# พีชคณิตเชิงเส้น ๑ Linear Algebra I

*ระบบเชิงเส้น การแปลงเชิงเส้นและพีชคณิตเมทริกซ์*
*ค่าเฉพาะ เวกเตอร์เฉพาะ และ การแปลงเป็นทแยงมุม*
*เรขาคณิตเชิงเส้นและฐานหลักเชิงตั้งฉาก*
*แนวคิดเชิงนามธรรมของพีชคณิตเชิงเส้น*

ยศนันต์ มีมาก

เรียบเรียงเพื่อใช้ประกอบรายวิชา 2301234 Linear Algebra I
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พิมพ์ครั้งแรก มกราคม ๒๕๕๕ ปรับปรุง สิงหาคม ๒๕๖๒

สามารถดาวน์โหลดได้ที่
http://pioneer.netserv.chula.ac.th/~myotsana/

ข้อคิดเห็นหรือข้อเสนอแนะต่าง ๆ โปรดส่งมาได้ที่
yzm101@yahoo.com

# คำนำ

ตำรา 2301234 พีชคณิตเชิงเส้น 1 (Linear Algebra I) ได้เรียบเรียงขึ้นเพื่อต่อยอดหัวข้อทางเมทริกซ์ที่นักเรียนได้ศึกษามาบ้างแล้ว ตลอดจนให้นิสิต นักศึกษา และ ผู้สนใจทั่วไปใช้อ่านประกอบเพื่อเป็นพื้นฐานและนำไปสู่มโนภาพเบื้องต้นก่อนหรือระหว่างการศึกษาวิชาพีชคณิตเชิงเส้น ทั้งนี้ผู้เขียนได้พยายามเรียบเรียงเนื้อหาให้ต่อเนื่องและเรียงร้อยกันโดยใช้เมทริกซ์เป็นแกนกลาง ไม่ใช้ภาษาที่ซับซ้อนหรือภาษาคณิตศาสตร์ขั้นสูงจนเกินไปและละบทพิสูจน์สำหรับทฤษฎีบทที่ยากแต่แสดงให้เห็นการนำไปใช้ด้วยการยกตัวอย่างแทน และมีภาพประกอบการยกตัวอย่างในสองมิติและสามมิติ เพื่อให้ผู้อ่านเข้าใจได้ดียิ่งขึ้น

ผู้เขียนเห็นว่าการศึกษาวิชาพีชคณิตเชิงเส้นให้ได้ผลดีนั้น ผู้เรียนควรเริ่มจากเข้าใจเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับเมทริกซ์และเวกเตอร์แนวตั้งอย่างครบถ้วน เพื่อจะสามารถนำไปเป็นพื้นฐานสำหรับหัวข้อเชิงนามธรรมของพีชคณิตเชิงเส้น อาทิ ปริภูมิเวกเตอร์ การแปลงเชิงเส้น และปริภูมิผลคูณภายใน ซึ่งหัวข้อเหล่านี้สามารถแปลงปัญหากลับมาในรูปแบบของเมทริกซ์ได้ทั้งสิ้น ผู้เขียนจึงได้แบ่งเนื้อหาออกเป็น 5 บท ดังนี้

- **บทที่ 1 ระบบเชิงเส้น** มีเนื้อหาที่สำคัญคือการใช้การดำเนินการแถวขั้นมูลฐานลดรูปเมทริกซ์จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดและขั้นบันไดลดรูป การตรวจสอบว่ามีและหาผลเฉลยทั่วไปของระบบเชิงเส้นซึ่งเนื้อหาในส่วนแรกนี้จะถูกนำไปใช้ในหัวข้อต่าง ๆ อย่างมากมาย ต่อมาในบทนี้จะกล่าวถึงคำศัพท์พื้นฐานของวิชาพีชคณิตเชิงเส้นอีก 2 คำคือ แผ่ทั่ว และ อิสระเชิงเส้น

- **บทที่ 2 การแปลงเชิงเส้นและพีชคณิตเมทริกซ์** เริ่มจากนิยามของการส่งเวกเตอร์จากปริภูมิหนึ่งไปยังอีกปริภูมิหนึ่งโดยใช้การคูณด้วยเมทริกซ์ ซึ่งเรียกว่า “เมทริกซ์มาตรฐาน” โดยบทนี้มีเนื้อหาที่สำคัญคือ ปริภูมิย่อยและการหาฐานหลักและบอกมิติของปริภูมิย่อยที่กำหนดให้ ต่อด้วยการมีอยู่และการหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์จัตุรัสและรวบรวมความรู้ต่าง ๆ ที่เรียนมาแล้วไว้ใน “ทฤษฎีบทเมทริกซ์หาตัวผกผันได้ (ทฤษฎีบท 2.3.6)” โดยปิดท้ายบทนี้ด้วยนิยามและสมบัติต่าง ๆ ของดีเทอร์มิแนนต์

- **บทที่ 3 ค่าเฉพาะ เวกเตอร์เฉพาะ และการแปลงเป็นทแยงมุม** มีเนื้อหาที่สำคัญคือการเปลี่ยนฐานหลัก เมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น การหาเมทริกซ์ทแยงมุมที่คล้ายกับเมทริกซ์จัตุรัสที่กำหนดให้โดยใช้ค่าเฉพาะและเวกเตอร์เฉพาะ และนำไปประยุกต์หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์บางรูปแบบ

- **บทที่ 4 เรขาคณิตเชิงเส้นและฐานหลักเชิงตั้งฉาก** กล่าวถึงผลคูณจุดของเวกเตอร์ ซึ่งนำไปสู่การศึกษาเวกเตอร์เชิงเรขาคณิต เช่น ความยาว เวกเตอร์หนึ่งหน่วย การตั้งฉากกันของสองเวกเตอร์ การสร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากโดยใช้กระบวนการกราม-ชมิดต์ รวมถึงการประยุกต์กับปัญหากำลังสองน้อยสุด การแปลงเมทริกซ์สมมาตรเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมเชิงตั้งฉาก รูปแบบกำลังสอง และ การแยกค่าเอกฐาน

- **บทที่ 5 แนวคิดเชิงนามธรรมของพีชคณิตเชิงเส้น** ผู้เขียนได้รวบรวมหัวข้อเชิงนามธรรมของพีชคณิตเชิงเส้นที่สำคัญ กล่าวคือ ปริภูมิเวกเตอร์ การแปลงเชิงเส้น และปริภูมิผลคูณภายใน โดยอธิบายนิยามพร้อมยกตัวอย่างประกอบ อาศัยสิ่งที่ได้ศึกษามาแล้วในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายและมหาวิทยาลัยปีที่ 1 และละการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ เพื่อให้เนื้อหาของบทนี้ไม่หนักจนเกินไป และมีแบบฝึกหัด (ที่เรียกว่า “ลองทำ”) ซึ่งคล้ายตัวอย่างในการบรรยายกระจายอยู่ทั่วหัวข้อย่อยนั้น ๆ (ทั้งนี้หากนิสิตต้องการเนื้อหาเชิงพิสูจน์ซึ่งลึกซึ้งขึ้น นิสิตสามารถศึกษาได้จากรายวิชา 2301336 พีชคณิตเชิงเส้น 2 ในอนาคต) ทั้งนี้ตั้งแต่ปีการศึกษา 2560 ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ได้ปรับปรุงรายวิชานี้ให้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น โดยมอบหมายให้ผู้เขียนเพิ่มบทพิสูจน์ของทฤษฎีบทต่าง ๆ ในบทนี้เข้าไปในตำรา และนำมาสอนเพิ่มเติมจากเดิม หรือให้ศึกษาได้ด้วยตนเอง ซึ่งจะทำให้นิสิตที่ไม่ได้เรียนรายวิชา 2301336 พีชคณิตเชิงเส้น 2 ได้เห็นบทพิสูจน์ของทฤษฎีบทที่สำคัญทางพีชคณิตเชิงเส้นและสามารถนำไปประยุกต์และต่อยอดได้ดีขึ้น

ซึ่งในแต่ละบทมีแบบฝึกหัดซึ่งแยกตามหัวข้อย่อยต่าง ๆ โดยคำตอบแบบฝึกหัด (เฉพาะข้อคำนวณ) จะถูกรวบรวมไว้ท้ายบทนั้น ๆ ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะมีประโยชน์ทั้งกับนักเรียน นิสิต นักศึกษา ตลอดจนผู้สนใจทั่วไปที่จะนำทฤษฎีบทและความรู้ที่ได้รับเกี่ยวกับเมทริกซ์ไปช่วยในการทำโครงงาน ไปใช้ในการเตรียมตัวสำหรับการสอบเข้าศึกษาต่อ หรือ ไปประยุกต์กับปัญหาในศาสตร์ที่เกี่ยวข้องต่อไป

ยศนันต์ มีมาก
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
มกราคม 2555 ปรับปรุง-เพิ่มเติม สิงหาคม 2562

# สารบัญ

# บทที่ 1

# ระบบเชิงเส้น

## 1.1 ฟีลด์

เราเคยทราบมาจากระดับมัธยมศึกษาแล้วว่า เซตของจำนวนตรรกยะ $\mathbb{Q}$, เซตของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ และ เซตของจำนวนเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ภายใต้การดำเนินการการบวก $+$ และการคูณ $\times$ สอดคล้องสมบัติดังต่อไปนี้

ให้ $F$ แทนเซตใดเซตหนึ่งข้างต้น

(+1) (การปิด (closure) การบวก) $x + y \in F$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in F$

(+2) (การเปลี่ยนหมู่ (associativity) การบวก) $(x + y) + z = x + (y + z)$ สำหรับทุก ๆ $x, y, z \in F$

(+3) (การมีเอกลักษณ์การบวก) มี $0 \in F$ ที่ทำให้ $x + 0 = x = 0 + x$ สำหรับทุก ๆ $x \in F$ เรียก $0$ ว่า**สมาชิกเอกลักษณ์ (identity) ภายใต้การบวก**ของเซต $F$

(+4) (การสลับที่ (commutativity) การบวก) $x + y = y + x$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in F$

(+5) (การมีตัวผกผันการบวก) สำหรับแต่ละ $x \in F$ มี $u \in F$ ที่ทำให้ $x + u = 0 = u + x$ เรียก $u$ ว่า**ตัวผกผัน (inverse) การบวก**ของ $x$ ซึ่งโดยทั่วไป เราเขียนแทนด้วย $-x$

($\times$1) (การปิดการคูณ) $x \times y \in F$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in F$

($\times$2) (การเปลี่ยนหมู่การคูณ) $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$ สำหรับทุก ๆ $x, y, z \in F$

($\times$3) (การมีเอกลักษณ์การคูณ) มี $1 \in F$ ที่ทำให้ $x \times 1 = x = 1 \times x$ สำหรับทุก ๆ $x \in F$ เรียก $1$ ว่า**สมาชิกเอกลักษณ์ภายใต้การคูณ**ของเซต $F$

($\times$4) (การสลับที่การคูณ) $x \times y = y \times x$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in F$

($\times$5) (การมีตัวผกผันการคูณ) สำหรับแต่ละ $x \neq 0$ ใน $F$ มี $v \in F$ ที่ทำให้ $x \times v = 1 = v \times x$ เรียก $v$ ว่า**ตัวผกผันการคูณ**ของ $x$ ซึ่งโดยทั่วไป เราเขียนแทนด้วย $x^{-1}$

($+\times$) (การแจกแจง (distribution)) $(x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$ และ $z \times (x + y) = (z \times x) + (z \times y)$ สำหรับทุก ๆ $x, y, z \in F$

เราเรียกเซต $F$ ใด ๆ ภายใต้การดำเนินการ **การบวก** $+$ และ**การคูณ** $\times$ สอดคล้องทุกสมบัติข้างต้นว่า**ฟีลด์ (field)** นอกจากฟีลด์ $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ และ $\mathbb{C}$ แล้ว เรายังได้ว่า

**ตัวอย่าง 1.1.1** ให้ $p$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ $F_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$
สำหรับ $a$ และ $b$ ใด ๆ ใน $F_p$ เรากำหนด

$$\begin{aligned} a+b &= \text{เศษจากการหาร } a+b \text{ ด้วย } p \\ a\times b &= \text{เศษจากการหาร } ab \text{ ด้วย } p \end{aligned}$$

จะได้ว่า $(F_p, +, \times)$ เป็นฟีลด์ที่มีสมาชิกจำนวนจำกัด

**ตัวอย่าง 1.1.2** ให้ $F$ เป็นสับเซตของเซตของจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งสอดคล้องสมบัติทั้งหมดต่อไปนี้

(C1) $0 \in F$ และ $1 \in F$

(C2) $x+y \in F$ และ $x \times y \in F$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in F$

(C3) $-x \in F$ สำหรับทุก ๆ $x \in F$

(C4) $y^{-1} \in F$ สำหรับทุก ๆ $y \in F$

จะได้ว่า $F$ ก็เป็นฟีลด์ เรียกว่า **ฟีลด์ของจำนวน (field of numbers)** เช่น $F = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ เป็นฟีลด์

**หมายเหตุ** เซตของจำนวนเต็ม $\mathbb{Z}$ ภายใต้การดำเนินการการบวกและการคูณสอดคล้องแทบทุกสมบัติของฟีลด์ ยกเว้นเพียงสมบัติ $(\times 5)$ เช่น $2$ ไม่มีตัวผกผันการคูณใน $\mathbb{Z}$ จึงทำให้ $\mathbb{Z}$ ไม่เป็นฟีลด์

เนื้อหาหลักของรายวิชาพีชคณิตเชิงเส้น คือ การศึกษาปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ ซึ่งฟีลด์จะเป็นที่อยู่ของสมาชิกในเวกเตอร์ หรือ เป็นที่อยู่ของสเกลาร์หรือสัมประสิทธิ์ของเวกเตอร์ โดยฟีลด์ที่นิยมใช้นิยามและศึกษาปริภูมิเวกเตอร์สำหรับรายวิชาพื้นฐานมักเป็นฟีลด์ของจำนวนจริง เพราะผู้เรียนมีความคุ้นเคย แต่ทฤษฎีบทต่าง ๆ ส่วนใหญ่ยังคงเป็นจริงถึงแม้ว่าจะเปลี่ยนจากฟีลด์ของจำนวนจริงเป็นฟีลด์ใด ๆ ก็ตาม ในรายวิชานี้เราจึงศึกษาเวกเตอร์เหนือฟีลด์ของจำนวนจริงก่อน แล้วจึงกล่าวถึงปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ทั่ว ๆ ไป ซึ่งกระบวนการแก้ปัญหา บทพิสูจน์ ตลอดจนทฤษฎีบทต่าง ๆ นั้นมีความคล้ายคลึงกัน

## 1.2 เมทริกซ์และระบบเชิงเส้น

ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริงทั้งหมด และให้ $m$ และ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวก

**เมทริกซ์ (matrix)** คือ กลุ่มของจำนวนซึ่งนำมาจัดเรียงเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากและบรรจุภายในเครื่องหมาย [ ] (อาจใช้ ( ) แทนก็ได้) โดยเมทริกซ์เหนือ $\mathbb{R}$ ซึ่งมี $m$ แถวและ $n$ หลัก หรือที่เรียกว่า $m \times n$ **เมทริกซ์** (อ่านว่า $m$ คูณ $n$ เมทริกซ์) **เหนือ** $\mathbb{R}$ **(**$m \times n$ **matrix over** $\mathbb{R}$**)** สามารถเขียนในรูปทั่วไป ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad [a_{ij}]_{m\times n}$$

เมื่อ $a_{ij}$ เป็นจำนวนจริง สำหรับทุกค่า $i = 1, 2, \ldots, m$ และ $j = 1, 2, \ldots, n$

เราเรียก $a_{ij}$ ของเมทริกซ์ว่า**สมาชิก (element, entry)** ในแถวที่ $i$ และ หลักที่ $j$ และเรียก $m \times n$ ว่า**มิติของเมทริกซ์ (dimension of a matrix)** ซึ่งในกรณีที่ $m = n$ เราจะกล่าวว่าเมทริกซ์นั้นเป็น**เมทริกซ์จัตุรัส (square matrix) ขนาด** $n$

เราเรียก $1\times n$ เมทริกซ์ว่า**เวกเตอร์แถว (row vector)** และเรียก $m\times 1$ เมทริกซ์ว่า**เวกเตอร์หลัก (column vector)** เมทริกซ์ที่มีมิติ $m \times n$ และสมาชิกทุกตำแหน่งเป็น 0 เรียกว่า**เมทริกซ์ศูนย์ (zero matrix)** เขียนแทนด้วย $\underline{0}$

ปกติเราจะใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่แทนเมทริกซ์ เช่น $A, B, C, X$

**สมาชิกทแยงมุม (diagonal entry)** ในเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ คือบรรดา $a_{11}, a_{22}, \ldots$ ซึ่งเรียงกันเป็น**เส้นทแยงมุมหลัก (main diagonal)** ของเมทริกซ์ $A$ และ**เมทริกซ์ทแยงมุม (diagonal matrix)** คือเมทริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกอื่นนอกเส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์

ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ และ $c$ เป็นจำนวนจริง

เรากล่าวว่า $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับทุกค่า $i = 1, 2, \ldots, m$ และ $j = 1, 2, \ldots, n$

**ผลบวกของเมทริกซ์ $A$ และ $B$** กำหนดโดย

$$A + B := [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

และ**ผลคูณของจำนวนจริง $c$ กับเมทริกซ์ $A$** กำหนดโดย

$$cA := [c\,a_{ij}]_{m\times n}$$

โดยทั่วไป เราเขียน $-B$ แทน $(-1)B$ และเขียน $A - B$ แทน $A + (-B)$

**ตัวอย่าง 1.2.1** ให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & -2 \end{bmatrix}$

เราได้ว่า

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1+1 & 3+(-1) & 2+1 \\ 4+7 & 0+5 & 5+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 11 & 5 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

และ

$$2A = 2\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-1) & 2(3) & 2(2) \\ 2(4) & 2(0) & 2(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 8 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

สำหรับเมทริกซ์ $A, B, C$ และ $\underline{0}$ ที่มีมิติ $m \times n$ และจำนวนจริง $c$ และ $d$ จากสมบัติของจำนวนจริงภายใต้การบวกและการคูณ เราได้โดยง่ายว่า

1. $A + B$ และ $cA$ มีมิติ $m \times n$
2. $A + B = B + A$
3. $(A + B) + C = A + (B + C)$
4. $A + \underline{0} = \underline{0} + A = A$
5. $A + (-A) = (-A) + A = \underline{0}$
6. $c(A + B) = cA + cB$
7. $(c + d)A = cA + dA$
8. $(cd)A = c(dA)$
9. $1A = A$ และ $0A = \underline{0}$

**สมการเชิงเส้น (linear equation) ในตัวแปร** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ คือสมการซึ่งเขียนได้ในรูปแบบ

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

โดยที่**พจน์คงตัว (constant term)** $b$ และ**สัมประสิทธิ์ (coefficient)** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริง

**ตัวอย่าง 1.2.2** 1. $4x_1 - 5x_2 + 5 = x_3$ และ $\pi x_2 = 2(\sqrt{3}x_1 - 4) + x_3$ เป็นสมการเชิงเส้น

2. $4x_1x_2 = x_3 - 2$ และ $x_1 = \sqrt{x_2} + 3$ ไม่เป็นสมการเชิงเส้น

**ระบบสมการเชิงเส้น (system of linear equations) หรือระบบเชิงเส้น (linear system) ในตัวแปร** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ หมายถึงชุดจำกัดที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นในตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$

**ผลเฉลย (solution) ของระบบเชิงเส้น** คือ จำนวนจริง $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ซึ่งเมื่อนำไปแทน $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ตามลำดับ แล้วทำให้แต่ละสมการในระบบเชิงเส้นเป็นจริง และเรียกเซตของผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นไปได้ของระบบเชิงเส้นว่า**เซตผลเฉลย (solution set)**

เรากล่าวว่าระบบเชิงเส้น 2 ระบบ**สมมูลกัน (equivalent)** ก็ต่อเมื่อ ทั้งสองระบบมีเซตผลเฉลยเดียวกัน

**ตัวอย่าง 1.2.3** ระบบเชิงเส้น

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & - & 5x_3 & = & 6 \end{array}$$

มี $(-1, 1, -1)$ เป็นผลเฉลยชุดหนึ่ง

โดยทั่วไป ระบบเชิงเส้นในตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ มีรูปแบบเป็น

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1.2.1}$$

เมื่อ $m \geq 1$ และ $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ เป็นสมการเชิงเส้น ทุก $i = 1, 2, \ldots, m$

**ตัวอย่าง 1.2.4** จงหาเซตผลเฉลยของระบบเชิงเส้นต่อไปนี้

(ก) $$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 9 & \ldots(1) \\ -x_1 + x_2 = -1 & \ldots(2) \end{cases}$$

**วิธีทำ** จาก (2) เราได้ว่า $x_2 = -1 + x_1$ นำไปแทนในสมการ (1) จะได้ว่า

$$4x_1 + (-1 + x_1) = 9$$

ดังนั้น $x_1 = 2$ และได้ $x_2 = 1$
เพราะฉะนั้น เซตผลเฉลย คือ $\{(2, 1)\}$ $\square$

(ข) $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 4 & \ldots(1) \\ -3x_1 + 9x_2 = 8 & \ldots(2) \end{cases}$$

**วิธีทำ** นำ $-3$ คูณตลอดสมการ (1) จะได้ $-3x_1 + 9x_2 = 12$
จาก (2) ทำให้ได้ $8 = 12$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง
ดังนั้น ระบบเชิงเส้นนี้ไม่มีผลเฉลย
เพราะฉะนั้น เซตผลเฉลย คือ เซตว่าง $\square$

(ค) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 & \ldots(1) \\ -2x_1 - 4x_2 = -6 & \ldots(2) \end{cases}$

**วิธีทำ** นำ $-2$ หารตลอดสมการ (2) จะได้ $x_1 + 2x_2 = 3$ ซึ่งคือสมการ (1)
ดังนั้น $x_1 = 3 - 2x_2$ สอดคล้องทั้ง 2 สมการทุก $x_2 \in \mathbb{R}$
เพราะฉะนั้น เซตผลเฉลย คือ $\{(x_1, x_2) : x_1 = 3 - 2x_2$ และ $x_2 \in \mathbb{R}\}$
หรือ $\{(3 - 2x_2, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$ □

จากตัวอย่าง 1.2.4 หากพิจารณาความหมายเชิงเรขาคณิตของระบบเชิงเส้นในระบบพิกัดฉาก $x_1$-$x_2$ จะได้ว่าในข้อ (ก) เส้นตรงสองเส้นนั้นตัดกันที่จุดเดียว ในข้อ (ข) เส้นตรงสองเส้นนั้นขนานกัน และในข้อ (ค) เส้นตรงสองเส้นนั้นทับกัน ในกรณีทั่วไป ผลเฉลยของระบบเชิงเส้นเป็นไปได้ 3 แบบ กล่าวคือ

1. ไม่มีผลเฉลย 2. มีผลเฉลยเพียงชุดเดียว 3. มีผลเฉลยอนันต์ชุด

เราเรียกระบบเชิงเส้นซึ่งมีผลเฉลย (ชุดเดียว หรือ อนันต์ชุด) ว่า**ระบบเชิงเส้นต้องกัน (consistent linear system)** และเรียก**ระบบเชิงเส้นไม่ต้องกัน (inconsistent linear system)** ถ้าระบบเชิงเส้นนั้นไม่มีผลเฉลย

พิจารณาระบบเชิงเส้น (1.2.1) เราเรียกเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ว่า**เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ (coefficient matrix)** และเรียกเมทริกซ์

$$[A \mid \vec{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$$

ว่า**เมทริกซ์แต่งเติม (augmented matrix)** ของระบบเชิงเส้น

ในการหาผลเฉลยของระบบเชิงเส้น เราจะใช้**การดำเนินการแถวขั้นมูลฐาน (elementary row operation)** ลดรูปเมทริกซ์แต่งเติมซึ่งการดำเนินการแถวขั้นมูลฐาน หมายถึง การดำเนินการแถวแบบใดแบบหนึ่งต่อไปนี้

1. [การสับเปลี่ยน (interchange)] สับเปลี่ยนแถวที่ $p$ และ แถวที่ $q$ เขียนแทนด้วย $R_{pq}$
2. [การแทนที่ (replacement)] เปลี่ยนแถวที่ $p$ โดยนำค่าคงตัว $c$ คูณแถวที่ $q$ $(q \neq p)$ แล้วนำไปบวกกับแถวที่ $p$ เขียนแทนด้วย $R_p + cR_q$
3. [การปรับมาตรา (scaling)] คูณแถวที่ $p$ ด้วยค่าคงตัว $c \neq 0$ เขียนแทนด้วย $cR_p$

เราอาจเรียกการดำเนินการแถวขั้นมูลฐานสั้นๆ ว่า "การดำเนินการแถว"

เรากล่าวว่า**เมทริกซ์** $B$ **สมมูลแถว (row equivalent) กับเมทริกซ์** $A$ ถ้าเมทริกซ์ $B$ ได้จากเมทริกซ์ $A$ โดยการดำเนินการแถวกับเมทริกซ์ $A$ และเขียนแทนเมทริกซ์ $A$ สมมูลแถวกับเมทริกซ์ $B$ ด้วย $A \sim B$

เนื่องจากการดำเนินการแถวนั้นสามารถผันกลับได้ เราจึงได้ว่า

**ทฤษฎีบท 1.2.1** *ถ้าระบบเชิงเส้น 2 ระบบมีเมทริกซ์แต่งเติมซึ่งสมมูลกัน แล้วระบบเชิงเส้นทั้งสองระบบมีเซตผลเฉลยเดียวกัน*

ดังนั้น หากเราดำเนินการแถวกับเมทริกซ์แต่งเติมของระบบเชิงเส้นที่กำหนดให้ จะทำให้ได้เมทริกซ์แต่งเติมใหม่ ที่สมมูลแถวกับเมทริกซ์แต่งเติมเดิม โดยเมื่อเราดำเนินการแถวไปเรื่อยๆ เราจะลดรูปเมทริกซ์แต่งเติมจนกระทั่งสามารถพิจารณาผลเฉลยของระบบเชิงเส้นจากเมทริกซ์แต่งเติมได้โดยง่าย และผลเฉลยที่ได้ก็จะเป็นผลเฉลยของระบบเชิงเส้นที่เราต้องการ

**ตัวอย่าง 1.2.5** จงเขียนเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ เมทริกซ์แต่งเติม และหาเซตผลเฉลยของระบบเชิงเส้น

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & - & 5x_3 & = & 6 \end{array}$$

**วิธีทำ** ระบบเชิงเส้นนี้มีเมทริกซ์สัมประสิทธิ์และเมทริกซ์แต่งเติม ตามลำดับ เป็น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad [A \mid \vec{b}] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \end{array}\right]$$

เราดำเนินการแถวกับเมทริกซ์แต่งเติมไปเรื่อยๆ ได้เป็น

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \end{array}\right] &\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ -2R_1 + R_2 \\ \\ \end{array} \\
&\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_1 + R_2 \\ \\ R_3 + R_2 \end{array} \\
&\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ -R_2 \\ -\frac{1}{6}R_3 \end{array} \\
&\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_1 + 2R_3 \\ R_2 - R_3 \\ \\ \end{array}
\end{aligned}$$

สังเกตว่า เมทริกซ์แต่งเติมทุกเมทิรกซ์ที่ได้สมมูลแถวกับเมทริกซ์แต่งเติม $[A \mid \vec{b}]$ และเมทริกซ์แต่งเติมสุดท้ายสมนัยกับระบบเชิงเส้น

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & & & = & -1 \\ & x_2 & & = & 1 \\ & & x_3 & = & -1 \end{array}$$

ดังนั้น เซตผลเฉลยของระบบเชิงเส้นที่กำหนดให้ คือ $\{(-1, 1, -1)\}$ □

**ตัวอย่าง 1.2.6** จงพิจารณาว่าระบบเชิงเส้น

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \end{array}$$

มีผลเฉลยหรือไม่ ถ้ามีจงหาเซตผลเฉลย

**วิธีทำ** เขียนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบเชิงเส้นนี้และดำเนินการแถวกับเมทริกซ์แต่งเติมไปเรื่อย ๆ จะได้

$$\begin{aligned}[A \mid \vec{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right] &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \end{array}\right] \; R_3 - R_1 \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right] \; R_3 + R_2 \end{aligned}$$

ซึ่งเมทริกซ์แต่งเติมสุดท้ายสมนัยกับระบบเชิงเส้น

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ & & & & 0 & = & 4 \quad \text{ซึ่งเป็นเท็จ} \end{array}$$

ทำให้ระบบเชิงเส้นนี้ไม่มีผลเฉลย ส่งผลให้ระบบเชิงเส้นที่กำหนดให้ไม่มีผลเฉลย □

## แบบฝึกหัด 1.2

1. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$
   จงหา $-3A$, $A + 2B$ และ $B - 2A$
2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ $X$ ซึ่งทำให้ $2(A - X) = A + \frac{1}{2}X$
3. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ $X$ ซึ่งทำให้ $2A - X = 3(A + X)$
4. จงเขียนระบบเชิงเส้นที่สมนัยกับเมทริกซ์แต่งเติมต่อไปนี้ พร้อมทั้งพิจารณาว่าเป็นระบบเชิงเส้นต้องกันหรือไม่

   (ก) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -8 \\ 0 & -1 & 3 \end{array}\right]$

   (ข) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$

   (ค) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$

   (ง) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & h \end{array}\right]$ เมื่อ $h$ เป็นจำนวนจริง
5. จงเขียนเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ เมทริกซ์แต่งเติม และหาเซตผลเฉลยของระบบเชิงเส้นต่อไปนี้ (ถ้ามี)

(ก) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 22 \\ x_1 - x_2 = -4 \end{cases}$ (ข) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

(ค) $\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 8 \\ -x_2 - 5x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 7 \end{cases}$ (ง) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

6. จงพิจารณาว่าเส้นตรง 3 เส้นที่กำหนดให้ต่อไปนี้มีจุดร่วมกันหรือไม่ เพราะเหตุใด
   (ก) $x_1 + 3x_2 = -4,\ -x_1 + 4x_2 = -1$ และ $2x_1 - x_2 = -3$
   (ข) $-x_1 + 2x_2 = 3,\ x_1 + x_2 = 1$ และ $x_1 - x_2 = -2$

## 1.3 เมทริกซ์ขั้นบันได

จากตัวอย่าง 1.2.5 และ 1.2.6 สังเกตว่าเมทริกซ์แต่งเติมที่สามารถบอกได้โดยง่ายว่าระบบเชิงเส้นใดมีผลเฉลยหรือไม่อยู่ในรูปแบบพิเศษ ซึ่งเราจะให้บทนิยามดังนี้

เราเรียกเมทริกซ์ซึ่งมีสมบัติ

1. แถวที่มี 0 ล้วนต้องอยู่ต่ำกว่าแถวที่มีตัวต่างจาก 0
2. ในแต่ละแถว ตัวแรกที่ไม่ใช่ 0 ของแถว [เรียกว่า**สมาชิกนำ (leading entry)**] ซึ่งต่ำกว่าจะต้องอยู่ในหลักทางขวามือของสมาชิกนำของแถวซึ่งอยู่สูงกว่า
3. ถ้าสมาชิกนำของแถวอยู่ในหลักใด แล้วสมาชิกของแถวที่ต่ำกว่าในหลักนั้นต้องเป็น 0

ว่า**มีรูปแบบขั้นบันได (echelon form)** และเรียกเมทริกซ์ขั้นบันไดซึ่งสอดคล้องสมบัติต่อไปนี้เพิ่มเติม

4. ในแต่ละแถวตัวแรกที่ไม่ใช่ 0 ต้องเป็น 1 เรียกว่า 1 **ตัวนำ (leading** 1)
5. ถ้าหลักใดที่มี 1 ตัวนำ สมาชิกอื่นในหลักนั้นต้องเป็น 0

ว่า**มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูป (reduced echelon form)**

**ตัวอย่าง 1.3.1** เมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

จากตัวอย่าง 1.2.5 และ 1.2.6 เป็นเมทริกซ์ขั้นบันได ซึ่งเมทริกซ์ $A$ เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูป

**ตัวอย่าง 1.3.2**

1. เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ไม่เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดเพราะว่าสมาชิกนำของแถวที่ 2 อยู่ในหลักทางซ้ายมือของสมาชิกนำในแถวแรก
2. เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ไม่เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดเพราะว่าแถวที่มี 0 ล้วนอยู่สูงกว่าแถวที่มีตัวต่างจาก 0
3. เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ขั้นบันได แต่ไม่เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปเพราะว่าสมาชิกนำในแต่ละแถวไม่เป็น 1

