวนจำกัด

5.1.1 ปริภูมิเวกเตอร์

ให้ $(F, +, \times)$ เป็นฟีลด์ เราเรียกสมาชิกของ F ว่า**สเกลาร์ (scalar)** และ ให้ V เป็นเซตพร้อมการดำเนินการ **การบวก (addition)** $\oplus$ เราเรียกสมาชิกของ V ว่า**เวกเตอร์ (vector)** กำหนด $\odot$ เรียกว่า**การคูณโดยสเกลาร์ (scalar multiplication) บน** V โดยสำหรับสเกลาร์ c ใน F และเวกเตอร์ $\vec{v}$ ใน V เราได้ว่า $c \odot \vec{v} \in V$ เราเรียก $(V, \oplus, \odot)$ ว่า**ปริภูมิเวกเตอร์ (vector space) เหนือฟีลด์** F ถ้า

1. V ภายใต้การดำเนินการการบวก $\oplus$ สอดคล้องสมบัติ (+1) ถึง (+5) (โดยการแทนที่เซต F ด้วยเซต V และแทนที่ $+$ ด้วย $\oplus$)
2. $(c_1 + c_2) \odot \vec{v} = (c_1 \odot \vec{v}) \oplus (c_2 \odot \vec{v})$ สำหรับทุกๆ $c_1, c_2 \in F$ และ $\vec{v} \in V$
3. $(c_1 \times c_2) \odot \vec{v} = c_1 \odot (c_2 \odot \vec{v})$ สำหรับทุกๆ $c_1, c_2 \in F$ และ $\vec{v} \in V$
4. $c \odot (\vec{v}_1 \oplus \vec{v}_2) = (c \odot \vec{v}_1) \oplus (c \odot \vec{v}_2)$ สำหรับทุกๆ $c \in F$ และ $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$
5. $1 \odot \vec{v} = \vec{v}$ สำหรับทุกๆ $\vec{v} \in V$

เราเขียนแทนสมาชิกเอกลักษณ์ภายใต้การบวกของ V ด้วย $\vec{0}_V$ เรียกว่า**เวกเตอร์ศูนย์ (zero vector)**

ทฤษฎีบท 5.1.1 *ให้ $(V, \oplus, \odot)$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F, $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน V และ c เป็นสเกลาร์ใน F จะได้ว่า*
(ก) $0 \odot \vec{v} = \vec{0}_V$ *(ข)* $(-1) \odot \vec{v} = -\vec{v}$ *(ค)* $c \odot \vec{0}_V = \vec{0}_V$

หากไม่สับสนระหว่างการบวกบน F และ บน V เรานิยมเขียนแทน $\oplus$ บน V ด้วย $+$ และนิยมเขียนแทน $c \odot \vec{v}$ ด้วย $c\vec{v}$

ในหัวข้อ 1.1 เราได้นิยามเมทริกซ์บน $\mathbb{R}$ ซึ่งจากการนิยามดังกล่าว เราสามารถนิยามเมทริกซ์เหนือฟีลด์ F พร้อมทั้งการบวกและการคูณโดยสเกลาร์ได้โดยแทนที่ $\mathbb{R}$ ด้วย F

ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก เราเขียนแทนเซตของเมทริกซ์บน F มิติ $m \times n$ ทั้งหมดด้วย $M_{m,n}(F)$ และให้ $M_n(F) = M_{n,n}(F)$ ซึ่งเราเรียกสมาชิกในเซตนี้ว่าเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n และเราเขียนแทนเซตของเวกเตอร์หลักบน F มิติ $m \times 1$ ทั้งหมดด้วย F^m ยิ่งกว่านั้น ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเมทริกซ์เหนือฟีลด์ของจำนวนจริงที่เราได้ศึกษาไปในบทที่ 1 และ 2 ยังคงเป็นจริงเมื่อแทนที่ฟีลด์ของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ ด้วยฟีลด์ F ใดๆ

ตัวอย่าง 5.1.2 [ตัวอย่างของปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F]

1. ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก เราได้ว่า $M_{m,n}(F)$ ภายใต้การบวก และ การคูณโดยสเกลาร์ที่นิยามข้างต้น เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F ดังนั้น $M_n(F)$ และ F^m เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F ด้วย

2. ให้ $F^{\mathbb{N}}$ แทนเซตของลำดับของสมาชิกใน F ทั้งหมด นั่นคือ

$$F^{\mathbb{N}} = \{(a_n) : a_n \in F \text{ สำหรับทุกๆ จำนวนนับ } n\}$$

กำหนดการบวกและการคูณด้วยสมาชิกของ F โดยสำหรับลำดับ (a_n) และ (b_n) ใน $F^{\mathbb{N}}$ และ $c \in F$ เราให้

$$(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n) \quad \text{และ} \quad c\,(a_n) := (ca_n)$$

จะได้ว่า $F^{\mathbb{N}}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F เรียกว่า**ปริภูมิลำดับ (sequence space)**

3. ให้ S เป็นเซตใดๆ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง และ ให้ F^S แทนเซตของฟังก์ชันทั้งหมดจากเซต S ไปยังฟีลด์ F นั่นคือ

$$F^S = \{f \mid f : S \to F\}$$

กำหนดการบวกและการคูณด้วยสมาชิกของ F โดยสำหรับฟังก์ชัน f และ g ใน F^S และ $c \in F$ เราให้

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{และ} \quad (c\,f)(x) = cf(x) \quad \text{สำหรับทุกๆ } x \in S$$

จะได้ว่า F^S เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F เรียกว่า**ปริภูมิฟังก์ชัน (function space)**

4. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์และ $F_n[x]$ แทนเซตของพหุนาม (polynomial) ดีกรีไม่เกิน n ที่มีสัมประสิทธิ์อยู่ในฟีลด์ F และมีตัวไม่กำหนด (indeterminate) เป็น x นั่นคือ

$$F_n[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n : a_i \in F \text{ สำหรับทุกๆ } i \in \{0,1,2,\ldots,n\}\}$$

กำหนดการบวกและการคูณด้วยสมาชิกของ F โดยสำหรับพหุนาม $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ และ $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$ ใน $F_n[x]$ และ $c \in F$ เราให้

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \cdots + (a_n+b_n)x^n \\ \text{และ}\;\; c(p(x)) &= (ca_0) + (ca_1)x + (ca_2)x^2 + \cdots + (ca_n)x^n \end{aligned}$$

จะได้ว่า $F_n[x]$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F สังเกตว่า เรามี $F_{n-1}[x] \subset F_n[x]$ ทุกๆ จำนวนเต็มบวก n

5. ให้ $F[x]$ แทนเซตของพหุนามทั้งหมดที่มีสัมประสิทธิ์อยู่ในฟีลด์ F และมีตัวไม่กำหนดเป็น x นั่นคือ

$$\begin{aligned} F[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n : n \geq 0 \\ \text{และ } a_i \in F \text{ สำหรับทุกๆ } i \in \{0,1,2,\ldots,n\}\} \end{aligned}$$