**ตัวอย่าง 1.3.3** เมทริกซ์ในรูป $\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ขั้นบันได เมื่อ $\blacksquare \neq 0$

เราสามารถแสดงได้ว่า

**ทฤษฎีบท 1.3.1** *ทุก ๆ เมทริกซ์สามารถลดรูปโดยใช้การดำเนินการแถวให้เป็นเมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดได้ และลดรูปให้เป็นเมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้แบบเดียว*

เราเรียกตำแหน่งในเมทริกซ์ $A$ ซึ่งสมนัยกับตำแหน่งของสมาชิกนำของเมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดของเมทริกซ์ $A$ ว่า**ตำแหน่งตัวหลัก (pivot position)** ของเมทริกซ์ $A$ และเรียกหลักซึ่งมีตำแหน่งตัวหลักว่า**หลักตัวหลัก (pivot column)**

**ตัวอย่าง 1.3.4** จงใช้การดำเนินการแถวลดรูปเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

ให้มีรูปแบบขั้นบันไดและหาหลักตัวหลักทั้งหมดของเมทริกซ์ $A$ และให้ลดรูปต่อไปจนได้รูปแบบขั้นบันไดลดรูปของเมทริกซ์ $A$

**วิธีทำ** สังเกตว่า แถวแรกของเมทริกซ์ $A$ ขึ้นต้นด้วย 0 และมีตัวที่ไม่ใช่ 0 อยู่ในตำแหน่งที่ต่ำกว่า เราจึงใช้การสับเปลี่ยน $R_{14}$ เพื่อให้เกิด 1 ตัวนำในแถวที่ 1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_{14} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

ต่อมาจะใช้การแทนที่เปลี่ยนแถวที่ 2 และ 3 เพื่อทำให้สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งที่ต่ำกว่าในหลักที่หนึ่งเป็น 0

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & -15 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R_2 + R_1 \\ R_3 + 2R_1 \\ \\ \end{matrix}$$

สังเกตว่าตอนนี้ 2 เป็นสมาชิกนำในแถวที่ 2 ดังนั้นเราจึงใช้การแทนที่เปลี่ยนแถวที่ 3 และ 4 เพื่อทำให้สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งที่ต่ำกว่า 2 มีค่าเป็น 0

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3 - \frac{5}{2}R_2 \\ R_4 + \frac{3}{2}R_4 \end{matrix}$$

เนื่องจากเมทริกซ์ที่ได้มี 0 ล้วนในแถวที่ 3 และแถวที่ 4 มีตัวต่างจาก 0 เราจึงใช้การสับเปลี่ยน $R_{34}$ เพื่อให้แถวที่มี 0 ล้วนอยู่ต่ำกว่าแถวที่มีตัวต่างจาก 0 และไม่กระทบแถวที่ 1 และ 2 ซึ่งเราจัดไว้แล้ว ส่งผลให้เราได้เมทริกซ์ในรูปขั้นบันไดของเมทริกซ์ $A$ เป็น

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_{34} \\ \\ \end{matrix}$$

ดังนั้น หลักตัวหลักทั้งหมดของเมทริกซ์ $A$ คือหลักที่ 1, 2 และ 4

ต่อไปเราจะลดรูปเมทริกซ์จนได้รูปแบบขั้นบันไดลดรูป สังเกตว่าสมาชิกในแถวที่ 2 และ 3 ยังมีค่าไม่เท่ากับ 1 เราจึงใช้การปรับมาตรากับทั้งสองแถวเพื่อปรับให้เกิด 1 ตัวนำ

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \frac{1}{2}R_2 \\ -\frac{1}{5}R_3 \\ \\ \end{matrix}$$

ต่อมาใช้การแทนที่เพื่อทำให้สมาชิกอื่นในหลักที่มี 1 ตัวนำ (นั่นคือหลักที่ 2 และ 4) มีค่าเท่ากับ 0 ตามลำดับดังนี้

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 - 4R_2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 - 3R_3 \\ R_2 + 3R_3 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

ซึ่งจะได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปตามต้องการ □

พิจารณาเมทริกซ์แต่งเติมในรูปแบบขั้นบันไดลดรูป

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{ccccccc} x_1 & & & - & 2x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

เราได้ว่าตัวแปร $x_1$ และ $x_2$ ขึ้นกับตัวแปร $x_3$ กล่าวคือ

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + 2x_3 \\ x_2 &= 1 - x_3 \end{aligned}$$

สังเกตว่าตัวแปร $x_1$ และ $x_2$ สมนัยกับหลักที่หนึ่งและหลักที่สอง ตามลำดับ ซึ่งเป็นหลักตัวหลัก และตัวแปร $x_3$ อยู่ในหลักซึ่งไม่เป็นหลักตัวหลัก เราเรียกตัวแปร $x_1$ และ $x_2$ ว่าตัวแปรพื้นฐาน และเรียกตัวแปร $x_3$ ว่าตัวแปรเสรี
ดังนั้น ผลเฉลยของระบบเชิงเส้นนี้อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} &x_1 = 2 + 2x_3 \\ &x_2 = 1 - x_3 \\ &x_3 \text{ เป็นตัวแปรเสรี} \end{aligned}$$

เรียกว่าผลเฉลยทั่วไป (general solution) ซึ่งผลเฉลยในรูปนี้จะบอกผลเฉลยทั้งหมดของระบบเชิงเส้น สังเกตว่าระบบเชิงเส้นนี้มีคำตอบอนันต์ชุดขึ้นกับการเปลี่ยนของ $x_3$

เราได้ข้อสรุปเกี่ยวกับการมีผลเฉลยของระบบเชิงเส้น ดังนี้

**ทฤษฎีบท 1.3.2** [ทฤษฎีบทการมีจริง (Existence Theorem)]
*ระบบเชิงเส้นมีผลเฉลย ก็ต่อเมื่อ หลักทางขวาสุดของเมทริกซ์แต่งเติมไม่เป็นหลักตัวหลัก*
*นั่นคือ ก็ต่อเมื่อ รูปแบบขั้นบันไดของเมทริกซ์แต่งเติมไม่มีแถวในรูปแบบ*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & b \end{array}\right] \quad \text{เมื่อ } b \neq 0$$

โดยทั่วไป เราสามารถใช้การดำเนินการแถวหาผลเฉลยทั่วไปของระบบเชิงเส้น หรือแสดงว่าเป็นระบบเชิงเส้นที่ไม่มีผลเฉลย ดังนี้

1. เขียนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบเชิงเส้น
2. ใช้การดำเนินการแถวลดรูปเมทริกซ์แต่งเติมจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดและตรวจสอบโดยใช้ทฤษฎีบท 1.3.2 ว่ามีผลเฉลยหรือไม่
3. ถ้าทราบว่ามีผลเฉลยให้ใช้การดำเนินการแถวลดรูปต่อไปจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูป โดยเราเรียกตัวแปรซึ่งสมนัยกับหลักตัวหลักว่า**ตัวแปรพื้นฐาน (basic variable)** และเรียกตัวแปรอื่นๆ ว่า**ตัวแปรเสรี (free variable)**
4. เขียนผลเฉลยของระบบเชิงเส้นโดยจะได้ว่าตัวแปรพื้นฐานจะขึ้นกับค่าคงตัวและตัวแปรเสรี (ถ้ามี) ซึ่งเราเรียกผลเฉลยนี้ว่า**ผลเฉลยทั่วไป (general solution)**

เราทราบมาแล้วจากทฤษฎีบท 1.3.1 ว่า ทุก ๆ เมทริกซ์สามารถลดรูปโดยการดำเนินการแถวให้เป็นเมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เพียงแบบเดียว และจากเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปนี้ทำให้เราสามารถพิจารณาผลเฉลยทั่วไปของระบบเชิงเส้นได้โดยง่าย ซึ่งผลเฉลยทั่วไปจะเป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 1.3.3** [ทฤษฎีบทความเป็นได้อย่างเดียว (Uniqueness Theorem)]
*ถ้าระบบเชิงเส้นมีผลเฉลย แล้วผลเฉลยจะเป็นได้ 2 กรณี กล่าวคือ*

1. *มีผลเฉลยชุดเดียว ก็ต่อเมื่อ ไม่มีตัวแปรเสรี*
   *นั่นคือ ทุกหลักยกเว้นหลักทางขวาสุดของเมทริกซ์แต่งเติมเป็นหลักตัวหลัก*
2. *มีผลเฉลยอนันต์ชุด ก็ต่อเมื่อ มีตัวแปรเสรีอย่างน้อยหนึ่งตัว*

โดยทฤษฎีบท 1.3.3 เราสามารถสรุปได้ว่าผลเฉลยของระบบเชิงเส้นเหนือฟีลด์ของจำนวนจริงเป็นไปได้ 3 แบบ กล่าวคือ ไม่มีผลเฉลย หรือ มีผลเฉลยชุดเดียว หรือ มีผลเฉลยอนันต์ชุด

**ตัวอย่าง 1.3.5** จงตรวจสอบว่าระบบเชิงเส้นหรือเมทริกซ์แต่งเติมต่อไปนี้มีผลเฉลยหรือไม่ ถ้ามีจงหาผลเฉลยของระบบเชิงเส้นหรือเมทริกซ์แต่งเติมนั้น

1. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 \\ \quad\quad\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 21 \end{cases}$$

**วิธีทำ** เขียนเมทริกซ์แต่งเติมและลดรูปโดยใช้การดำเนินการแถวให้มีรูปแบบขั้นบันไดได้เป็น

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 21 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3 - 2R_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3 + R_2 \end{array}$$

ซึ่งแถวสุดท้ายมีรูปแบบ $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$
ทำให้สรุปโดยทฤษฎีบท 1.3.2 ได้ว่าระบบเชิงเส้นนี้ไม่มีผลเฉลย □

2. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \quad\quad = 1 \end{cases}$$

**วิธีทำ** เขียนเมทริกซ์แต่งเติมและลดรูปโดยใช้การดำเนินการแถวให้มีรูปแบบขั้นบันไดได้เป็น

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -4 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & -4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3 + \frac{1}{2}R_2 \end{array}$$

ดังนั้นหลักทางขวาสุดของเมทริกซ์แต่งเติมไม่เป็นหลักตัวหลัก
ทำให้สรุปโดยทฤษฎีบท 1.3.2 ได้ว่าระบบเชิงเส้นนี้มีผลเฉลย

เราจึงใช้การดำเนินการแถวต่อไปจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปเป็น

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 + R_2 \\ -\frac{1}{2}R_2 \\ \phantom{0} \end{array}$$

ซึ่งเมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปนี้สมนัยกับระบบเชิงเส้น

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 2x_2 & & & + & 3x_4 & = & 11 \\ & & & & x_3 & - & 2x_4 & = & -7 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

เนื่องจากหลักที่ 1 และ 3 เป็นหลักตัวหลัก ดังนั้นเราได้ว่า $x_1$ และ $x_3$ เป็นตัวแปรพื้นฐาน และ $x_2$ และ $x_4$ เป็นตัวแปรเสรี ทำให้เราได้

$$\begin{aligned} &x_1 = 11 + 2x_2 - 3x_4 \\ &x_3 = -7 + 2x_4 \\ &x_2 \text{ และ } x_4 \text{ เป็นตัวแปรเสรี} \end{aligned}$$

เป็นผลเฉลยทั่วไปของระบบเชิงเส้นที่กำหนดให้ $\square$

3. $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 3 & -4 \\ 4 & -8 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$

**วิธีทำ** ลดรูปเมทริกซ์แต่งเติมที่กำหนดให้ โดยใช้การดำเนินการแถวให้มีรูปแบบขั้นบันไดได้เป็น

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 3 & -4 \\ 4 & -8 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \phantom{0} \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1 \\ \phantom{0} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ R_3 + R_2 \\ R_4 - R_2 \end{array}$$

ดังนั้นหลักทางขวาสุดของเมทริกซ์แต่งเติมไม่เป็นหลักตัวหลัก
ทำให้สรุปโดยทฤษฎีบท 1.3.2 ได้ว่าระบบเชิงเส้นนี้มีผลเฉลย

เราจึงใช้การดำเนินการแถวต่อไปจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปเป็น

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{1}{2}R_1 \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 - R_2 \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{array}$$

ซึ่งเมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปนี้สมนัยกับระบบเชิงเส้น

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & & & = & 1 \\ & & & & x_3 & = & -2 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

เนื่องจากหลักที่ 1 และ 3 เป็นหลักตัวหลัก ดังนั้นเราได้ว่า $x_1$ และ $x_3$ เป็นตัวแปรพื้นฐาน และ $x_2$ เป็นตัวแปรเสรี ทำให้เราได้

$$\begin{aligned} & x_1 = 1 + 2x_2 \\ & x_3 = -2 \\ & x_2 \text{ เป็นตัวแปรเสรี} \end{aligned}$$

เป็นผลเฉลยทั่วไปของระบบเชิงเส้นที่กำหนดให้ □

**ตัวอย่าง 1.3.6** จงหาค่าของ $h$ ที่ทำให้ $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ -2 & 6 & -5 \end{array}\right]$ เป็นเมทริกซ์แต่งเติมของระบบเชิงเส้นต้องกัน

**วิธีทำ** เมทริกซ์แต่งเติมที่กำหนดให้ลดรูปให้มีรูปแบบขั้นบันไดได้เป็น

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ 0 & 0 & 2h-5 \end{array}\right] \quad R_2 + 2R_1$$

ดังนั้น เราได้โดยทฤษฎีบท 1.3.2 ว่าเมทริกซ์แต่งเติมที่กำหนดให้สมนัยกับระบบเชิงเส้นต้องกัน ก็ต่อเมื่อ $2h - 5 = 0$ นั่นคือ $h = \frac{5}{2}$ □

## แบบฝึกหัด 1.3

1. จงพิจารณาเมทริกซ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ว่า
   (1.1) มีรูปแบบขั้นบันไดหรือไม่ (1.2) มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปหรือไม่

   (ก) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ (ข) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (ค) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (ง) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (จ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (ฉ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. จงใช้การดำเนินการแถวลดรูปเมทริกซ์ต่อไปนี้ให้มีรูปแบบขั้นบันได และหาหลักตัวหลักทั้งหมด แล้วลดรูปต่อไปจนได้รูปแบบขั้นบันไดลดรูป

   (ก) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ (ข) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (ค) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. จงพิจารณาว่าเมทริกซ์แต่งเติมในรูปขั้นบันได (เมื่อ $\blacksquare \neq 0$) ต่อไปนี้ สมนัยกับระบบเชิงเส้นต้องกันหรือไม่ และถ้าเป็นระบบเชิงเส้นต้องกัน จงพิจารณาว่ามีผลเฉลยชุดเดียวหรือมีผลเฉลยอนันต์ชุด

(ก) $\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \end{array}\right]$ (ข) $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{array}\right]$

(ค) $\left[\begin{array}{cc|c} \blacksquare & 0 & * \\ 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ (ง) $\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & 1 & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \end{array}\right]$

4. จงหาผลเฉลยทั่วไป (ถ้ามี) ของระบบเชิงเส้นหรือเมทริกซ์แต่งเติมต่อไปนี้

(ก) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5 \\ 6x_1 - 17x_2 + 4x_3 = 28 \\ x_1 + 12x_3 = -1 \end{cases}$

(ข) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 6 \end{cases}$

(ค) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -7 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$

(ง) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 14x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$

(จ) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 7 & 6 \end{array}\right]$ (ฉ) $\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 4 \\ -6 & 3 & -3 & 5 \end{array}\right]$

(ช) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 7 & -4 & 2 & 7 \end{array}\right]$ (ซ) $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 2 & 0 \\ -9 & 12 & 6 & 0 \\ -6 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right]$

(ฌ) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ (ญ) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & -6 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -6 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

5. จงหาค่าของ $h$ ที่ทำให้เมทริกซ์ต่อไปนี้เป็นเมทริกซ์แต่งเติมของระบบเชิงเส้นต้องกัน

(ก) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & h & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{array}\right]$ (ข) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ -4 & h & 8 \end{array}\right]$

(ค) $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & h \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ (ง) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ h & 0 & 5 \end{array}\right]$

6. จงหาค่าของ $a$ ทั้งหมดที่ทำให้ระบบเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + (a^2 - 10)x_3 &= a \end{aligned}$$