จะได้ว่า $F[x] = \bigcup\limits_{n\geq 0} F_n[x]$ และ ใช้การบวกและการคูณด้วยสมาชิกของ F บน $F_n[x]$ เราได้ว่า $F[x]$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F เรียกว่า**ปริภูมิพหุนาม (polynomial space) เหนือฟีลด์** F

ทฤษฎีบท 5.1.2 *ให้ $V_1, V_2, \ldots, V_n$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F กำหนดการบวกและการคูณด้วยสมาชิกของ F บน $V = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ โดยสำหรับ $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n), (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n) \in V$ และ $c \in F$ เราให้*

$$\begin{aligned} (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n) + (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n) &= (\vec{v}_1 + \vec{w}_1, \vec{v}_2 + \vec{w}_2, \ldots, \vec{v}_n + \vec{w}_n) \\ \text{และ} \qquad c(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n) &= (c\vec{v}_1, c\vec{v}_2, \ldots, c\vec{v}_n) \end{aligned}$$

*จะได้ว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F เรียก V ว่า**ผลคูณตรง (direct product) ของ** $V_1, V_2, \ldots, V_n$*

ตัวอย่าง 5.1.3 กำหนดให้ $V = \mathbb{R}^2$ จงพิจารณาว่าการกำหนดการบวกและการคูณด้วยจำนวนจริงบน V ดังต่อไปนี้ทำให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ของจำนวนจริงหรือไม่ เพราะเหตุใด
(ก) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 y_2)$ และ $c(x_1, x_2) = (cx_1, x_2)$
สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$ และ $c \in \mathbb{R}$
(ข) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ และ $c(x_1, x_2) = (cx_2, cx_1)$
สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$ และ $c \in \mathbb{R}$

ลองทำ 5.1.1 ให้ $V = \mathbb{R}^2$ กำหนดการบวกและการคูณด้วยจำนวนจริงบน V โดย

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
$$c(x_1, x_2) = (cx_1, \frac{x_2}{c}) \text{ ถ้า } c \neq 0 \text{ และ } 0(x_1, x_2) = (0, 0)$$

สำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$ และ $c \in \mathbb{R}$ จงพิจารณาว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $\mathbb{R}$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

5.1.2 ปริภูมิย่อย

ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F และ W เป็นเซตย่อยของ V เรากล่าวว่า W เป็น **ปริภูมิย่อย (subspace) ของ** V ก็ต่อเมื่อ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F ภายใต้การบวกและการคูณโดยสเกลาร์เดียวกับ V

ทฤษฎีบท 5.1.3 *ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F และ W เป็นเซตย่อยของ V เราได้ว่า W เป็นปริภูมิย่อยของ V ก็ต่อเมื่อ $\vec{0}_V \in W$ และ $\vec{v}_1 + c\vec{v}_2 \in W$ สำหรับทุกๆ $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in W$ และ $c \in F$*

ตัวอย่าง 5.1.4
1. สำหรับปริภูมิเวกเตอร์ V ใดๆ เหนือฟีลด์ F เราได้ว่า $\{\vec{0}_V\}$ และ V เป็นปริภูมิย่อยของ V เรียกว่า**ปริภูมิย่อยชัด (trivial subspace)**
2. ให้ n จำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ เราได้ว่า $F_n[x]$ เป็นปริภูมิย่อยของ $F[x]$
3. ให้ $\alpha \in F$ และ $V_\alpha = \{(x_1, x_2) : x_1 = \alpha x_2\}$ จะได้ว่า V_α เป็นปริภูมิย่อยของ F^2
4. ให้ $\ell^\infty(\mathbb{R}) = \{(a_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N} : (a_n) \text{ เป็นลำดับลู่เข้า}\}$ จะได้ว่า ℓ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^\mathbb{N}$
5. ให้ $C^0(-\infty, \infty) = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} : f \text{ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน } (-\infty, \infty)\}$ จะได้ว่า $C^0(-\infty, \infty)$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^\mathbb{R}$
6. ให้ $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f'' = f\}$ จะได้ว่า W เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^\mathbb{R}$
7. ให้ $W_1 = \{p(x) \in F[x] : p(1) = 0\}$ และ $W_2 = \{p(x) \in F[x] : p(0) = 1\}$ จะได้ว่า W_1 เป็นปริภูมิย่อยของ $F[x]$ แต่ W_2 ไม่เป็นปริภูมิย่อยของ $F[x]$

ลองทำ 5.1.2
1. ให้ $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a + b = c + d \right\}$ และ $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : ad - bc = 0 \right\}$
จงพิจารณาว่า W_1 และ W_2 เป็นปริภูมิย่อยของ $M_2(\mathbb{R})$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
2. ให้ $W = \{A \in M_n(F) : A \text{ เป็นเมทริกซ์สมมาตร}\}$
จงพิจารณาว่า W เป็นปริภูมิย่อยของ $M_n(F)$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

3. ให้ $W_1 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : x+2$ หาร $p(x)$ ลงตัว$\}$ และ $W_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] :$ สมการ $p(x) = 0$ มีรากซ้ำกันสองราก$\}$ จงพิจารณาว่า W_1 และ W_2 เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}[x]$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
4. ให้ $C^1(-\infty, \infty)$ แทนเซตของฟังก์ชันค่าจริงซึ่งอนุพันธ์มีความต่อเนื่องบน $(-\infty, \infty)$ จงแสดงว่า $C^1(-\infty, \infty)$ เป็นปริภูมิย่อยของ $C^0(-\infty, \infty)$
5. ให้ $S = \left\{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 0\right\}$ จงแสดงว่า S เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F สำหรับเวกเตอร์ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ ใน V และสเกลาร์ $c_1, c_2, \ldots, c_p$ ใน F เราเรียกเวกเตอร์

$$\vec{y} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_p\vec{v}_p$$

ว่า**การรวมเชิงเส้น (linear combination)** $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ **ด้วยน้ำหนัก (weight)** $c_1, c_2, \ldots, c_p$

ให้ S เป็นเซตย่อยของ V ที่ไม่ใช่เซตว่าง เราเรียกเซตของการรวมเชิงเส้นทั้งหมดของเวกเตอร์ในเซต S ว่า**เซตย่อยของ V ที่แผ่ทั่วโดย S (subset of V spanned by S)** เขียนแทนด้วย $\operatorname{Span} S$ นั่นคือ

$$\operatorname{Span} S := \{c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_p\vec{v}_p \in V : c_1, c_2, \ldots, c_p \in F, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p \in S\}$$

เพื่อความสะดวก เรากำหนด $\operatorname{Span}\emptyset = \{\vec{0}\}$

สังเกตว่า $\vec{0} \in \operatorname{Span} S$, $S \subseteq \operatorname{Span} S$ และ $\operatorname{Span}\{\vec{0}\} = \{\vec{0}\}$ เราได้ว่า

ทฤษฎีบท 5.1.4 *ให้ S เป็นเซตย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ V เหนือฟีลด์ F จะได้ว่า $\operatorname{Span} S$ เป็นปริภูมิย่อยของ V เรียกว่า**ปริภูมิย่อยของ V ที่แผ่ทั่วโดย S (subspace of V spanned by S)***

ถ้า $\operatorname{Span} S = V$ เรากล่าวว่า S **แผ่ทั่ว (span)** V และถ้ามี S เป็นเซตจำกัดซึ่ง $\operatorname{Span} S = V$ เรากล่าวว่า V **มีมิติจำกัด (finite dimensional)**

ตัวอย่าง 5.1.5 จงพิจารณาว่าพหุนามต่อไปนี้อยู่ในปริภูมิย่อย

$$W = \operatorname{Span}\{x^3 - 2x^2 - 5x - 3, 3x^3 - 5x^2 - 4x - 9\}$$

ของ $\mathbb{R}[x]$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

(ก) $2x^3 - 2x^2 + 12x - 6$ (ข) $3x^3 - 2x^2 + 7x + 8$

ตัวอย่าง 5.1.6 จงแสดงว่า

(ก) $\operatorname{Span}\{x^2 + 3x - 2, 2x^2 + 5x - 3, -x^2 - 4x + 4\} = \mathbb{R}_2[x]$

(ข) $\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\} = M_2(\mathbb{R})$

ลองทำ 5.1.3
1. ให้ $W = \operatorname{Span}\{1 + x, 2 + x^2\}$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}_2[x]$ จงพิจารณาว่า 1 และ $1 - x + x^2$ อยู่ใน W หรือไม่ เพราะเหตุใด
2. จงแสดงว่า $\operatorname{Span}\{1 - x, 1 + x, x^2\} = \mathbb{R}_2[x]$

เราเรียกเซตย่อย S ของ V ว่า**อิสระเชิงเส้น (linearly independent)** ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ ใน S และสเกลาร์ $c_1, c_2, \ldots, c_p$ ในฟีลด์ F ถ้า

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_p\vec{v}_p = \vec{0}_V$$

แล้ว $c_1 = c_2 = \cdots = c_p = 0$ ดังนั้นเซตย่อย S ของ V **ไม่อิสระเชิงเส้น (linearly dependent)** ก็ต่อเมื่อ มีเวกเตอร์ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ ใน S และสเกลาร์ $c_1, c_2, \ldots, c_p$ ในฟีลด์ F ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันซึ่งทำให้ $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_p\vec{v}_p = \vec{0}_V$

ตัวอย่าง 5.1.7 จงพิจารณาว่าเซตต่อไปนี้เป็นเซตอิสระเชิงเส้น หรือไม่ เพราะเหตุใด

(ก) $\{x^2+3x-2, 2x^2+5x-3, -x^2-4x+4\}$ ใน $\mathbb{R}_2[x]$

(ข) $\{e^x, \sin x\}$ ใน $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

(ค) $\{1, \sin^2 x, \cos 2x\}$ ใน $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

(ง) $\left\{\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\right\}$ ใน $M_2(\mathbb{R})$

ลองทำ 5.1.4

1. ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F และ $\vec{v}, \vec{w} \in V$ จงแสดงว่า ถ้า $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้นแล้ว $\{\vec{v}-\vec{w}, \vec{v}+\vec{w}\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น
2. ให้ $a, b \in \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่า $\{e^{ax}, e^{bx}\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ $a \neq b$
3. ให้ F เป็นฟีลด์ และ $S = \{(a,b),(c,d)\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ใน F^2 จงแสดงว่า S เป็นเซตอิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ $ad-bc \neq 0$

5.1.3 ฐานหลักและมิติ

ฐานหลัก (basis) สำหรับปริภูมิย่อย W ของปริภูมิเวกเตอร์ V เหนือฟีลด์ F คือเซตย่อย $\mathcal{B}$ ของ W ซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นและแผ่ทั่ว W นั่นคือ $\mathcal{B} \subseteq W$ เป็นอิสระเชิงเส้นและ $\operatorname{Span}\mathcal{B} = W$

ทฤษฎีบท 5.1.5 *ให้ W เป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ V เหนือฟีลด์ F และ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ และ $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ W จะได้ว่า $m = n$*

จากทฤษฎีบท 5.1.5 ทำให้เราได้ว่า ฐานหลักทุกฐานหลักสำหรับปริภูมิย่อยซึ่งมีมิติจำกัด W ของปริภูมิเวกเตอร์ V เหนือฟีลด์ F มีจำนวนสมาชิกเท่ากัน เราเรียกจำนวนสมาชิกของฐานหลักสำหรับ W ว่า**มิติ (dimension) ของ** W เขียนแทนด้วย $\dim W$

ตัวอย่าง 5.1.8

1. สำหรับแต่ละ $i = 1,2,\ldots,m$ และ $n = 1,2,\ldots,n$ ให้ E_{ij} แทน $m \times n$ เมทริกซ์ซึ่งสมาชิกที่อยู่ในแถวที่ i และหลักที่ j มีค่าเป็น 1 และสมาชิกตัวอื่นๆ มีค่าเป็น 0 จะได้ว่า $\mathcal{B} = \{E_{ij} : i = 1,2,\ldots,m$ และ $j = 1,2,\ldots,n\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $M_{m,n}(F)$ เรียกว่า**ฐานหลักมาตรฐาน (standard basis) สำหรับ** $M_{m,n}(F)$ เพราะฉะนั้น $\dim M_{m,n}(F) = mn$

   ในกรณีที่ $n = 1$ ให้ $\vec{e}_i = E_{i1}$ สำหรับทุกๆ $i = 1,2,\ldots,m$ ดังนั้น $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m\}$ เป็นฐานหลักมาตรฐานสำหรับ F^m
2. $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $F_n[x]$ เรียกว่า**ฐานหลักมาตรฐาน (standard basis) สำหรับ** $F_n[x]$ เพราะฉะนั้น $\dim F_n[x] = n+1$
3. $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $F[x]$ เรียกว่า**ฐานหลักมาตรฐาน (standard basis) สำหรับ** $F[x]$ เพราะฉะนั้น $F[x]$ ไม่มีมิติจำกัด
4. $\left\{\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $M_2(\mathbb{R})$
5. จาก $\mathbb{C} = \{a+bi : a,b \in \mathbb{R}\}$ เราอาจพิจารณา $\mathbb{C}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ ซึ่งมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\{1, i\}$

ตัวอย่าง 5.1.9 จงแสดงว่า $W = \left\{ \begin{bmatrix} a+b & b \\ a-2c & 0 \end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$ เป็นปริภูมิย่อยของ $M_2(\mathbb{R})$ พร้อมทั้งหาฐานหลักและมิติของ W