(ก) ไม่มีผลเฉลย (ข) มีผลเฉลยชุดเดียว (ค) มีผลเฉลยอนันต์ชุด

7. จงหา $0 \le \alpha, \beta, \gamma < 2\pi$ ซึ่งสอดคล้องระบบไม่เชิงเส้น (nonlinear system)

$$\begin{aligned} 2\sin\alpha + \cos\beta - \tan\gamma &= 1 \\ 2\sin\alpha - \cos\beta + 3\tan\gamma &= 3 \\ 6\sin\alpha - 3\cos\beta + \tan\gamma &= 9 \end{aligned}$$

## 1.4 การรวมเชิงเส้นและการแผ่ทั่ว

ให้ $m$ เป็นจำนวนเต็มบวก เราเรียกเซตของเวกเตอร์หลักมิติ $m \times 1$ ทั้งหมดว่า**ปริภูมิยุคลิดมิติ $m$ (Euclidean $m$-space)** เขียนแทนด้วย $\mathbb{R}^m$ และเรียกเวกเตอร์หลักซึ่งสมาชิกทุกตัวเป็น $0$ ว่า**เวกเตอร์ศูนย์ (zero vector)** เขียนแทนด้วย $\vec{0}$ หรือ $\vec{0}_m$

สำหรับเวกเตอร์ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ ใน $\mathbb{R}^m$ และ $c_1, c_2, \ldots, c_p \in \mathbb{R}$ เราเรียกเวกเตอร์

$$\vec{y} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_p\vec{v}_p$$

ว่าเป็น**การรวมเชิงเส้น (linear combination) ของเวกเตอร์** $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ **ด้วยน้ำหนัก (weight)** $c_1, c_2, \ldots, c_p$

**ตัวอย่าง 1.4.1** กำหนดให้ $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}$

จงพิจารณาว่าเวกเตอร์ $\vec{b}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$ หรือไม่
นั่นคือ จงพิจารณาว่ามีจำนวนจริง $x_1$ และ $x_2$ ซึ่งทำให้ $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 = \vec{b}$ หรือไม่

**วิธีทำ** เพราะว่าสมการ $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 = \vec{b}$ เขียนได้เป็น

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & = & -7 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & -4 \end{array}$$

ดังนั้น เราจะพิจารณาว่าระบบเชิงเส้นนี้มีผลเฉลยหรือไม่ โดยเขียนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบเชิงเส้นและลดรูปโดยใช้การดำเนินการแถวให้มีรูปแบบขั้นบันไดได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \\ 1 & 2 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_{13} \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3 + 3R_1 \end{array}$$

และสรุปได้จากทฤษฎีบท 1.3.2 ว่าระบบเชิงเส้นนี้มีผลเฉลย
เพราะฉะนั้น $\vec{b}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$ $\square$

**หมายเหตุ** หากต้องการเขียน $\vec{b}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$ เราสามารถทำได้โดยลดรูปเมทริกซ์แต่งเติมต่อไปจนมีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปดังนี้

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 - 2R_2 \\ \\ \\ \end{array} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับ} \quad \begin{array}{rcr} x_1 & = & 2 \\ x_2 & = & -3 \\ 0 & = & 0 \end{array}$$

ดังนั้น เราได้ว่า $\vec{b} = 2\vec{v}_1 + (-3)\vec{v}_2$

เราเรียกสมการในตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ที่อยู่ในรูปแบบ

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_p\vec{v}_p = \vec{b} \tag{1.4.1}$$

เมื่อ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^m$ ว่า**สมการเวกเตอร์ (vector equation)** โดยสมการนี้มีผลเฉลยชุดเดียวกับระบบเชิงเส้นซึ่งมีเมทริกซ์แต่งเติม

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_p & \vec{b} \end{array}\right] \tag{1.4.2}$$

ดังนั้น เราสรุปได้ว่า

**บทแทรก 1.4.1** *เวกเตอร์ b เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ ก็ต่อเมื่อ สมการ* (1.4.1) *[สมการ* (1.4.2)*] มีผลเฉลย*

ให้ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^m$ เราเรียกเซตของการรวมเชิงเส้นทั้งหมดของเวกเตอร์ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ ว่า**เซตย่อยของ $\mathbb{R}^m$ ที่แผ่ทั่วโดยเวกเตอร์ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ (subset of $\mathbb{R}^m$ spanned by $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$)** เขียนแทนด้วย $\operatorname{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ นั่นคือ

$$\operatorname{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\} = \{c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_p\vec{v}_p : c_1, c_2, \ldots, c_p \in \mathbb{R}\}$$

สังเกตว่า $\operatorname{Span}\{\vec{0}\} = \{\vec{0}\}$ และเห็นชัดว่า $\vec{0}$ และ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ อยู่ใน $\operatorname{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ เสมอ

ถ้า $\operatorname{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\} = \mathbb{R}^m$ เรากล่าวว่า $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ **แผ่ทั่ว (span)** $\mathbb{R}^m$

**ตัวอย่าง 1.4.2**

1. $\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}\right\} = \left\{c\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix} : c \in \mathbb{R}\right\}$

2. $\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}\right\} = \left\{c_1\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}$

   และจากตัวอย่าง 1.4.1 เราได้ว่า $\begin{bmatrix}1\\-7\\-4\end{bmatrix} \in \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}\right\}$

3. $\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\} = \mathbb{R}^3$

เราสามารถเขียนบทแทรก 1.4.1 ได้ในรูป $\operatorname{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ ดังนี้

**บทแทรก 1.4.2** *เวกเตอร์ $\vec{b}$ อยู่ในเซต $\operatorname{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ ก็ต่อเมื่อ สมการ* (1.4.1) *[สมการ* (1.4.2)*] มีผลเฉลย*

**ตัวอย่าง 1.4.3** กำหนดให้ $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$

จงพิจารณาว่าเวกเตอร์ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ อยู่ในเซต Span $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ หรือไม่

**วิธีทำ** โดยบทแทรก 1.4.2 เราจะพิจารณาระบบเชิงเส้นที่สมนัยกับเมทริกซ์แต่งเติม

$$\left[\begin{array}{cc|c} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{b} \end{array}\right]$$

ว่ามีผลเฉลยหรือไม่ โดยใช้การดำเนินการแถวเราได้รูปแบบขั้นบันไดของเมทริกซ์แต่งเติมนี้เป็น

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 11 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 + 2R_1 \\ R_3 + 3R_1 \end{array}$$

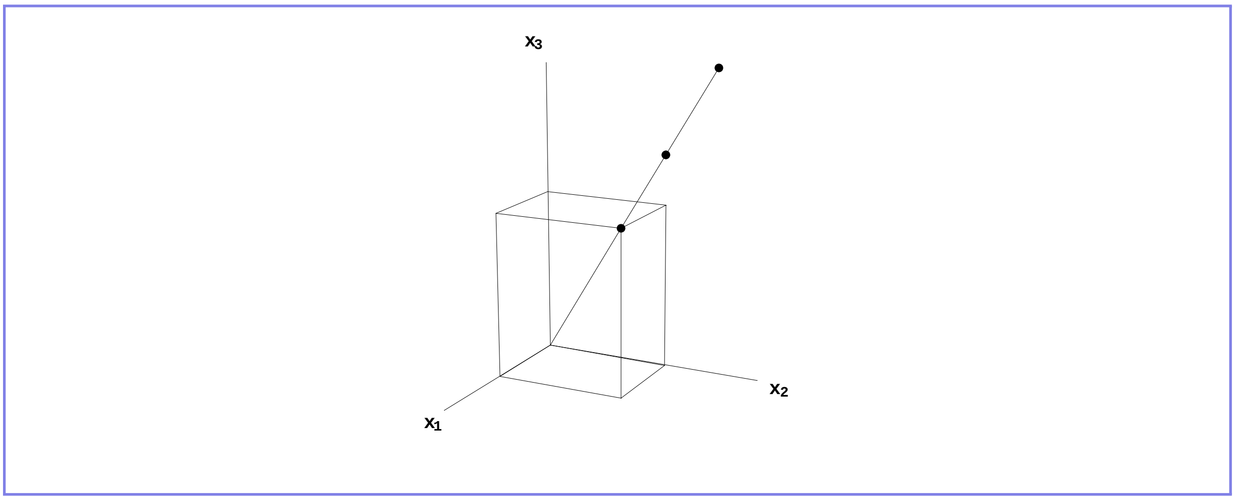
$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -33 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3 - 11R_2 \end{array}$$

ดังนั้น หลักทางขวาสุดเป็นหลักตัวหลัก
จึงได้โดยทฤษฎีบท 1.3.2 ว่าระบบเชิงเส้นนี้ไม่มีผลเฉลย
เพราะฉะนั้น $\vec{b}$ ไม่อยู่ใน Span $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ $\square$

พิจารณาเวกเตอร์ $\vec{v} \neq \vec{0}$ ใน $\mathbb{R}^3$ เราจะได้ว่า

$$\text{Span}\{\vec{v}\} = \{c\vec{v} : c \in \mathbb{R}\}$$

เป็นเส้นตรง (line) ใน $\mathbb{R}^3$ ซึ่งผ่านจุดกำเนิดและมีเวกเตอร์แสดงทิศทาง (direction vector) เป็น $\vec{v}$




ต่อมาเราจะศึกษาการแผ่ทั่วของ 2 เวกเตอร์ $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$ ใน $\mathbb{R}^3$ ซึ่งแบ่งเป็น 2 กรณี ดังนี้

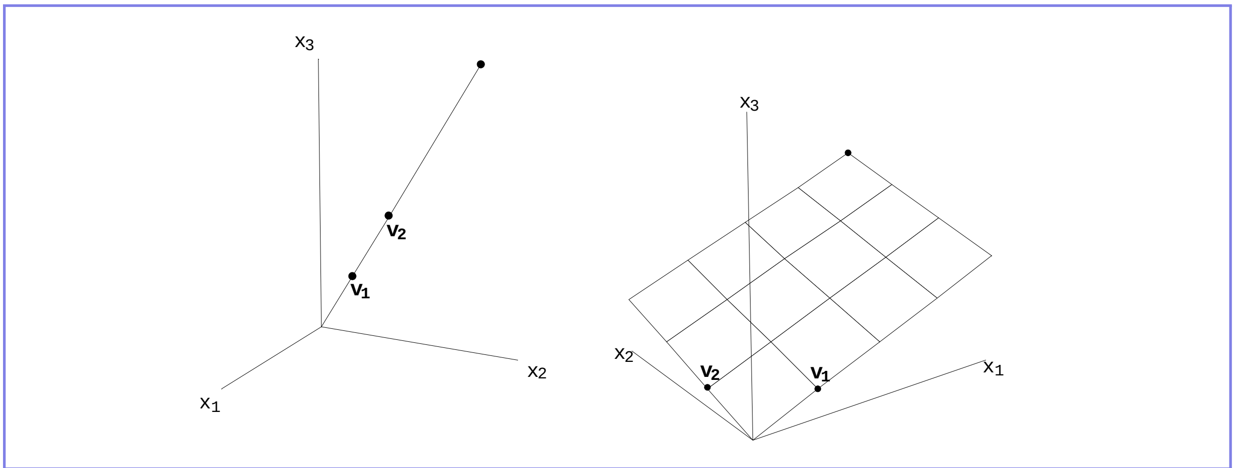
1. มีจำนวนจริง $c \neq 0$ ซึ่ง $\vec{v}_1 = c\vec{v}_2$ นั่นคือ $\vec{v}_1$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\vec{v}_2$ จะได้ว่า

$$\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \text{Span}\{\vec{v}_1\} = \text{Span}\{\vec{v}_2\}$$

2. $\vec{v}_1 \neq c\vec{v}_2$ สำหรับทุกจำนวนจริง $c$ จะได้ว่า

$$\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \{c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

เป็นระนาบ (plane) ใน $\mathbb{R}^3$ ซึ่งผ่านจุดกำเนิด (ดังรูป) เรียกว่า**ระนาบซึ่งแผ่ทั่วโดยเวกเตอร์ $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$ (plane spanned by $\vec{v}_1$ and $\vec{v}_2$)** โดยระนาบนี้มีเวกเตอร์แนวฉาก (normal vector) เป็น $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ (ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (cross product) ของเวกเตอร์ $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$)




ต่อไปเราจะกล่าวถึงสมการเมทริกซ์ ให้ $A$ เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ ซึ่งเราจะแทนหลักของเมทริกซ์ $A$ ด้วยเวกเตอร์ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ ใน $\mathbb{R}^m$ ตามลำดับ และ $\vec{x}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ เรากำหนด**ผลคูณของ $A$ และ $\vec{x}$ (product of $A$ and $\vec{x}$)** เขียนแทนด้วย $A\vec{x}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของหลักของ $A$ ด้วยน้ำหนักซึ่งสมนัยกับสมาชิกของ $\vec{x}$ นั่นคือ

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \ldots & \vec{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n$$

เราเรียกเมทริกซ์ทแยงมุมมิติ $n \times n$ ที่สมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักเป็น $1$ ทั้งหมดว่า**เมทริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix)** เขียนแทนด้วย $I_n$ ซึ่งเราเห็นได้โดยง่ายว่า $I_n\vec{x} = \vec{x}$ สำหรับทุก $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

**ตัวอย่าง 1.4.4** 1. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

2. $x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

ให้ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^m$ เราเรียกสมการในรูปแบบ

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{1.4.3}$$

ว่า**สมการเมทริกซ์ (matrix equation)** ซึ่งจากนิยามผลคูณระหว่างเมทริกซ์ $A$ และเวกเตอร์ $\vec{x}$ เราได้โดยบทแทรก 1.4.1 ว่าเราสามารถพิจารณาการมีผลเฉลยของสมการ (1.4.3) ได้จากการมีผลเฉลยของสมการ (1.4.1) หรือการมีผลเฉลยของสมการ (1.4.2) ซึ่งสรุปเป็นบทแทรกได้ดังนี้

**บทแทรก 1.4.3** *ให้ $A$ เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^m$ จะได้ว่า ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน*

1. *สมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ มีผลเฉลย*
2. *$\vec{b}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ซึ่งได้จากหลักของเมทริกซ์ $A$*
3. *$[A \mid \vec{b}]$ เป็นเมทริกซ์แต่งเติมที่สมนัยกับระบบเชิงเส้นที่มีผลเฉลย*

**ตัวอย่าง 1.4.5** กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

จงพิจารณาว่าสมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ มีผลเฉลยสำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{b}$ หรือไม่

ถ้าไม่ จงหาเงื่อนไขบน $b_1, b_2$ และ $b_3$ ซึ่งทำให้สมการนี้มีผลเฉลย

**วิธีทำ** โดยบทแทรก 1.4.3 เราเขียนเมทริกซ์แต่งเติม $[A \mid \vec{b}]$ และใช้การดำเนินการแถวลดรูปจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & b_1 \\ -2 & 1 & -6 & b_2 \\ 0 & 2 & 8 & b_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & b_1 \\ 0 & 1 & 4 & 2b_1 + b_2 \\ 0 & 2 & 8 & b_3 \end{array}\right] \quad R_2 + 2R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & b_1 \\ 0 & 1 & 4 & 2b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & -4b_1 - 2b_2 + b_3 \end{array}\right] \quad R_3 - 2R_2$$

โดยทฤษฎีบท 1.3.2 เราได้ว่าระบบเชิงเส้นนี้มีผลเฉลย ก็ต่อเมื่อ $-4b_1 - 2b_2 + b_3 = 0$

ดังนั้น สมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ ไม่มีผลเฉลยสำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{b}$

และ สมการนี้มีผลเฉลย ก็ต่อเมื่อ $-4b_1 - 2b_2 + b_3 = 0$ $\square$

จากตัวอย่างข้างต้น สำหรับเมทริกซ์ $A$ ที่กำหนดให้ มีบางเวกเตอร์ $\vec{b}$ ที่ทำให้สมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ ไม่มีผลเฉลย เช่น $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ เพราะว่า $(-4)(1) - 2(1) + 1 = -5 \neq 0$ สิ่งที่เราจะสนใจต่อไปคือการตรวจสอบว่าเมื่อใดที่เมทริกซ์ $A$ ที่กำหนดให้จะทำให้สมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ มีผลเฉลยสำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{b}$