ลองทำ 5.1.5 1. จงแสดงว่า $\{2, 1+x, x^3, x^4+x^2+2, 3x^4+x\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $\mathbb{R}_4[x]$

2. จงพิจารณาว่าเซตต่อไปนี้เป็นฐานหลักสำหรับ $M_2(\mathbb{R})$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

(ก) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ (ข) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

ให้ A และ B เป็นเซตย่อยใดๆ ที่ไม่ใช่เซตว่างของปริภูมิเวกเตอร์ V เหนือฟีลด์ F
เรานิยาม

$$A + B = \{\vec{a} + \vec{b} : \vec{a} \in A \text{ และ } \vec{b} \in B\}$$

ทฤษฎีบท 5.1.6 *ให้ W_1 และ W_2 เป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ V เหนือฟีลด์ F เราได้ว่า $W_1 + W_2$ และ $W_1 \cap W_2$ เป็นปริภูมิย่อยของ V และ $W_1 \times W_2$ เป็นปริภูมิย่อยของ $V \times V$*

ตัวอย่าง 5.1.10 กำหนดให้

$$W_1 = \{(x_1 - x_2, x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \text{ และ } W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 = x_3\}$$

เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$ จงหาฐานหลักและมิติของ $W_1 + W_2$ และ $W_1 \cap W_2$

ลองทำ 5.1.6 กำหนดให้

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a - b = c - d \right\}$$

$$\text{และ} \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a-b & b+c \\ a & b-c \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

(ก) จงแสดงว่า W_1 และ W_2 เป็นปริภูมิย่อยของ $M_2(\mathbb{R})$
(ข) จงหาฐานหลักและมิติของ W_1 และ W_2
(ค) จงหาฐานหลักและมิติของ $W_1 + W_2$ และ $W_1 \cap W_2$

5.2 การแปลงเชิงเส้น

ให้ V และ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F เราเรียกฟังก์ชัน $T : V \to W$ ว่า**การแปลงเชิงเส้น (linear transformation)** ถ้าสำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v} \in V$ และ สเกลาร์ $c \in F$ เราได้ว่า

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) \quad \text{และ} \quad T(c\vec{u}) = cT(\vec{u})$$

ข้อสังเกต 1. T เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก V ไป W ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v} \in V$ และ สเกลาร์ $c, d \in F$ จะได้ว่า $T(c\vec{u} + d\vec{v}) = cT(\vec{u}) + dT(\vec{v})$

2. ถ้า $T : V \to W$ เป็นการแปลงเชิงเส้น แล้ว

$$T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \text{ และ } T(-\vec{v}) = -T(\vec{v}) \text{ สำหรับทุกๆ เวกเตอร์ } \vec{v} \in V$$

ตัวอย่าง 5.2.1

1. ให้ $T : F^n \to F^{n-1}$ กำหนดโดย
$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2, x_3, \ldots, x_n)$$
จะได้ว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้น

2. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $T : F_{n-1}[x] \to F^n$ กำหนดโดย
$$T(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$$
สำหรับทุกๆ $a_i \in F$ จะได้ว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้น

3. ให้ $T : F[x] \to F$ กำหนดโดย $T(p(x)) = p(1)$ สำหรับทุกๆ พหุนาม $p(x) \in F[x]$
จะได้ว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้น

4. ให้ $T : M_{m,n}(F) \to M_{n,m}(F)$ กำหนดโดย $T(A) = A^T$ สำหรับทุกๆ $m \times n$ เมทริกซ์ A
จะได้ว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้น

5. ให้ $T : \ell^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย $T((a_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
จะได้ว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้น

6. ให้ $C^1(-\infty, \infty)$ แทนเซตของฟังก์ชันค่าจริงซึ่งอนุพันธ์มีความต่อเนื่องบน $(-\infty, \infty)$
กำหนด $D : C^1(-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^\mathbb{R}$ โดย $D(f) = f'$ สำหรับทุก ๆ ฟังก์ชัน $f \in C^1(-\infty, \infty)$
จะได้ว่า D เป็นการแปลงเชิงเส้น

7. ให้ $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย $T(A) = \det A$ สำหรับทุกๆ 2×2 เมทริกซ์ A
จะได้ว่า T ไม่เป็นการแปลงเชิงเส้น

8. ให้ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย $T(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$ สำหรับทุกๆ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
จะได้ว่า T ไม่เป็นการแปลงเชิงเส้น

ลองทำ 5.2.1

1. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก $M_2(\mathbb{R})$ ไปยัง $\mathbb{R}$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
(ก) $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + c - 2d$ (ข) $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a^2 + b^2$

2. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นการแปลงเชิงเส้นบน $F_2[x]$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
(ก) $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2$
(ข) $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + 1) + (a_1 + 1)x + (a_2 + 1)x^2$

3. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นการแปลงเชิงเส้นบน $C^0(-\infty, \infty)$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
(ก) $T(f(x)) = 1 + f(x)$ (ข) $T(f(x)) = f(f(x))$ (ค) $T(f(x)) = f(x - 1)$

4. สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เหนือฟีลด์ F เราเรียกผลบวกของสมาชิกทแยงมุม $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ ว่า**รอย (trace) ของเมทริกซ์** A เขียนแทนด้วย $\operatorname{tr} A$ จงแสดงว่า ฟังก์ชัน $T : M_n(F) \to F$ กำหนดโดย $T(A) = \operatorname{tr} A$ เป็นการแปลงเชิงเส้น

5. ให้ $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากของปริภูมิย่อย H ของ $\mathbb{R}^n$ จงแสดงว่าฟังก์ชัน $T : \mathbb{R}^n \to H$ ซึ่งกำหนดโดย $T(\vec{x}) = \operatorname{proj}_H(\vec{x})$ สำหรับทุกๆ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ เป็นการแปลงเชิงเส้น

ทฤษฎีบท 5.2.1 *ให้ V และ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F และ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ V จะได้ว่า สำหรับฟังก์ชัน t ใดๆ จาก $\mathcal{B}$ ไปยัง W จะมีการแปลงเชิงเส้น $T : V \to W$ เพียงการแปลงเชิงเส้นเดียว ซึ่ง $T(\vec{v}_i) = t(\vec{v}_i)$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \ldots, n$*

ดังนั้น ในการนิยามการแปลงเชิงเส้น T จาก V ไปยัง W จึงเพียงพอที่จะกำหนดค่าของ T บนทุกๆ เวกเตอร์ในฐานหลักสำหรับ V เท่านั้น

ตัวอย่าง 5.2.2 จงหาสูตรของการแปลงเชิงเส้น T ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขที่กำหนดให้

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_4[x]$ โดยที่ $T(1,0,0) = 1 + x, T(1,1,1) = 2 + x^3$ และ $T(0,1,0) = x^4 + 3x + 1$
2. $T : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_3[x]$ โดยที่ $T(2) = 4x^3$ และ $T(1+i) = 1 + x$
3. $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{C}$ โดยที่ $T(1) = 2i, T(1+x) = 1 + i$ และ $T(1-x^2) = 2 - i$

ตัวอย่าง 5.2.3 ให้ $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}[x]$ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่ง $T(x+1) = x$, $T(x-1) = 1$ และ $T(x^2) = -x^2$ จงหา $T(2 + 3x - x^2)$

ลองทำ 5.2.2

1. จงหาสูตรของการแปลงเชิงเส้น T ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขที่กำหนดให้
   (ก) $T : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_2[x]$ โดยที่ $T(1-i) = 2x^2$ และ $T(1+i) = 1 + x$
   (ข) $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ โดยที่ $T(1) = (2,1), T(1-x) = (0,1)$ และ $T(x + x^2) = (1,0)$
2. ให้ $T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}^3$ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่ง $T(2-x) = (1,-1,1)$ และ $T(1+x) = (0,1,0)$ จงหา $T(-1+2x)$
3. ให้ $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $\mathbb{R}^2$ และ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ซึ่ง $T(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{v}$ และ $T(2\vec{v} - \vec{w}) = 2\vec{v}$ จงหา $T(\vec{v})$ และ $T(\vec{w})$

ทฤษฎีบท 5.2.2 *ให้ V และ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F และ $\mathcal{L}(V,W)$ แทนเซตของการแปลงเชิงเส้นทั้งหมดจาก V ไป W นั่นคือ*

$$\mathcal{L}(V,W) = \{T \mid T : V \to W \text{ เป็นการแปลงเชิงเส้น}\}$$

เรากำหนดการบวกและการคูณด้วยสมาชิกของ F โดยสำหรับการแปลงเชิงเส้น S และ T ใน $\mathcal{L}(V,W)$ และ $c \in F$ เราให้

$$(S+T)(\vec{v}) = S(\vec{v}) + T(\vec{v}) \quad \text{และ} \quad (c\,S)(\vec{v}) = cS(\vec{v}) \quad \text{สำหรับทุกๆ } \vec{v} \in V$$

*จะได้ว่า $\mathcal{L}(V,W)$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F เรียกว่า**ปริภูมิเชิงเส้น (linear space)***

ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F

เราเรียกการแปลงเชิงเส้นจาก V ไปยัง F ว่า**ฟังก์ชันนัลเชิงเส้น (linear functional)** เนื่องจาก F เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F ดังนั้น $\mathcal{L}(V,F)$ ซึ่งประกอบด้วยฟังก์ชันนัลเชิงเส้นทั้งหมดจาก V ไปยัง F เป็นปริภูมิเวกเตอร์ เรียกว่า**ปริภูมิคู่เสมอกัน (dual space) ของ** V เขียนแทนด้วย V^*

ให้ V และ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F และ T เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก V ไปยัง W

เคอร์เนล (kernel) ของการแปลงเชิงเส้น T เขียนแทนด้วย $\ker T$ คือเซต

$$\{\ker T = \vec{v} \in V : T(\vec{v}) = \vec{0}_W\}$$

ซึ่งเราได้ว่า

ทฤษฎีบท 5.2.3 *ให้ V และ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F*
ถ้า T เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก V ไปยัง W แล้ว $\ker T$ เป็นปริภูมิย่อยของ V

ให้ T เป็นฟังก์ชันจากเซต V ไปเซต W
เรนจ์ (range) ของ T คือเซต

$$\operatorname{range} T = \{\vec{w} \in W : \text{ มี } \vec{v} \in V \text{ ซึ่ง } T(\vec{v}) = \vec{w}\} = \{T(\vec{v}) \in W : \vec{v} \in V\}$$

เรากล่าวว่า T เป็น **ฟังก์ชันทั่วถึง (onto)** W ก็ต่อเมื่อ $\operatorname{range} T = W$ และ เรากล่าวว่า T **มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one)** หรือเขียนสั้นๆ เป็น “T 1-1” ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละเวกเตอร์ $\vec{x}$ และ $\vec{y}$ ใน V ถ้า $T(\vec{x}) = T(\vec{y})$ แล้ว $\vec{x} = \vec{y}$ ในกรณีที่ V และ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F และ T เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก V ไปยัง W เรามี

ทฤษฎีบท 5.2.4 *ให้ V และ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F และ ให้ T เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก V ไปยัง W เราได้ว่า*
(ก) $\operatorname{range} T$ เป็นปริภูมิย่อยของ W
(ข) T มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ $\ker T = \{\vec{0}_V\}$

ให้ V และ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์มิติจำกัดเหนือฟีลด์ F และ T เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก V ไปยัง W เราเรียกมิติของเคอร์นัลของ T ว่า**ศูนยภาพ (nullity) ของ** T เขียนแทนด้วย $\operatorname{nullity} T$ และเรียกมิติของเรนจ์ของ T ว่า**แรงก์ (rank) ของ** T เขียนแทนด้วย $\operatorname{rank} T$ ดังนั้น

บทแทรก 5.2.5 *ให้ V และ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F โดยที่ W มีมิติจำกัด และ ให้ T เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก V ไปยัง W จะได้ว่า T มีสมบัติทั่วถึง ก็ต่อเมื่อ $\operatorname{rank} T = \dim W$*

ตัวอย่าง 5.2.4 จงหาเคอร์เนลและเรนจ์ของการแปลงเชิงเส้นในตัวอย่าง 5.2.1

ตัวอย่าง 5.2.5 ให้ $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ เป็นการแปลงเชิงเส้น ซึ่งกำหนดโดย

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b, b + c, 0)$$

จงหาฐานหลักสำหรับเคอร์เนลของ T และฐานหลักสำหรับเรนจ์ของ T พร้อมทั้งบอก $\operatorname{nullity} T$ และ $\operatorname{rank} T$

ลองทำ 5.2.3 สำหรับฟังก์ชัน T ในแต่ละข้อต่อไปนี้
1. $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{C}$ กำหนดโดย $T(a + bx + cx^2) = (a + b) + (a + c)i$
2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_3[x]$ กำหนดโดย $T(a, b, c) = ax^3 + (b - c)$
3. $T : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^4$ กำหนดโดย $T(a + bi) = (a, b, a + b, a - b)$

(ก) จงแสดงว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้น

(ข) จงหาฐานหลักสำหรับเคอร์เนลของ T และฐานหลักสำหรับเรนจ์ของ T พร้อมทั้งบอก $\operatorname{nullity} T$ และ $\operatorname{rank} T$

(ค) จงพิจารณาว่า T มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง หรือ มีสมบัติทั่วถึง หรือไม่ เพราะเหตุใด