ให้ $A$ เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ เรากล่าวว่า**หลักของเมทริกซ์ $A$ แผ่ทั่ว** $\mathbb{R}^m$ ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{b}$ ใน $\mathbb{R}^m$ เป็นการรวมเชิงเส้นของหลักของเมทริกซ์ $A$ นั่นคือ ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \ldots & \vec{v}_n \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ } \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^m$$

แล้วหลักของเมทริกซ์ $A$ แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^m$ ก็ต่อเมื่อ $\operatorname{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} = \mathbb{R}^m$ และเราสามารถแสดงได้ว่า

**ทฤษฎีบท 1.4.4** *ให้ $A$ เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน*

1. *สำหรับแต่ละ $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ สมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ มีผลเฉลย*
2. *หลักของเมทริกซ์ $A$ แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^m$*
3. *$A$ มีตำแหน่งตัวหลักในทุก ๆ แถว*

ซึ่งเราสามารถใช้ทฤษฎีบทนี้ตรวจสอบว่าเซตของเวกเตอร์แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^m$ หรือไม่ เช่น

**ตัวอย่าง 1.4.6** กำหนดให้ $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$
จงพิจารณาว่าเซต $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^3$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

**วิธีทำ** เขียนเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix}$ และใช้การดำเนินการแถวลดรูปจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 7 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad R_3 + R_1$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad R_3 - 2R_2$$

ดังนั้น $A$ มีตำแหน่งตัวหลักในทุก ๆ แถว
เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 1.4.4 เราสรุปได้ว่าเซต $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^3$ $\square$

เราจะปิดท้ายหัวข้อนี้ด้วยการกล่าวถึงการคูณระหว่างเมทริกซ์

ให้ $A$ เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ และ $B$ เป็น $n \times p$ เมทริกซ์ซึ่งมีหลักเป็น $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_p$ เรากำหนด **ผลคูณ (product) ของ $A$ และ $B$** เขียนแทนด้วย $AB$ เป็น $m \times p$ เมทริกซ์ซึ่งประกอบด้วยหลัก $A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, \ldots, A\vec{b}_p$ นั่นคือ

$$AB = A\begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \ldots & \vec{b}_p \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \ldots & A\vec{b}_p \end{bmatrix}$$

**ตัวอย่าง 1.4.7** กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} AB &= A\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} & A\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} & A\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} & 0\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} & (-2)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11 & 12 & -1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

สังเกตว่า เราสามารถหา $AB$ ได้ ก็ต่อเมื่อ $A$ มีจำนวนหลักเท่ากับจำนวนแถวของ $B$ โดยแถวที่ $i$ และ หลักที่ $k$ ของ

$AB$ คือ ผลบวกของผลคูณของสมาชิกที่สมนัยจากแถวที่ $i$ ของ $A$ และ หลักที่ $k$ ของ $B$
นั่นคือ ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{jk}]_{n\times p}$ แล้วสมาชิกแถวที่ $i$ และ หลักที่ $j$ ของ $AB$ คือ

$$(AB)_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$

จากตัวอย่าง 1.4.7 เราได้ว่า

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(1)+3(3) & 2(0)+3(4) & 2(-2)+3(1) \\ 1(1)+(-1)(3) & 1(0)+(-1)(4) & 1(-2)+(-1)(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11 & 12 & -1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

เราได้สมบัติเบื้องต้นของการคูณระหว่างเมทริกซ์ (แบบฝึกหัด 1.4) ดังนี้

**ทฤษฎีบท 1.4.5** *สำหรับเมทริกซ์ $A$ ที่มีมิติ $m \times n$ และเมทริกซ์ $B$ และ $C$ ซึ่งมีขนาดที่ผลบวกและผลคูณที่เกี่ยวข้องมีความหมาย จะได้ว่า*

1. $r(AB) = (rA)B = A(rB)$ *เมื่อ* $r$ *เป็นจำนวนจริง*
2. $I_m A = A = AI_n$
3. $A(B+C) = AB + AC$ *และ* $(B+C)A = BA + CA$
4. $A(BC) = (AB)C$

ให้ $A$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n$ จากทฤษฎีบทข้างต้นเราสามารถเขียน

$$A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k \text{ ตัว}}$$

**ตัวอย่าง 1.4.8** ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

และ

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $AB \neq BA$

**ข้อสังเกต** โดยทั่วไป $AB$ อาจไม่เท่ากับ $BA$ และ ถ้า $AB = \underline{0}$ แล้วเราก็สรุปไม่ได้ว่า $A = \underline{0}$ หรือ $B = \underline{0}$ เช่นเมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ จะได้ $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

สำหรับเมทริกซ์ $A$ ที่มีมิติ $m \times n$ เราเรียกเมทริกซ์ที่มีมิติ $n \times m$ ซึ่งแต่ละหลักเกิดจากแถวที่สมนัยกับแถวของเมทริกซ์ $A$ ว่า**เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose matrix) ของ** $A$ เขียนแทนด้วย $A^T$

**ตัวอย่าง 1.4.9** ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B^T = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

ถ้า $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$ เป็นเวกเตอร์หลัก จะได้ว่า $\vec{v}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{bmatrix}$

ดังนั้น ถ้า $A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$ เมื่อ $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^m$ เราจะได้ $A^T = \begin{bmatrix} \vec{v}_1^T \\ \vec{v}_2^T \\ \vdots \\ \vec{v}_n^T \end{bmatrix}$

จากการสังเกตข้างต้น เราได้โดยง่ายว่า

**ทฤษฎีบท 1.4.6** *สำหรับเมทริกซ์ $A$ และเมทริกซ์ $B$ ซึ่งมีขนาดที่ผลบวกและผลคูณที่เกี่ยวข้องมีความหมาย เราได้*

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(rA)^T = rA^T$ *เมื่อ $r$ เป็นจำนวนจริง*
4. $(AB)^T = B^T A^T$

**ข้อสังเกต** จากทฤษฎีบทนี้ เราได้ว่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของผลคูณของเมทริกซ์เท่ากับผลคูณของเมทริกซ์สลับเปลี่ยนโดยอันดับจะผันกลับ (reverse order) ซึ่งเราสามารถพิสูจน์สำหรับเมทริกซ์ $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ใด ๆ ที่ผลคูณ $A_1 A_2 \cdots A_k$ มีความหมายได้อีกว่า

$$(A_1 A_2 \cdots A_k)^T = A_k^T \cdots A_2^T A_1^T$$

## แบบฝึกหัด 1.4

1. เมื่อกำหนด $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ และ $\vec{b}$ ดังต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าเวกเตอร์ $\vec{b}$ อยู่ในเซต $\operatorname{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

(ก) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

(ข) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}; \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix}$

(ค) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}; \vec{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

(ง) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}; \vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. เมื่อกำหนด $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ และ $\vec{b}$ ดังต่อไปนี้ จงหาค่าของ $h$ ที่ทำให้ $\vec{b}$ อยู่บนระนาบซึ่งแผ่ทั่วโดย $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$

   (ก) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}; \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ h \end{bmatrix}$ (ข) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}; \vec{b} = \begin{bmatrix} h \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$

3. เมื่อกำหนดเมทริกซ์ $A$ ดังต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าสมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ มีผลเฉลยสำหรับทุกเวกเตอร์ $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ หรือไม่ ถ้าไม่จงหาเงื่อนไขบน $b_1, b_2$ และ $b_3$ ซึ่งทำให้สมการนี้มีผลเฉลย

   (ก) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ (ข) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 8 & -4 \end{bmatrix}$ (ค) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & -6 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

4. จงพิจารณาว่าเซตของเวกเตอร์หรือหลักของเมทริกซ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^3$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

   (ก) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ (ข) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ (ค) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & -8 \end{bmatrix}$

5. จงหาค่าของ $h$ ซึ่งทำให้เวกเตอร์ $\vec{v}_3$ อยู่ใน $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ เมื่อ

   (ก) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ h \end{bmatrix}$ (ข) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ h \\ -3 \end{bmatrix}$

6. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -8 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \\ -2 & -8 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

   จงตอบคำถามต่อไปนี้ พร้อมแสดงเหตุผลประกอบ

   (ก) หลักของเมทริกซ์ $A$ แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^4$ หรือไม่ และสมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ มีผลเฉลยสำหรับทุกเวกเตอร์ $\vec{b} \in \mathbb{R}^4$ หรือไม่

   (ข) หลักของเมทริกซ์ $B$ แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^4$ หรือไม่ และสมการเมทริกซ์ $B\vec{x} = \vec{b}$ มีผลเฉลยสำหรับทุกเวกเตอร์ $\vec{b} \in \mathbb{R}^4$ หรือไม่

7. จงแสดงว่า ถ้า $c \neq 0$ แล้ว $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\} = \text{Span}\{c\vec{v}_1, c\vec{v}_2, \ldots, c\vec{v}_p\}$

8. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

   จงหา $AB, BA, (AB)^T, A^TB^T, CA$ และ $C^TB$

9. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $A^3 = \underline{0}$

10. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 8 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

    จงหา $AB$ และ $AC$

11. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ $X$ ซึ่งทำให้ $A^TA = X - I_3$

12. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ และ $AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 6 & -9 & 3 \end{bmatrix}$

    จงหาหลักที่หนึ่งและหลักที่สองของ $B$

13. กำหนดให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ จงหา $\vec{u}^T\vec{v}, \vec{v}^T\vec{u}, \vec{u}\vec{v}^T$ และ $\vec{v}\vec{u}^T$

14. จงแสดงว่า ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^m$ แล้ว $\vec{u}^T\vec{v} = \vec{v}^T\vec{u}$

15. สำหรับเมทริกซ์ $A$ ที่มีมิติ $m \times n$ และ เวกเตอร์หลัก $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ และ เมทริกซ์ $B$ และ $C$ ซึ่งมีขนาดที่ผลบวกและผลคูณที่เกี่ยวข้องมีความหมาย จงแสดงว่า

    (ก) $A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$ และ $(B + C)\vec{z} = B\vec{z} + C\vec{z}$

    (ข) $A(B + C) = AB + AC$ และ $(B + C)A = BA + CA$

    (ค) $A(B\vec{z}) = (AB)\vec{z}$

    (ง) $A(BC) = (AB)C$

## 1.5 เซตผลเฉลยของระบบเชิงเส้นและอิสระเชิงเส้น

**ระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์ (homogeneous linear system)** คือระบบเชิงเส้นที่สามารถเขียนได้ในรูปแบบ

$$A\vec{x} = \vec{0}_m$$

เมื่อ $A$ เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ และ $\vec{0}_m \in \mathbb{R}^m$

สังเกตว่าระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์มีเวกเตอร์ $\vec{0}_n \in \mathbb{R}^n$ เป็นผลเฉลยอย่างน้อยหนึ่งชุดเสมอ ซึ่งเรียกว่า **ผลเฉลยชัด (trivial solution)** ดังนั้น สำหรับระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์ เราจึงสนใจตรวจสอบการมีผลเฉลยอื่นที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ ซึ่งเรียกว่า**ผลเฉลยไม่ชัด (nontrivial solution)**

เนื่องจากเมทริกซ์แต่งเติมของระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์ $A\vec{x} = \vec{0}_m$ คือ

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \vec{0}_m \end{array}\right]$$

และหากใช้การดำเนินการแถวลดรูปเมทริกซ์แต่งเติมนี้ จะได้เมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปเป็น

$$\left[\begin{array}{c|c} B & \vec{0}_m \end{array}\right]$$

ซึ่งพบว่า หลักทางขวามือสุดจะเป็นเวกเตอร์ศูนย์เสมอ
ดังนั้นจึงเพียงพอที่จะลดรูปเฉพาะเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ $A$ ยิ่งกว่านั้น เราได้ว่า

**ทฤษฎีบท 1.5.1** *ระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์ $A\vec{x} = \vec{0}_m$ มีผลเฉลยไม่ชัด ก็ต่อเมื่อ มีตัวแปรเสรีอย่างน้อยหนึ่งตัว นั่นคือ ก็ต่อเมื่อ $A$ มีหลักที่ไม่เป็นหลักตัวหลัก*

**ตัวอย่าง 1.5.1** จงพิจารณาว่าระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \end{array}$$

มีผลเฉลยไม่ชัดหรือไม่ ถ้ามีจงหาผลเฉลยทั้งหมดของระบบเชิงเส้นนี้

**วิธีทำ** เขียนเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ $A$ และใช้การดำเนินการแถวลดรูปจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดดังนี้

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \quad R_3 + 2R_1 \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 + 3R_2 \end{aligned}$$

ดังนั้น หลักที่ 3 ไม่เป็นหลักตัวหลัก
ทำให้สรุปโดยทฤษฎีบท 1.5.1 ได้ว่าระบบเชิงเส้นนี้มีผลเฉลยไม่ชัด
เราจึงใช้การดำเนินการแถวต่อไปนี้จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปเป็น

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1 + 3R_2$$

ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & - & 5x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

ทำให้เราได้

$$\begin{aligned} &x_1 = 5x_3 \\ &x_2 = x_3 \\ &x_3 \text{ เป็นตัวแปรเสรี} \end{aligned}$$

เป็นผลเฉลยทั้งหมดของระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์ที่กำหนดให้ □

**หมายเหตุ** จากตัวอย่างข้างต้น เราสามารถเขียนผลเฉลยทั้งหมดของระบบเชิงเส้นได้ในรูปแบบเวกเตอร์เป็น

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งเราอาจเขียนอีกแบบหนึ่งได้เป็น

$$\vec{x} = t \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ } t \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

**ตัวอย่าง 1.5.2** จงหาเซตผลเฉลยของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์ $x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 0$

**วิธีทำ** เนื่องจากเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -8 \end{bmatrix}$ อยู่ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูป

ดังนั้น เราได้

$$x_1 = -3x_2 + 8x_3$$
$$x_2 \text{ และ } x_3 \text{ เป็นตัวแปรเสรี}$$

หรือ

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_2 + 8x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } x_2, x_3 \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

เป็นผลเฉลยทั้งหมดของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์ที่กำหนดให้ □

สังเกตว่า เราสามารถเขียนผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ได้ในรูปการรวมเชิงเส้น

$$\vec{x} = t_1\vec{v}_1 + \cdots + t_p\vec{v}_p$$

เมื่อ $t_i$ เป็นตัวแปรเสรี สำหรับทุก $i = 1, \ldots, p$ เรียกว่า**ผลเฉลยในรูปแบบเวกเตอร์อิงตัวแปรเสริม (parametric vector form)**

ต่อไปเราจะหาผลเฉลยของระบบเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ (nonhomogeneous linear system) โดยเริ่มจาก

**ตัวอย่าง 1.5.3** จงหาเซตผลเฉลยของสมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix} \text{ และ } \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

**วิธีทำ** เขียนเมทริกซ์แต่งเติมของสมการเมทริกซ์นี้และดำเนินการแถวกับเมทริกซ์แต่งเติมไปเรื่อยๆ จะได้

$$[A \mid \vec{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 7 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3 + 2R_1 \end{array}$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3 + 3R_2 \end{array}$$

ดังนั้นหลักทางขวาสุดของเมทริกซ์แต่งเติมไม่เป็นหลักตัวหลัก
ทำให้สรุปโดยทฤษฎีบท 1.3.2 ได้ว่าสมการเมทริกซ์นี้มีผลเฉลย
เราจึงใช้การดำเนินการแถวต่อไปจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปเป็น

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 + 3R_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

ซึ่งเมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปนี้สมนัยกับระบบเชิงเส้น

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & - & 5x_3 & = & 5 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

เนื่องจากหลักที่ 1 และ 2 เป็นหลักตัวหลัก ดังนั้นเราได้ว่า $x_1$ และ $x_2$ เป็นตัวแปรพื้นฐานและ $x_3$ เป็นตัวแปรเสรี ทำให้เราได้

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 + 5x_3 \\ x_2 &= 2 + x_3 \\ x_3 &\ \text{เป็นตัวแปรเสรี} \end{aligned}$$

หรือ

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + 5x_3 \\ 2 + x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ } x_3 \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