ให้ V และ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F เรากล่าวว่า V **สมสัณฐานกับ (isomorphic to)** W ถ้ามีการแปลงเชิงเส้น $T : V \to W$ ซึ่งมีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง เขียนแทนด้วย $V \cong W$

ลองทำ 5.2.4 จงแสดงว่าฟังก์ชัน T ต่อไปนี้เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่งมีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง
(ก) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ กำหนดโดย $T(x, y) = x - iy$
(ข) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[x]$ กำหนดโดย $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + c) + (b + d)x + cx^2 + dx^3$

ทฤษฎีบท 5.2.6 *ให้ V และ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์มิติจำกัดเหนือฟีลด์ F และ $T : V \to W$ เป็นการแปลงเชิงเส้น ที่มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง ถ้า $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ V แล้ว $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \dots, T(\vec{v}_n)\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ W ดังนั้น ถ้า $V \cong W$ แล้ว $\dim V = \dim W$*

ทฤษฎีบท 5.2.7 *ให้ W_1 และ W_2 เป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ V เหนือฟีลด์ F ซึ่ง $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$ จะได้ว่า $T : (W_1 \times W_2) \to (W_1 + W_2)$ กำหนดโดย*

$$T(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} + \vec{y} \quad \text{สำหรับทุกๆ } \vec{x} \in W_1 \text{ และ } \vec{y} \in W_2$$

*เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่งมีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง ดังนั้นถ้า $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$ แล้ว $(W_1 + W_2) \cong (W_1 \times W_2)$ ซึ่งในกรณีนี้เรากล่าวว่าผลบวก $W_1 + W_2$ เป็น**ผลบวกตรง (direct sum) ของ** W_1 **และ** W_2 เขียนแทนด้วย $W_1 \oplus W_2$*

ตัวอย่าง 5.2.6 ให้ H เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$ โดยทฤษฎีบท 4.2.2 (ทฤษฎีบทการแยกเชิงตั้งฉาก) เราได้ว่า $\mathbb{R}^n = H + H^\perp$ แต่ $H \cap H^\perp = \{\vec{0}\}$ ดังนั้น $\mathbb{R}^n = H \oplus H^\perp$ สำหรับทุกๆ ปริภูมิย่อย H ของ $\mathbb{R}^n$

ตัวอย่าง 5.2.7 สำหรับแต่ละ $\alpha \in \mathbb{R}$ ให้ $V_\alpha = \{(x_1, x_2) : x_1 = \alpha x_2\}$ ซึ่งเราได้ว่า V_α เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^2$ จงแสดงว่า ถ้า $\alpha \neq \beta$ แล้ว $\mathbb{R}^2 = V_\alpha \oplus V_\beta$

ลองทำ 5.2.5 ให้

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{และ} \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

จงแสดงว่า W_1 และ W_2 เป็นปริภูมิย่อยของ $M_2(\mathbb{R})$ และ $W_1 \oplus W_2 = M_2(\mathbb{R})$

ทฤษฎีบท 5.2.8 *ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F และ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ V สำหรับแต่ละ $i = 1, \dots, n$ กำหนด $f_i : V \to F$ เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นโดย*

$$f_i(\vec{v}_j) = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

สำหรับทุกๆ $j = 1, \dots, n$ จะได้ว่า
*(ก) $\{f_1, \dots, f_n\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ V^* เรียกว่า**ฐานหลักคู่เสมอกัน (dual basis)***
(ข) กำหนด $T : V \to V^*$ เป็นการแปลงเชิงเส้นโดย $T(\vec{v}_i) = f_i$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \dots, n$ จะได้ว่า T มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง ดังนั้น $V \cong V^*$

ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F และ $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ V นั่นคือ เซต $\mathcal{B}$ แผ่ทั่ว V และ $\mathcal{B}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น ทำให้สำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{x} \in V$ จะมี $c_1, c_2, \dots, c_n \in F$

เพียงชุดเดียวที่ $\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \cdots + c_n\vec{b}_n$ เราเรียกเวกเตอร์

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in F^n$$

ว่า**เวกเตอร์พิกัดของ $\vec{x}$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$ (coordinate vector of $\vec{x}$ relative to $\mathcal{B}$)** และเรียก $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ว่า**พิกัดที่ i ของ $\vec{x}$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$ (i^{th}-coordinates of $\vec{x}$ relative to $\mathcal{B}$)**

ตัวอย่าง 5.2.8 จงแสดงว่า $\mathcal{B} = \{2-x, 1-x, x^2\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $\mathbb{R}_2[x]$ และหาเวกเตอร์พิกัดของ $3x^2+2x-5$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$

ลองทำ 5.2.6 จงแสดงว่า $\mathcal{B} = \{(1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,1,1,0), (0,0,0,2i)\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $\mathbb{C}^4$ และหาเวกเตอร์พิกัดของ $(2,-16,3,-i)$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$

ให้ V และ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟิลด์ F และ ให้ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ V และ $\mathcal{C} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ W กำหนด $T : V \to W$ เป็นการแปลงเชิงเส้น

เราเรียก $m \times n$ เมทริกซ์ซึ่งมีหลักที่ j เป็นเวกเตอร์พิกัด $[T(\vec{v}_j)]_{\mathcal{C}}$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{C}$ สำหรับทุกๆ $j = 1, 2, \ldots, n$ ว่า**เมทริกซ์สำหรับ T สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$ และ $\mathcal{C}$ (matrix for T relative to the bases $\mathcal{B}$ and $\mathcal{C}$)** เขียนแทนด้วย $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ นั่นคือ

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} [T(\vec{v}_1)]_{\mathcal{C}} & [T(\vec{v}_2)]_{\mathcal{C}} & \ldots & [T(\vec{v}_n)]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$$

สังเกตว่า สำหรับแต่ละ เวกเตอร์ $\vec{x} \in V$ เราได้ว่า $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n$ ดังนั้น $T(\vec{x}) = c_1T(\vec{v}_1) + c_2T(\vec{v}_2) + \cdots + c_nT(\vec{v}_n)$ เพราะฉะนั้น $[T(\vec{x})]_{\mathcal{C}} = c_1[T(\vec{v}_1)]_{\mathcal{C}} + c_2[T(\vec{v}_2)]_{\mathcal{C}} + \cdots + c_n[T(\vec{v}_n)]_{\mathcal{C}}$ นั่นคือ

$$[T(\vec{x})]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$$

สำหรับทุกๆ เวกเตอร์ $\vec{x} \in V$ ในกรณีที่ $T : V \to V$ เป็นการแปลงเชิงเส้น และ $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ เราเขียนแทน $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ ด้วย $[T]_{\mathcal{B}}$ และเรียกว่า**เมทริกซ์สำหรับ T สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$ (matrix for T relative to the basis $\mathcal{B}$)**

ทฤษฎีบท 5.2.9 *ให้ V และ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์ซึ่งมีมิติจำกัดเหนือฟิลด์ F, $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักสำหรับ V และ $\mathcal{C}$ เป็นฐานหลักสำหรับ W โดยที่ $|\mathcal{B}| = n$ และ $|\mathcal{C}| = m$ กำหนด $\varphi : \mathcal{L}(V,W) \to M_{m,n}(F)$ โดย*

$$\varphi : T \mapsto [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

สำหรับทุกๆ การแปลงเชิงเส้น $T \in \mathcal{L}(V,W)$ จะได้ว่า φ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่งมีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง ดังนั้น $\mathcal{L}(V,W) \cong M_{m,n}(F)$ นั่นคือ เราสามารถแทนทุกๆ การแปลงเชิงเส้นจาก V ไปยัง W ด้วยเมทริกซ์เหนือฟิลด์ F มิติ $m \times n$

บทแทรก 5.2.10 *ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟิลด์ F ซึ่งมีมิติ n เราได้ว่า $V \cong F^n$ ดังนั้น ทุกๆ ปริภูมิเวกเตอร์ซึ่งมีมิติเท่ากันจะสมสัณฐานกัน*

จากบทแทรก 5.2.10 ทำให้ได้ว่าในการศึกษาปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F ซึ่งมีมิติจำกัด เราเพียงพอที่จะศึกษาปริภูมิยุคลิดเหนือฟีลด์ F โดยอาศัยเมทริกซ์ ซึ่งได้กล่าวไว้แล้วในทุกๆ บทก่อนหน้านี้

บทแทรก 5.2.11 *ให้ V และ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์ซึ่งมีมิติจำกัดเหนือฟีลด์ F, $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักสำหรับ V, $\mathcal{C}$ เป็นฐานหลักสำหรับ W และ $T : V \to W$ เป็นการแปลงเชิงเส้น จะได้ว่า T หาตัวผกผันได้ ก็ต่อเมื่อ $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสซึ่งหาเมทริกซ์ผกผันได้*

ตัวอย่าง 5.2.9 ให้ $T : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_2[x]$ กำหนดโดย

$$T(a+bi) = a + (a-b)x + bx^2 \quad \text{สำหรับทุกๆ } a, b \in \mathbb{R}$$

และให้ $\mathcal{B} = \{1, i\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{C}$ และ $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}_2[x]$
จงแสดงว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้นและจงหา $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$

ตัวอย่าง 5.2.10 ให้ $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ กำหนดโดย

$$T(p(x)) = p(x+1) \quad \text{สำหรับทุกๆ } p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$$

และให้ $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ และ $\mathcal{B}' = \{2, 1+x, -2x^2\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}_2[x]$
จงแสดงว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้นและจงหา $[T]_{\mathcal{B}}$, $[T]_{\mathcal{B}'}$ และ $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$

ลองทำ 5.2.7

1. ให้ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ กำหนดโดย $T(x_1, x_2) = x_2 - x_1 i$ สำหรับทุกๆ $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ และให้ $\mathcal{B} = \{(1,0), (0,1)\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^2$ และ $\mathcal{C} = \{1, i\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{C}$ จงแสดงว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้นและจงหา $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$
2. ให้ $T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ กำหนดโดย $T(p(x)) = x^2 p(x)$ สำหรับทุกๆ $p(x) \in \mathbb{R}_1[x]$, $\mathcal{B} = \{1+x, x\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}_1[x]$ และ $\mathcal{C} = \{1+x, x, x^2-1, x^3\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}_3[x]$ จงแสดงว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้นและจงหา $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$
3. ให้ $\mathcal{B} = \{\sin t, \cos t\}$ และ $\mathcal{B}' = \{\sin t + \cos t, \sin t - \cos t\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $H = \operatorname{Span} \mathcal{B} = \operatorname{Span} \mathcal{B}'$ ซึ่งปริภูมิย่อยของ $C^1(-\infty, \infty)$ และ $D : H \to H$ กำหนดโดย $D(f) = f'$ สำหรับทุกๆ $f \in H$ จงหา $[D]_{\mathcal{B}}$, $[D]_{\mathcal{B}'}$ และ $[D]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$

5.3 ปริภูมิผลคูณภายใน

ตลอดหัวข้อนี้ ให้ $F = \mathbb{R}$ หรือ $\mathbb{C}$ และ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F

เรากล่าวว่า V เป็น**ปริภูมิผลคูณภายใน (inner product space)** ถ้ามี $\langle \cdot, \cdot \rangle$ เป็นฟังก์ชันจาก $V \times V$ ไปยัง F เรียกว่า**ผลคูณภายใน (inner product) สำหรับ** V ซึ่งสอดคล้อง

1. $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$ สำหรับทุกๆ $\vec{u} \in V$ และ $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} = \vec{0}$
2. $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ สำหรับทุกๆ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$
3. $\langle c\vec{v}, \vec{w} \rangle = c\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ สำหรับทุกๆ $\vec{v}, \vec{w} \in V$ และ $c \in F$
4. $\overline{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle} = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ สำหรับทุกๆ $\vec{v}, \vec{w} \in V$
   เมื่อ $\bar{\ }$ แทนสังยุค (conjugate) ของจำนวนเชิงซ้อน นั่นคือ $\overline{a+bi} = a - bi$

ตัวอย่าง 5.3.1 [ตัวอย่างของปริภูมิผลคูณภายใน]

1. ให้ $V = F^n$ สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ และ $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ใน F^n เรากำหนด

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{v}_i$$

จะได้ว่า F^n เป็นปริภูมิผลคูณภายใน และ เรียกผลคูณภายในที่นิยามข้างต้นว่า**ผลคูณภายในมาตรฐาน (standard inner product) สำหรับ** F^n

2. ให้ $V = \mathbb{R}^n$ สำหรับจำนวนจริงบวก $a_1, a_2, \ldots, a_n$ และสำหรับเวกเตอร์ $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ และ $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ใน $\mathbb{R}^n$ เรากำหนด

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i v_i$$

จะได้ว่า $\langle \cdot, \cdot \rangle$ เป็นผลคูณภายในสำหรับ $\mathbb{R}^n$

3. ให้ $V = C^0[a, b]$ เป็นเซตของฟังก์ชันค่าจริงที่ต่อเนื่องบน $[a, b]$ ทั้งหมด ซึ่งเซตนี้เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ และสำหรับฟังก์ชันต่อเนื่อง f และ g ใน $C^0[a, b]$ เรากำหนด

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

จะได้ว่า $\langle \cdot, \cdot \rangle$ เป็นผลคูณภายในสำหรับ $C^0[a, b]$

ตัวอย่าง 5.3.2 จงพิจารณาว่าการกำหนดต่อไปนี้เป็นผลคูณภายในบน $\mathbb{R}^3$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