เป็นผลเฉลยทั้งหมดของสมการเมทริกซ์ที่กำหนดให้ □

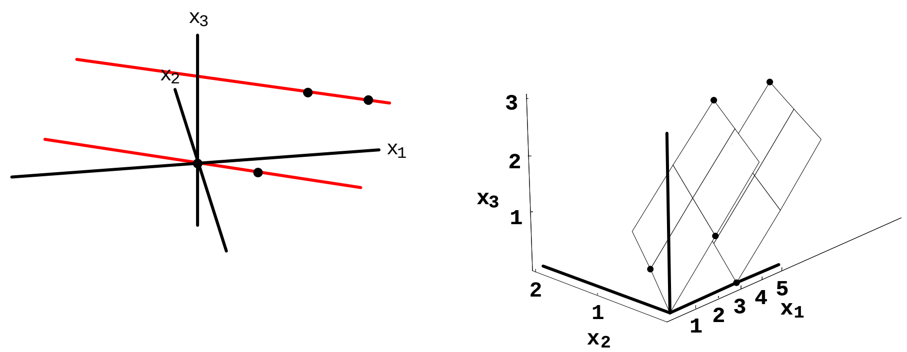
สังเกตว่า เมทริกซ์ $A$ ในตัวอย่าง 1.5.3 เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบเชิงเส้นในตัวอย่าง 1.5.1 และผลเฉลยทั่วไปของสมการเมทริกซ์ในตัวอย่าง 1.5.3 อยู่ในรูปของ $\vec{x} = \vec{p} + \vec{v}_h$ โดยที่ $\vec{v}_h$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์ในตัวอย่าง 1.5.1 และ $\vec{p}$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของระบบเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ในตัวอย่าง 1.5.3 ซึ่งเราสามารถสรุปในกรณีทั่วไปได้ว่า

**ทฤษฎีบท 1.5.2** *ถ้าระบบเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ มีผลเฉลยหนึ่งเป็น $\vec{p}$ เรียกว่า***ผลเฉลยเฉพาะ (particular solution)** *แล้วจะได้ว่าผลเฉลยทั่วไปของระบบเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ จะอยู่ในรูป*

$$\vec{x} = \vec{p} + \vec{v}_h$$

*โดยที่ $\vec{v}_h$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์ $A\vec{x} = \vec{0}$*

ในกรณีเวกเตอร์ $\vec{x}$ อยู่ใน $\mathbb{R}^3$ เราอาจแสดงผลเฉลยของระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์และไม่เอกพันธุ์ได้ในรูปเส้นตรงที่ขนานกันและระนาบที่ขนานกัน โดยที่ผลเฉลยของระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์จะผ่านจุดกำเนิด ดังรูป



เรากล่าวว่าเซตของเวกเตอร์ $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ ใน $\mathbb{R}^m$ เป็น**อิสระเชิงเส้น (linearly independent)** ก็ต่อเมื่อสมการเอกพันธุ์ $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_p\vec{v}_p = \vec{0}_m$ มีเพียงผลเฉลยชัด ดังนั้น เซตของเวกเตอร์ $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง $c_1, c_2, \ldots, c_p$ ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันซึ่งทำให้ $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_p\vec{v}_p = \vec{0}_m$

**ตัวอย่าง 1.5.4** กำหนดให้ $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
จงพิจารณาว่า $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้นหรือไม่ ถ้าไม่ จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง 3 เวกเตอร์นี้

**วิธีทำ** เนื่องจากเราต้องการตรวจสอบว่าสมการเอกพันธุ์ $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 = \vec{0}_3$ มีเพียงผลเฉลยชัดหรือไม่ เราจึงเริ่มโดยเขียนเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ $A$ และใช้การดำเนินการแถวลดรูปจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R_2 - 3R_1 \\ R_3 + 2R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3 + R_2 \end{matrix}$$

เพราะฉะนั้นหลักที่ 3 ไม่เป็นหลักตัวหลัก จึงสรุปโดยทฤษฎีบท 1.5.1 ได้ว่าสมการเอกพันธุ์ $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 = \vec{0}_3$ มีผลเฉลยไม่ชัด ดังนั้น $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ ไม่เป็นเซตอิสระเชิงเส้นและเราหาความสัมพันธ์ระหว่าง 3 เวกเตอร์นี้โดยลดรูปเมทริกซ์แต่งเติมที่มีอยู่ต่อไปจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปเป็น

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 + \frac{3}{4}R_2 \\ \frac{1}{4}R_2 \\ \\ \end{matrix}$$

ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & & + \frac{3}{4}x_3 & = & 0 \\ & x_2 & + \frac{1}{4}x_3 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \qquad \text{นั่นคือ} \qquad \begin{array}{rcl} x_1 & = & -\frac{3}{4}x_3 \\ x_2 & = & -\frac{1}{4}x_3 \end{array}$$

โดยเราอาจเลือก $x_3 = -4$ ทำให้เรามี $x_1 = 3$ และ $x_2 = 1$
ดังนั้น ความสัมพันธ์ระหว่าง 3 เวกเตอร์นี้คือ $3\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - 4\vec{v}_3 = \vec{0}$ □

สำหรับ $m \times n$ เมทริกซ์ $A$ เรากล่าวว่า**หลักของ $A$ เป็นอิสระเชิงเส้น** ก็ต่อเมื่อ เซตของเวกเตอร์หลักที่ได้จากหลักของเมทริกซ์ $A$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น นั่นคือ สมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{0}$ มีเพียงผลเฉลยชัด ซึ่งเราจะเห็นว่า

**บทแทรก 1.5.3** *หลักของเมทริกซ์ $A$ เป็นอิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ ทุกหลักของเมทริกซ์ $A$ เป็นหลักตัวหลัก*

**ตัวอย่าง 1.5.5** จงพิจารณาว่าหลักของเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & -6 & 6 \\ 3 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่ เพราะเหตุใด

**วิธีทำ** เราใช้การดำเนินการแถวลดรูป $A$ จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & -6 & 6 \\ 3 & 3 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R_2 + 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3 + \frac{1}{2}R_2 \end{matrix}$$

ทำให้ได้ว่าทุกหลักของเมทริกซ์ $A$ เป็นหลักตัวหลัก
ดังนั้น หลักของเมทริกซ์ $A$ เป็นอิสระเชิงเส้น $\square$

**ข้อสังเกต**

1. ถ้ามีเวกเตอร์ศูนย์ในเซต $S$ แล้ว $S$ เป็นเซตซึ่ง**ไม่**อิสระเชิงเส้น
2. เซต $\{\vec{v}\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ $\vec{v} \neq \vec{0}$
3. เซต $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ ไม่เป็นเซตอิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง $c$ ซึ่ง $\vec{v}_1 = c\vec{v}_2$
4. เซตของเวกเตอร์ $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ ไม่เป็นเซตอิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ มีอย่างน้อยหนึ่งเวกเตอร์ใน $S$ อยู่ในรูปการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ตัวอื่นในเซต $S$
5. ถ้า $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ เป็นเซตของ $p$ เวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^m$ โดยที่ $p > m$ แล้ว $S$ ไม่เป็นเซตอิสระเชิงเส้น เพราะว่าจำนวนหลักมากกว่าจำนวนแถวจึงได้ว่าทุกหลักไม่สามารถเป็นหลักตัวหลักได้

**ตัวอย่าง 1.5.6** จากข้อสังเกตข้างต้น เราได้ว่าเซตต่อไปนี้**ไม่เป็น**เซตอิสระเชิงเส้น

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$
$$S_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}, S_4 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

## แบบฝึกหัด 1.5

1. จงพิจารณาว่าระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์ต่อไปนี้มีผลเฉลยไม่ชัดหรือไม่ ถ้ามี จงเขียนผลเฉลยทั่วไปในรูปแบบเวกเตอร์อิงตัวแปรเสริม

(ก) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \\ -2x_1 - 7x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

(ข) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

(ค) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0 \\ -5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

(ง) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

2. จงเขียนผลเฉลยของ $A\vec{x} = \vec{0}$ ในรูปแบบเวกเตอร์อิงตัวแปรเสริม เมื่อ กำหนดให้ $A$ สมมูลแถวกับเมทริกซ์ต่อไปนี้

(ก) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (ข) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (ค) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(ง) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (จ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -5 & 8 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. จงหาเซตผลเฉลยของระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์

(ก) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 9x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$ (ข) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$

4. จากเซตผลเฉลยของระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์ในข้อก่อนหน้านี้ จงหาผลเฉลยทั่วไปของระบบเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ต่อไปนี้ในรูปแบบเวกเตอร์อิงตัวแปรเสริมพร้อมทั้งบอกและเปรียบเทียบลักษณะทางเรขาคณิตของเซตผลเฉลยนี้กับเซตผลเฉลยของระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์

(ก) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 9x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$ (ข) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ 3x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 6 \end{cases}$

5. จงหาค่าของ $a$ ซึ่งทำให้ระบบเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 &= 0 \end{aligned}$$

มีผลเฉลยไม่ชัด พร้อมทั้งหาเซตผลเฉลยของระบบเชิงเส้นนี้ด้วย

6. จงหาเซตผลเฉลยของระบบเชิงเส้น เมื่อ (ก) $\lambda = 0$ (ข) $\lambda = 1$ (ค) $\lambda = 2$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \phantom{+ x_3} &= \lambda x_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= \lambda x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= \lambda x_3 \end{aligned}$$

7. จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์ต่อไปนี้เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่ เพราะเหตุใด

(ก) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ข) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ (ค) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

8. จงพิจารณาว่าหลักของเมทริกซ์ต่อไปนี้เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่ เพราะเหตุใด

(ก) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (ข) $\begin{bmatrix} 0 & -8 & 5 \\ 3 & -7 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ (ค) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ (ง) $\begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & -7 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

9. จงหาค่าของ $h$ ซึ่งทำให้เซตต่อไปนี้เป็นเซตอิสระเชิงเส้น

(ก) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ h \end{bmatrix} \right\}$ (ข) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ h \\ -9 \end{bmatrix} \right\}$

(ค) $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -8 \end{bmatrix} \right\}$ (ง) $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ h \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

10. ให้ $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ เซตอิสระเชิงเส้นใน $\mathbb{R}^m$ จงแสดงว่าถ้า $c \neq 0$ แล้ว $\{c\vec{v}_1, c\vec{v}_2, \ldots, c\vec{v}_p\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น

**คำตอบแบบฝึกหัด 1.2** 1.$-3A = \begin{bmatrix} 3 & 0-6 \\ -9 & 15-3 \end{bmatrix}, A+2B = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 \\ -3 & -9 & 1 \end{bmatrix}, B-2A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -9 & 8 & -2 \end{bmatrix}$;
2.$\begin{bmatrix} 7.5 & 5 & -2.5 & 2.5 \\ 0 & -5 & 2.5 & 0 \end{bmatrix}$; 3. $\begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.75 & 1 \\ 0.25 & -0.25 \end{bmatrix}$; 4.(ก)ต้องกัน, (ข)ไม่ต้องกัน, (ค)ต้องกัน, (ง)ต้องกัน;
5.(ก) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ / $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & 22 \end{array}\right]$ / $x_1 = 2, x_2 = 6$, (ข) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ / $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right]$ / $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$,
(ค) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 9 \end{bmatrix}$ / $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & 9 & 7 \end{array}\right]$ / $x_1 = 5, x_2 = 3, x_3 = -1$,
(ง) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ / $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$ / $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 1$; 6.(ก)มี, (ข)ไม่มี

**คำตอบแบบฝึกหัด 1.3** 1.(ก)ขั้นบันไดลดรูป, (ข)ขั้นบันไดแต่ไม่เป็นขั้นบันไดลดรูป, (ค)ขั้นบันไดแต่ไม่เป็นขั้นบันไดลดรูป, (ง)ไม่เป็นขั้นบันได, (จ)ขั้นบันไดลดรูป, (ฉ)ขั้นบันไดลดรูป;
2.(ก)หลัก1,2 / $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2.5 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, (ข)หลัก1,2 / $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 1 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, (ค)หลัก1,3 / $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}$;
3.(ก)ต้องกัน ชุดเดียว, (ข)ไม่ต้องกัน, (ค)ต้องกัน ชุดเดียว, (ง)ต้องกัน อนันต์ชุด;
4.(ก) ($x_1 = -1-12x_3, x_2 = -2-4x_3, x_3$ เป็นตัวแปรเสรี), (ข)ไม่ต้องกัน, (ค)ไม่ต้องกัน, (ง) ($x_1 = 1.6+0.6x_3-0.6x_4, x_2 = 0.1+0.4x_3-0.1x_4$, $x_3$ และ $x_4$ เป็นตัวแปรเสรี), (จ) ($x_1 = 3-3x_2, x_3 = 3$ และ $x_2$ เป็นตัวแปรเสรี), (ฉ)ไม่ต้องกัน, (ช) ($x_1 = 5+7x_2-6x_4, x_3 = -3+2x_4, x_2$ และ $x_4$ เป็นตัวแปรเสรี), (ซ) ($x_1 = \frac{4}{3}x_2, x_3 = 0$ และ $x_2$ เป็นตัวแปรเสรี), (ฌ) ($x_1 = 5+3x_4, x_2 = 1+4x_4, x_3 = 4-9x_4$ และ $x_4$ เป็นตัวแปรเสรี), (ญ)ไม่ต้องกัน;
5.(ก)$h \neq 2$, (ข)ทุก $h \in \mathbb{R}$, (ค)ทุก $h \in \mathbb{R}$, (ง)$h \neq 0$;
6.(ก)ไม่ต้องกัน $\Leftrightarrow a = -3$, (ข)ชุดเดียว $\Leftrightarrow a \neq 3, -3$, (ค)อนันต์ชุด $\Leftrightarrow a = 3$; 7.$\alpha = \dfrac{\pi}{2}, \beta = \pi, \gamma = 0$

**คำตอบแบบฝึกหัด 1.4** 1.(ก)อยู่, (ข)ไม่อยู่, (ค)อยู่, (ง)ไม่อยู่; 2.(ก)$h = -17$, (ข)$h = -3.5$;
3.(ก)$-4b_1 - 2b_2 + b_3 = 0$, (ข)$2b_1 + b_3 = 0$, (ค)ทุก $\vec{b}$, 4.(ก)ไม่แผ่ทั่ว, (ข)แผ่ทั่ว, (ค)ไม่แผ่ทั่ว;
5.(ก)$h = 10$, (ข)$h = -8$; 6.(ก)ไม่, (ข)ไม่; 11. $\begin{bmatrix} 17 & 8 & -12 \\ 8 & 6 & -8 \\ -12 & -8 & 14 \end{bmatrix}$; 12. $\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ -5 \end{bmatrix}$

**คำตอบแบบฝึกหัด 1.5** 1.(ก)$\vec{x} = \begin{bmatrix} -\frac{17}{8} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix} x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}$, (ข)$\vec{x} = \vec{0}$, (ค)$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}$, (ง)$\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_4,\ x_4 \in \mathbb{R}$;

2.(ก)$\vec{x} = \begin{bmatrix} 47 \\ 8 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} x_4,\ x_4 \in \mathbb{R}$, (ข)$\vec{x} = \begin{bmatrix} -19 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}$, (ค)$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_5,\ x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$,

(ง) $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_5 + \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_6,\ x_3, x_5, x_6 \in \mathbb{R}$, (จ)$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 19 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_5 + \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_7,\ x_1, x_4, x_5, x_7 \in \mathbb{R}$;

3.(ก)$\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}$, (ข)$\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}$; 4.(ก)$\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ x_3 \in \mathbb{R}$, (ข)$\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},\ x_3 \in \mathbb{R}$;

5.$a = -3$ / $\vec{x} = \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}$; 6.(ก)$\vec{x} = \vec{0}$, (ข)$\vec{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}$, (ค)$\vec{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}$;
7.(ก)เป็น, (ข)ไม่เป็น, (ค)ไม่เป็น; 8.(ก)เป็น, (ข)เป็น, (ค)เป็น, (ง)ไม่เป็น; 9.(ก)$h \neq 6$, (ข)$h \in \mathbb{R}$, (ค)$h \neq 4$, (ง)$h \neq -1, 2$

# บทที่ 2

# การแปลงเชิงเส้นและพีชคณิตเมทริกซ์

## 2.1 การแปลงเมทริกซ์และเมทริกซ์มาตรฐาน

ให้ $A$ เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ เราเรียกฟังก์ชัน $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ กำหนดโดย

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}$$

สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ว่า**การแปลงเมทริกซ์ (matrix transformation)**

**ตัวอย่าง 2.1.1** ให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ และกำหนดการแปลงเมทริกซ์ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ โดย $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ นั่นคือ สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ เราได้

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + 7x_2 \\ x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \end{bmatrix}$$