(ก) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 - x_2y_2 + 2x_3y_3$

(ข) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$

ลองทำ 5.3.1 จงพิจารณาว่าการกำหนด

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(1)q(1)$$

สำหรับทุกๆ $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ เป็นผลคูณภายในบน $\mathbb{R}[x]$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

เรามีสมบัติเบื้องต้นของผลคูณภายในดังนี้

ทฤษฎีบท 5.3.1 *ให้ V เป็นปริภูมิผลคูณภายในเหนือฟีลด์ F สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ใน V และ $c \in F$ เราได้ว่า*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \quad \text{และ} \quad \langle \vec{v}, c\vec{w} \rangle = \bar{c}\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

ให้ V เป็นปริภูมิผลคูณภายในเหนือฟีลด์ F
เรากำหนด **ความยาว (length) หรือ นอร์ม (norm)** ของเวกเตอร์ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\|\vec{v}\|$ โดย

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$$

และเราเรียกเวกเตอร์ที่มีนอร์มเท่ากับ 1 ว่า**เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector)**

ตัวอย่าง 5.3.3 ให้ $\vec{x} = (2, 1+i, i)$ และ $\vec{y} = (2-i, 1, 1+2i)$ โดยการใช้ผลคูณภายในมาตรฐาน จงหา $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$, $\|\vec{x}\|$, $\|\vec{y}\|$ และ $\|\vec{x} - \vec{y}\|$

ลองทำ 5.3.2 ให้ $f(x) = \sin x$ และ $g(x) = \cos x$ โดยการใช้ผลคูณภายในบน $C^0[0, \pi]$ จงหา $\langle f, g \rangle$, $\|f\|$, $\|g\|$ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางเดียวกับ $(f+g)$

เราได้สมบัติของนอร์มดังนี้

ทฤษฎีบท 5.3.2 *ให้ V เป็นปริภูมิผลคูณภายในเหนือฟีลด์ F สำหรับแต่ละเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ใน V และ $c \in F$ เราได้ว่า*
1. $\|\vec{u}\| \geq 0$ *และ* $\|\vec{u}\| = 0$ *ก็ต่อเมื่อ* $\vec{u} = \vec{0}$
2. $\|c\vec{u}\| = |c|\|\vec{u}\|$
3. $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ *เรียกว่า**อสมการโคชี-ชวาร์ซ (Cauchy-Schwarz inequality)***
4. $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ *เรียกว่า**อสมการอิงรูปสามเหลี่ยม (triangle inequality)***

ให้ V เป็นปริภูมิผลคูณภายในเหนือฟีลด์ F

เรากล่าวว่าเวกเตอร์ $\vec{u}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ และเราเรียกเซตของเวกเตอร์ $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ ใน $\mathbb{R}^n$ ว่า**เซตเชิงตั้งฉาก (orthogonal set)** ถ้าเวกเตอร์ที่แตกต่างกันแต่ละคู่ใน S ตั้งฉากกัน นั่นคือ $\langle \vec{u}_i, \vec{u}_j \rangle = 0$ สำหรับทุก $i \neq j$ เมื่อ $i, j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ และเราเรียกเซตเชิงตั้งฉากของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยว่า**เซตเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal set)**

ทฤษฎีบท 5.3.3 *ให้ V เป็นปริภูมิผลคูณภายในเหนือฟีลด์ F และ S เป็นเซตย่อยของ V ซึ่งประกอบด้วยเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์และ S เป็นเซตเชิงตั้งฉาก จะได้ว่า S เป็นเซตอิสระเชิงเส้น*

และในทำนองเดียวกับที่เราได้ศึกษาไว้แล้วในหัวข้อ 4.2 เราอาจสร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับปริภูมิย่อยของปริภูมิผลคูณภายในจาก

ทฤษฎีบท 5.3.4 *[กระบวนการกราม-ชมิดต์ (The Gram-Schmidt Process)] ให้ V เป็นปริภูมิผลคูณภายในเหนือฟีลด์ F และ $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ เป็นเซตย่อยซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นของ V กำหนด*

$$\vec{v}_1 = \vec{x}_1 \qquad \text{และ} \qquad \vec{v}_k = \vec{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \vec{x}_k, \vec{v}_i \rangle}{\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle} \vec{v}_i$$

อย่างเวียนเกิดสำหรับ $k = 2, \ldots, p$ จะได้ว่า $S' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์และ $\operatorname{Span} S = \operatorname{Span} S'$

บทแทรก 5.3.5 *ให้ V เป็นปริภูมิผลคูณภายในเหนือฟีลด์ F ที่มีมิติจำกัด จะได้ว่า V มีฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ*

ตัวอย่าง 5.3.4 กำหนดผลคูณภายในบน $\mathbb{R}^3$ โดย

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + 3u_3 v_3$$

สำหรับทุกๆ $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ และ $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ใน $\mathbb{R}^3$ จงใช้กระบวนการกราม-ชมิดต์สร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับ $H = \operatorname{Span}\{(1,1,1), (1,1,0)\}$

ตัวอย่าง 5.3.5 ให้ $W = \operatorname{Span}\{1-x, 1+x, \sqrt{x}\}$ เป็นปริภูมิย่อยของ $C^0[0,1]$ จงใช้กระบวนการกราม-ชมิดต์สร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับ W โดยใช้ผลคูณภายในจากตัวอย่าง 5.3.1

ลองทำ 5.3.3 จงแสดงว่าการกำหนด

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1v_1 - 2u_1v_2 - 2u_2v_1 + 5u_2v_2 + u_2v_3 + u_3v_2 + 4u_3v_3$$

สำหรับทุกๆ $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ และ $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ใน $\mathbb{R}^3$ เป็นผลคูณภายในบน $\mathbb{R}^3$ และจงใช้กระบวนการกราม-ชมิดต์สร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติจากฐานหลักมาตรฐานสำหรับ $\mathbb{R}^3$

ลองทำ 5.3.4 จงแสดงว่าการกำหนด

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\pi} \sin x f(x)g(x)\, dx$$

สำหรับทุกๆ $f, g \in C^0[0,\pi]$ เป็นผลคูณภายในบน $C^0[0,\pi]$ และจงใช้กระบวนการกราม-ชมิดต์สร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับปริภูมิย่อย $W = \operatorname{Span}\{\sin x, 1, \cos 3x\}$

บรรณานุกรม

1. Howard Anton, *Elementary Linear Algebra*, 8th ed, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2000.
2. Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, Lawrence E. Spence, *Linear Algebra*, 4th edn, Prentice Hall, New York, 2002.
3. David C. Lay, *Linear Algebra and its Applications*, 3rd edn, Addison Wesley Longman, 2006.
4. W. Keith Nicholson, *Linear Algebra with Applications*, 7th edn, Mc-Graw Hill, 2013.
5. Gilbert Strang, *Linear Algebra and its Applications*, 4th edn, Brooks Cole, 2006.

ดรรชนี