(ก) จงหา $T(\vec{u})$

**วิธีทำ** $T(\vec{u}) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 + 7(-2) \\ 1 - 3(-2) \\ 3(1) + 5(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix}$ □

(ข) จงหาเวกเตอร์ $\vec{x}$ ซึ่ง $T(\vec{x}) = \vec{b}$

**วิธีทำ** จาก $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ ดังนั้นเราต้องการผลเฉลยทั้งหมดของสมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ ซึ่งเราหาได้โดยลดรูปเมทริกซ์แต่งเติม $[A \mid \vec{b}]$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปดังนี้

$$[A \mid \vec{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 7 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ดังนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ □

(ค) เวกเตอร์ $\vec{x}$ ที่ได้ในข้อ (ข) มีเพียงเวกเตอร์เดียวหรือไม่

**วิธีทำ** เนื่องจากไม่มีตัวแปรเสรี เวกเตอร์ $\vec{x}$ ที่ได้จึงมีเพียงเวกเตอร์เดียว □

(ง) จงพิจารณาว่า $\vec{c}$ อยู่ในเรนจ์ของ $T$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

**วิธีทำ** เพราะว่า $\vec{c}$ อยู่ในเรนจ์ของ $T$ ก็ต่อเมื่อ มีเวกเตอร์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ ที่ทำให้ $T(\vec{x}) = \vec{c}$ ดังนั้นเราจะตรวจสอบว่าสมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{c}$ มีผลเฉลยหรือไม่ โดยลดรูปเมทริกซ์แต่งเติม $[A \mid \vec{c}]$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดดังนี้

$$[A \mid \vec{c}] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 7 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 26 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -25 \end{array}\right]$$

เพราะฉะนั้นเราสรุปโดยทฤษฎีบท 1.3.2 ได้ว่าสมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{c}$ ไม่มีผลเฉลย
ส่งผลให้ $\vec{c}$ ไม่อยู่ในเรนจ์ของ $T$ □

เราเรียกฟังก์ชัน $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ว่า**การแปลงเชิงเส้น (linear transformation)** ถ้าสำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ และจำนวนจริง $c$ เราได้ว่า

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) \quad \text{และ} \quad T(c\vec{u}) = c\,T(\vec{u})$$

**ข้อสังเกต** 1. ฟังก์ชัน $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก $\mathbb{R}^n$ ไป $\mathbb{R}^m$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ และจำนวนจริง $c$ และ $d$ จะได้ว่า

$$T(c\vec{u} + d\vec{v}) = cT(\vec{u}) + dT(\vec{v})$$

2. ถ้า $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ เป็นการแปลงเชิงเส้นแล้ว

$$T(\vec{0}_n) = \vec{0}_m \quad \text{และ} \quad T(-\vec{v}) = -T(\vec{v}) \text{ สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ } \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

ยิ่งกว่านั้น สำหรับทุก ๆ $m \times n$ เมทริกซ์ $A$ เวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ และจำนวนจริง $c$ เราได้ว่า

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} \quad \text{และ} \quad A(c\vec{u}) = c(A\vec{u})$$

ดังนั้น

**ทฤษฎีบท 2.1.1** *ทุก ๆ การแปลงเมทริกซ์เป็นการแปลงเชิงเส้น*

**ตัวอย่าง 2.1.2** ฟังก์ชันต่อไปนี้**ไม่เป็น**การแปลงเชิงเส้น

(ก) $T(x_1) = \sin x_1$
เพราะว่า $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ แต่ $\frac{1}{6}\sin\pi = 0$
ดังนั้น $\sin(\frac{\pi}{6}) \neq \frac{1}{6}\sin\pi$

(ข) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1-e^{x_1} \\ x_1+3x_2 \end{bmatrix}$

เพราะว่า $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$

แต่ $T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1+e^{-1} \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+e \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+e+e^{-1} \\ 6 \end{bmatrix}$

(ค) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2$

เพราะว่า $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = 4$ แต่ $2T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2(1) = 2$

**ตัวอย่าง 2.1.3** ให้ $r$ เป็นจำนวนจริงบวก กำหนด $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ โดย

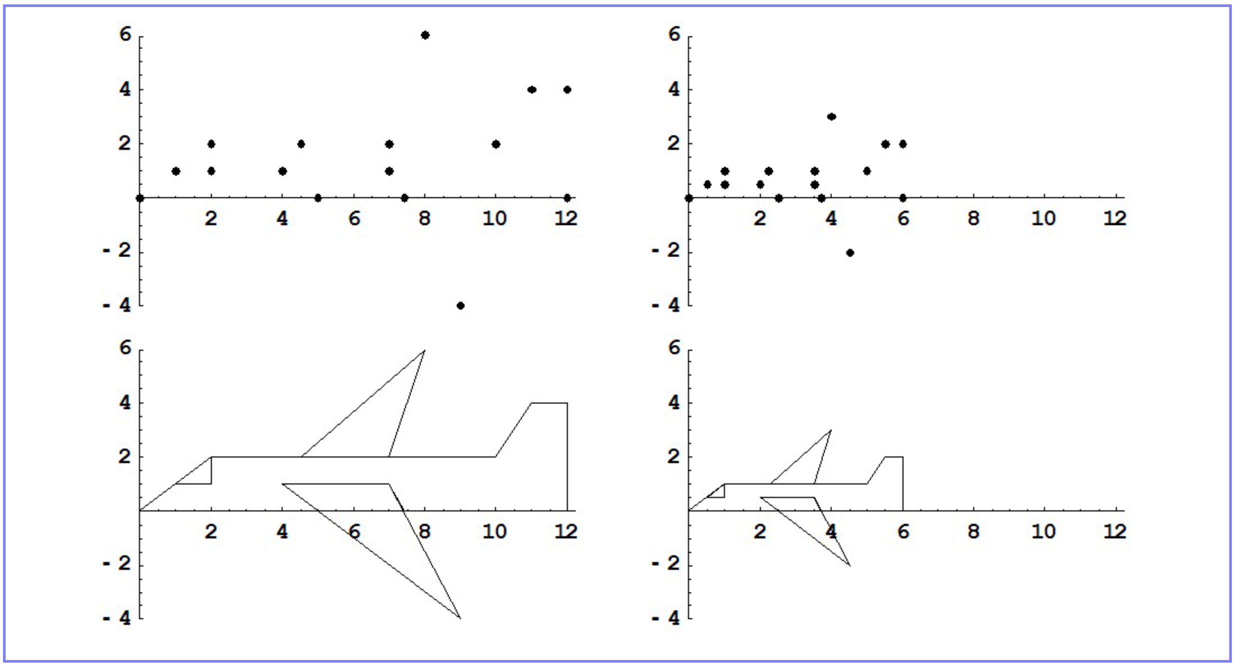
$$T(\vec{x}) = r\vec{x} \quad \text{สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ } \vec{x} \in \mathbb{R}^2$$

เราเรียก $T$ ว่า**การหดตัว (contraction)** เมื่อ $0 < r < 1$ และเรียก $T$ ว่า**การเปลี่ยนขนาด (dilation)** เมื่อ $r > 1$ เนื่องจากสำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ และ $c \in \mathbb{R}$ เรามี

$$\begin{aligned} T(\vec{x}+\vec{y}) &= r(\vec{x}+\vec{y}) = r\vec{x}+r\vec{y} = T(\vec{x})+T(\vec{y}) \\ \text{และ} \quad T(c\vec{x}) &= r(c\vec{x}) = (rc)\vec{x} = (cr)\vec{x} = c(r\vec{x}) = cT(\vec{x}) \end{aligned}$$

ดังนั้น $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้น

เราสามารถแสดงผลของแปลงเชิงเส้นการหดตัวเมื่อ $r = 0.5$ บนระนาบได้ดังรูป



**ตัวอย่าง 2.1.4** ให้ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่ง

$$T(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

จงหา $T(2\vec{u})$ และ $T(3\vec{u} - \vec{v})$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้น ดังนั้น เราได้ว่า

$$T(2\vec{u}) = 2T(\vec{u}) = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

และ

$$T(3\vec{u} - \vec{v}) = 3T(\vec{u}) - T(\vec{v}) = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ตามต้องการ $\square$

**ตัวอย่าง 2.1.5** ให้ $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{y}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
และกำหนดให้ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่ง $T(\vec{e}_1) = \vec{y}_1$ และ $T(\vec{e}_2) = \vec{y}_2$
จงหาภาพ (image) ของ $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ภายใต้ $T$

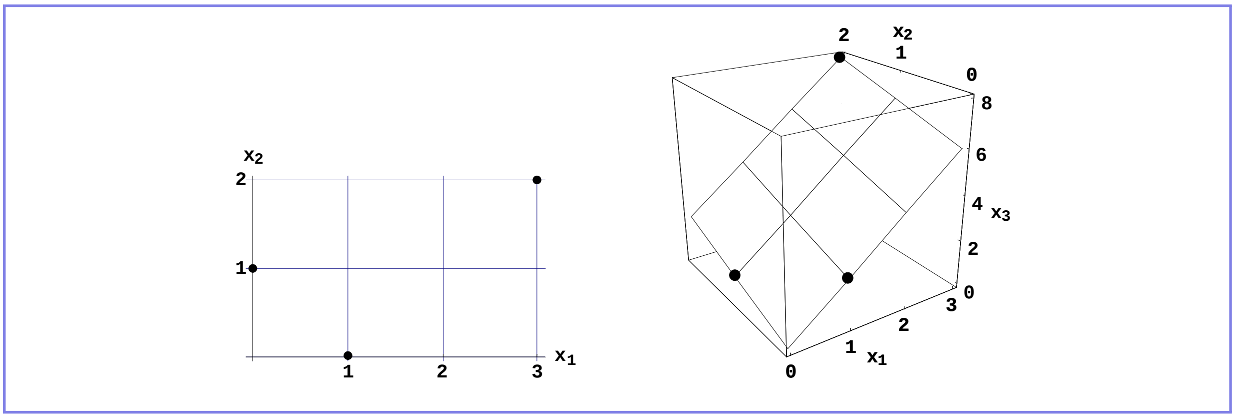
**วิธีทำ** เพราะว่า $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้น และ

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \quad \text{และ} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$$

ดังนั้น เราได้ว่า

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) &= T(3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) \\ &= 3T(\vec{e}_1) + 2T(\vec{e}_2) \\ &= 3\vec{y}_1 + 2\vec{y}_2 \\ &= 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ซึ่งเราแสดงการส่งเวกเตอร์ของการแปลงเชิงเส้น $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ได้ดังรูป




และเรามี

$$
\begin{aligned}
T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) &= T(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) \\
&= x_1T(\vec{e}_1) + x_2T(\vec{e}_2) \\
&= x_1\vec{y}_1 + x_2\vec{y}_2 \\
&= x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

ยิ่งกว่านั้น เรายังได้ด้วยว่า $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\square$

**ตัวอย่าง 2.1.6** ให้ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่ง

$$T\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

จงหา $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$ สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

**วิธีทำ** ก่อนอื่นเราจะเขียน $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ นั่นคือหาจำนวนจริง $c_1$ และ $c_2$ ซึ่งทำให้

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

โดยเขียนเมทริกซ์แต่งเติมของสมการเวกเตอร์และใช้การดำเนินการแถวลดรูปจนมีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 - 3x_2 \\ 0 & 1 & -x_1 + 4x_2 \end{array}\right]$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (x_1 - 3x_2)\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + (-x_1 + 4x_2)\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เพราะว่า $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้น ดังนั้น เราจึงได้ว่า

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) &= T\left((x_1 - 3x_2)\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + (-x_1 + 4x_2)\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= (x_1 - 3x_2)T\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + (-x_1 + 4x_2)T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= (x_1 - 3x_2)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (-x_1 + 4x_2)\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2x_1 + 10x_2 \\ 3x_1 - 11x_2 \\ -2x_1 + 7x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ยิ่งกว่านั้น เรายังได้ด้วยว่า $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 3 & -11 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\square$

เราทราบมาแล้วว่าทุก ๆ การแปลงเมทริกซ์เป็นการแปลงเชิงเส้น ต่อไปเราจะแสดงว่าทุก ๆ การแปลงเชิงเส้น $T$ จาก $\mathbb{R}^n$ ไป $\mathbb{R}^m$ เป็นการแปลงเมทริกซ์ โดยการหาเมทริกซ์ $A$ มิติ $m \times n$ ซึ่งทำให้

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}$$

สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ดังนี้

ให้ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ เป็นการแปลงเชิงเส้น

สำหรับแต่ละ $j = 1, 2, \ldots, n$ เขียน $\vec{e}_j$ แทนเวกเตอร์ที่ได้จากหลักที่ $j$ ของเมทริกซ์เอกลักษณ์ $I_n$ กำหนด $m \times n$ เมทริกซ์ $A$ ให้มีหลักที่ $j$ เป็น $T(\vec{e}_j)$ สำหรับทุก ๆ $j = 1, 2, \ldots, n$

สังเกตว่าสำหรับแต่ละเวกเตอร์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ เราได้ว่า

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$$

ดังนั้น

$$T(\vec{x}) = T(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n) = x_1T(\vec{e}_1) + x_2T(\vec{e}_2) + \cdots + x_nT(\vec{e}_n) = A\vec{x}$$

เพราะฉะนั้น เราสรุปได้ว่า

**ทฤษฎีบท 2.1.2** *ให้ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ เป็นการแปลงเชิงเส้น*
*กำหนด $m \times n$ เมทริกซ์ $A$ ให้มีหลักที่ $j$ เป็นเวกเตอร์ $T(\vec{e}_j)$ เมื่อ $\vec{e}_j$ เป็นเวกเตอร์ที่ได้จากหลักที่ $j$ ของเมทริกซ์เอกลักษณ์ $I_n$ สำหรับทุก $j = 1, 2, \ldots, n$ นั่นคือ*

$$A = \begin{bmatrix} T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) & \cdots & T(\vec{e}_n) \end{bmatrix}_{m \times n}$$

*จะได้ว่า $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ดังนั้น $T$ เป็นการแปลงเมทริกซ์*

เมทริกซ์ $A$ ในทฤษฎีบท 2.1.2 เรียกว่า**เมทริกซ์มาตรฐาน (standard matrix) สำหรับการแปลงเชิงเส้น** $T$

**ตัวอย่าง 2.1.7** จงหาเมทริกซ์มาตรฐานสำหรับการแปลงเชิงเส้น $T(\vec{x}) = r\vec{x}$ สำหรับทุกเวกเตอร์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ และ $r$ เป็นจำนวนจริงบวก

**วิธีทำ** เนื่องจาก $T(\vec{e}_1) = r\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $T(\vec{e}_2) = r\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}$
ดังนั้น $A = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น $T$ $\square$

บางครั้งเพื่อความกะทัดรัด เราเขียนเวกเตอร์แถวแทนเวกเตอร์หลัก เช่น $(x_1, x_2)$ แทน $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ และในการนิยาม $T$ เราเขียน $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ แทน $T((x_1, x_2, \ldots, x_n))$

**ตัวอย่าง 2.1.8** กำหนด $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ โดย $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + 2x_3, 0, x_2)$
จงแสดงว่า $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้น พร้อมทั้งหาเมทริกซ์มาตรฐาน $A$ สำหรับ $T$

**วิธีทำ** เนื่องจาก

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + 2x_3 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $T$ เป็นการแปลงเมทริกซ์
เพราะฉะนั้นเราสรุปโดยทฤษฎีบท 2.1.1 ได้ว่า $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้น
และเมทริกซ์มาตรฐานสำหรับ $T$ คือ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\square$

ให้ $T$ เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}^n$ ไป $\mathbb{R}^m$

1. เรากล่าวว่า $T$ เป็น**ฟังก์ชันทั่วถึง (onto)** $\mathbb{R}^m$
ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ มีเวกเตอร์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ซึ่ง $T(\vec{x}) = \vec{b}$

2. เรากล่าวว่า $T$ **มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one)** หรือเขียนสั้น ๆ เป็น "$T$ 1-1"
ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละเวกเตอร์ $\vec{x}$ และ $\vec{y}$ ใน $\mathbb{R}^n$ ถ้า $T(\vec{x}) = T(\vec{y})$ แล้ว $\vec{x} = \vec{y}$

ในกรณีที่ $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้น เรามี

**ทฤษฎีบท 2.1.3** *ให้ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ เป็นการแปลงเชิงเส้น เราได้ว่า $T$ มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง*
*ก็ต่อเมื่อ ระบบเชิงเส้น $T(\vec{x}) = \vec{0}_m$ มีเพียงผลเฉลยชัด*
*นั่นคือ ก็ต่อเมื่อ หลักของเมทริกซ์มาตรฐาน $A$ สำหรับ $T$ เป็นอิสระเชิงเส้น*

เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 1.4.4 และบทแทรก 1.5.3 เราได้เกณฑ์ในการพิจารณาว่า การแปลงเชิงเส้น $T$ มีสมบัติทั่วถึงหรือมีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนี้

**บทแทรก 2.1.4** *ให้ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ เป็นการแปลงเชิงเส้นและ $A$ เป็นเมทริกซ์มาตรฐานสำหรับ $T$*
*เราได้ว่า*
*1. $T$ มีสมบัติทั่วถึง $\mathbb{R}^m$ ก็ต่อเมื่อ หลักของเมทริกซ์ $A$ แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^m$ ก็ต่อเมื่อ $A$ มีตำแหน่งตัวหลักในทุก ๆ แถว*
*2. $T$ มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ $A$ มีตำแหน่งตัวหลักในทุก ๆ หลัก*

**ตัวอย่าง 2.1.9** จงตรวจสอบว่าการแปลงเชิงเส้นที่มีเมทริกซ์มาตรฐานเป็น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

มีสมบัติทั่วถึงหรือมีสมบัติ 1-1 หรือไม่ เพราะเหตุใด

**วิธีทำ** ลดรูปเมทริกซ์ $A$ จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดเป็น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $A$ มีตำแหน่งตัวหลักในทุก ๆ หลักและในทุก ๆ แถว
โดยทฤษฎีบท 2.1.4 เราสรุปได้ว่า $T$ มีสมบัติ 1-1 และมีสมบัติทั่วถึง $\square$

**ตัวอย่าง 2.1.10** จงตรวจสอบว่าการแปลงเชิงเส้นในตัวอย่าง 2.1.8 มีสมบัติทั่วถึง หรือ มีสมบัติ 1-1 หรือไม่ เพราะเหตุใด

**วิธีทำ** ลดรูปเมทริกซ์มาตรฐาน $A$ สำหรับการแปลงเชิงเส้น $T$ จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดเป็น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $A$ มีตำแหน่งตัวหลักในทุก ๆ หลักแต่ไม่มีตำแหน่งตัวหลักในแถวสุดท้าย
โดยทฤษฎีบท 2.1.4 เราสรุปได้ว่า $T$ มีสมบัติ 1-1 แต่ไม่มีสมบัติทั่วถึง $\square$

**ตัวอย่าง 2.1.11** จงพิจารณาว่ามีการแปลงเชิงเส้น $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ ซึ่งมีสมบัติทั่วถึง หรือไม่ เพราะเหตุใด

**วิธีทำ** เนื่องจากเมทริกซ์มาตรฐานของการแปลงเชิงเส้น $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ มีมิติ $5 \times 3$
ทำให้ได้ว่า $A$ มีตำแหน่งตัวหลักมีได้ไม่เกิน 3 ตำแหน่ง แต่ $A$ มี 5 แถวจึงเป็นไปไม่ได้ที่ $A$
จะมีตำแหน่งตัวหลักในทุก ๆ แถว โดยบทแทรก 2.1.4 (ก) จะได้ว่า $T$ ไม่มีสมบัติทั่วถึง
ดังนั้น ไม่มีการแปลงเชิงเส้น $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ ซึ่งมีสมบัติทั่วถึง $\square$

## แบบฝึกหัด 2.1

1. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -9 & 9 & -6 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
จงหาเวกเตอร์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ ทั้งหมดซึ่งการแปลงเมทริกซ์ $T : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ ส่งไปเวกเตอร์ศูนย์ และ จงพิจารณาว่าเวกเตอร์ $\vec{b}$ อยู่ในเรนจ์ของ $T$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$
จงหาเวกเตอร์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ ทั้งหมดซึ่งการแปลงเมทริกซ์ $T : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ ส่งไปเวกเตอร์ศูนย์ และ จงพิจารณาว่าเวกเตอร์ $\vec{b}$ อยู่ในเรนจ์ของ $T$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

3. พิจารณาการแปลงเมทริกซ์ $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ เมื่อกำหนดเมทริกซ์ $A$ และ เวกเตอร์ $\vec{b}$ ดังต่อไปนี้ จงหาเวกเตอร์ $\vec{x}$ ทั้งหมดซึ่ง $T(\vec{x}) = \vec{b}$ (ถ้ามี)
(ก) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ (ข) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & 6 \\ 3 & -5 & -9 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} -6 \\ -12 \\ 5 \end{bmatrix}$
(ค) $A = \begin{bmatrix} 1 & -7 & -5 \\ -3 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ (ง) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \\ -3 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$

4. จงแสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้**ไม่**เป็นการแปลงเชิงเส้น
(ก) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_2 + 4 \end{bmatrix}$ (ข) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = |x_1| + |x_2|$

5. จงแสดงว่าฟังก์ชัน $T$ ต่อไปนี้เป็นการแปลงเชิงเส้นโดยหาเมทริกซ์มาตรฐาน $A$ ซึ่งทำให้ $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ พร้อมทั้งพิจารณาว่า $T$ มีสมบัติทั่วถึงหรือมีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่ เพราะเหตุใด
(ก) $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_2, -2x_1 + x_2)$
(ข) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 - x_3, 0, x_1 - x_2, x_3 - x_4)$
(ค) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 + x_3, x_1 - 2x_3)$
(ง) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 5x_1 - x_2 + 3x_3, 4x_1 + x_2 + 2x_3)$

6. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นไปได้หรือไม่ พร้อมอธิบายเหตุผลหรือยกตัวอย่างประกอบ
(ก) มีการแปลงเชิงเส้น $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$ ซึ่งมีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง
(ข) มีการแปลงเชิงเส้น $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^8$ ซึ่งมีสมบัติทั่วถึง
(ค) มีการแปลงเชิงเส้น $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ซึ่งมีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง แต่ไม่มีสมบัติทั่วถึง

7. จงหาสูตรของการแปลงเชิงเส้น $T$ ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้ และหาเมทริกซ์มาตรฐาน $A$ สำหรับ $T$ พร้อมทั้งพิจารณาว่า $T$ มีสมบัติทั่วถึงหรือมีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่ เพราะเหตุใด
(ก) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, T\left(\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ และ $T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
(ข) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ และ $T\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

## 2.2 ปริภูมิหลัก และ ปริภูมิสู่ศูนย์

### 2.2.1 ปริภูมิย่อย

จากหัวข้อ 1.4 สำหรับเวกเตอร์ $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_p$ ใน $\mathbb{R}^m$ เรามีเซตย่อยของ $\mathbb{R}^m$ ที่แผ่ทั่วโดยเวกเตอร์ $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_p$ กำหนดโดย

$$H=\operatorname{Span}\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_p\}=\{c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+\cdots+c_p\vec{v}_p:c_1,c_2,\ldots,c_p\in\mathbb{R}\}$$

เป็นเซตของการรวมเชิงเส้นทั้งหมดของเวกเตอร์ $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_p$ เพราะว่า

$$\vec{0}_m=0\vec{v}_1+0\vec{v}_2+\cdots+0\vec{v}_p$$

ดังนั้น $\vec{0}_m$ อยู่ในเซตนี้ ต่อมาให้ $\vec{u},\vec{v}\in H$ และ $c$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ
จะได้ว่า $\vec{u}=a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+\cdots+a_p\vec{v}_p$ และ $\vec{v}=b_1\vec{v}_1+b_2\vec{v}_2+\cdots+b_p\vec{v}_p$
โดยที่ $a_1,a_2,\ldots,a_p,b_1,b_2,\ldots,b_p\in\mathbb{R}$
เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\vec{u}+\vec{v}&=(a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+\cdots+a_p\vec{v}_p)+(b_1\vec{v}_1+b_2\vec{v}_2+\cdots+b_p\vec{v}_p)\\&=(a_1+b_1)\vec{v}_1+(a_2+b_2)\vec{v}_2+\cdots+(a_p+b_p)\vec{v}_p\end{aligned}$$

และ

$$c\vec{u}=c(a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+\cdots+a_p\vec{v}_p)=(ca_1)\vec{v}_1+(ca_2)\vec{v}_2+\cdots+(ca_p)\vec{v}_p$$

นั่นคือ $\vec{u}+\vec{v}\in H$ และ $c\vec{u}\in H$
ทำให้ได้ว่าเวกเตอร์ในเซตนี้สอดคล้องสมบัติปิดการบวกและสมบัติปิดการคูณด้วยจำนวนจริง

เราเรียกเซตย่อย $H$ ของ $\mathbb{R}^m$ ซึ่งสอดคล้องสมบัติต่อไปนี้

1. $\vec{0}_m\in H$
2. สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u},\vec{v}\in H$ จะได้ว่า $\vec{u}+\vec{v}\in H$ และ
3. สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}\in H$ และจำนวนจริง $c$ จะได้ว่า $c\vec{u}\in H$

ว่า**ปริภูมิย่อย (subspace)** ของ $\mathbb{R}^m$

**ตัวอย่าง 2.2.1** 1. เราได้โดยง่ายว่า $\{\vec{0}_m\}$ และ $\mathbb{R}^m$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^m$

2. $\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:x_1=-x_2\}$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^2$ (แสดงในตัวอย่าง 2.2.3)

3. $\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:x_1^2=x_2+3\}$ ไม่เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^2$ เพราะว่า $(0,0)$ ไม่อยู่ในเซตนี้

4. $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \sin(x_1 + x_2 + x_3) = 0\}$ ไม่เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$
   เพราะว่า $(\pi, 0, \pi) \in H$ แต่ $\frac{1}{6}(\pi, 0, \pi) \notin H$

และจากข้อสังเกตตอนต้นหัวข้อนี้ เราสามารถสร้างปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^m$ จากเซตย่อยของ $\mathbb{R}^m$ ได้ดังนี้

**ทฤษฎีบท 2.2.1** *ให้ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p \in \mathbb{R}^m$ และ $H = \operatorname{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ จะได้ว่า $H$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^m$ เรียกว่า***ปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^m$ ที่แผ่ทั่วโดยเวกเตอร์ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ (subspace of $\mathbb{R}^m$ spanned by $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$)**

ให้ $A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \ldots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$ เมื่อ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^m$ เป็น $m \times n$ เมทริกซ์

เราเรียกปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^m$ ที่แผ่ทั่วโดยเวกเตอร์ที่ได้จากหลักของเมทริกซ์ $A$ ว่า**ปริภูมิหลัก (column space) ของเมทริกซ์** $A$ เขียนแทนด้วย $\operatorname{Col} A$ นั่นคือ

$$\operatorname{Col} A = \operatorname{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$$

เพราะว่า $\operatorname{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} = \{x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ดังนั้น เรามี

$$\operatorname{Col} A = \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

และจากบทแทรก 1.4.2 เราได้ด้วยว่า

$$b \in \operatorname{Col} A \text{ ก็ต่อเมื่อ ระบบเชิงเส้น } \left[\begin{array}{c|c} A & \vec{b} \end{array}\right] \text{ มีผลเฉลย}$$

**ตัวอย่าง 2.2.2** ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$
จงพิจารณาว่า $\vec{b} \in \operatorname{Col} A$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

**วิธีทำ** ลดรูปเมทริกซ์แต่งเติม $\left[\begin{array}{c|c} A & \vec{b} \end{array}\right]$ จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดเป็น

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 7 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.3.2 ระบบเชิงเส้นนี้มีผลเฉลย ทำให้ได้ว่า $\vec{b} \in \operatorname{Col} A$ $\square$

สังเกตว่าปริภูมิหลักของ $m \times n$ เมทริกซ์ $A$ คือเรนจ์ของการแปลงเมทริกซ์ $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ จาก $\mathbb{R}^n$ ไป $\mathbb{R}^m$ และโดยทฤษฎีบท 2.1.2 เราได้ว่า ทุก ๆ การแปลงเชิงเส้นเป็นการแปลงเมทริกซ์ เพราะฉะนั้น เรนจ์ของทุก ๆ การแปลงเชิงเส้น $T$ อยู่ในรูป

$$\operatorname{range} T = \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} = \operatorname{Col} A$$

เมื่อ $A$ คือเมทริกซ์มาตรฐานของการแปลงเชิงเส้น $T$ ทำให้เราสรุปได้ว่า

**ทฤษฎีบท 2.2.2** *ให้ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ เป็นการแปลงเชิงเส้น และ $A$ เป็นเมทริกซ์มาตรฐานสำหรับ $T$ จะได้ว่าเรนจ์ของ $T$ คือปริภูมิหลักของเมทริกซ์ $A$ ดังนั้น เรนจ์ของการแปลงเชิงเส้นเป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^m$*

สำหรับ $m \times n$ เมทริกซ์ $A$ เราเรียกเซตผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ $A\vec{x} = \vec{0}_m$ ว่า**ปริภูมิสู่ศูนย์ (null space) ของเมทริกซ์** $A$ เขียนแทนด้วย $\mathrm{Nul}\, A$ นั่นคือ

$$\mathrm{Nul}\, A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}_m\}$$

และเราแสดงได้ว่า

**ทฤษฎีบท 2.2.3** *ปริภูมิสู่ศูนย์ของ $m \times n$ เมทริกซ์ $A$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$*

**บทพิสูจน์** เพราะว่า $A\vec{0}_n = \vec{0}_m$ ดังนั้น $\vec{0}_n \in \mathrm{Nul}\, A$
ต่อมาให้ $\vec{u}, \vec{v} \in \mathrm{Nul}\, A$ และ $c$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ
เพราะฉะนั้น $A\vec{u} = \vec{0}_m$ และ $A\vec{v} = \vec{0}_m$ ทำให้ได้ว่า

$$A(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0}_m + \vec{0}_m = \vec{0}_m \quad \text{และ} \quad A(c\vec{u}) = c(A\vec{u}) = c\vec{0}_m = \vec{0}_m$$

นั่นคือ $\vec{u}+\vec{v} \in \mathrm{Nul}\, A$ และ $c\vec{u} \in \mathrm{Nul}\, A$ ดังนั้น $\mathrm{Nul}\, A$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$ □

**ตัวอย่าง 2.2.3** เพราะว่า

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = -x_2 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \right\} = \mathrm{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $H$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^2$

**ตัวอย่าง 2.2.4** พิจารณาเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ ในตัวอย่าง 2.2.2
โดยตัวอย่าง 1.5.1 เราได้ว่า $\mathrm{Nul}\, A = \mathrm{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

### 2.2.2 ฐานหลัก มิติ และแรงก์

**ฐานหลัก (basis) สำหรับปริภูมิย่อย** $H$ ของ $\mathbb{R}^m$ คือเซตย่อย $\mathcal{B}$ ของ $H$ ซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นและแผ่ทั่ว $H$ นั่นคือ $\mathcal{B} \subseteq H$ เป็นอิสระเชิงเส้นและ $\mathrm{Span}\, \mathcal{B} = H$

**ตัวอย่าง 2.2.5** สำหรับแต่ละ $j = 1, 2, \dots, m$ เขียน $\vec{e}_j$ แทนเวกเตอร์ที่ได้จากหลักที่ $j$ ของเมทริกซ์เอกลักษณ์ $I_m$ โดยทฤษฎีบท 1.4.4 และบทแทรก 1.5.3 หลักของเมทริกซ์เอกลักษณ์ $I_m$ แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^m$ และเป็นอิสระเชิงเส้น ดังนั้น $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $\mathbb{R}^m$ เรียกว่า**ฐานหลักมาตรฐาน (standard basis) สำหรับ** $\mathbb{R}^m$

**ตัวอย่าง 2.2.6** จากตัวอย่าง 2.2.4 เราทราบว่าเมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$
เราได้ว่า $\mathrm{Nul}\, A = \mathrm{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ และเซต $\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

ดังนั้น $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $\operatorname{Nul} A$

ในการหาฐานหลักสำหรับ $\operatorname{Col} A$ เราใช้

**ทฤษฎีบท 2.2.4** *ให้ $A$ เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ จะได้ว่า เซตของหลักตัวหลักของเมทริกซ์ $A$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $\operatorname{Col} A$*

**ตัวอย่าง 2.2.7** จงหาฐานหลักสำหรับ $\operatorname{Col} A$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

**วิธีทำ** ลดรูปเมทริกซ์ $A$ จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดเป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นหลักที่ 1 และ 2 เป็นหลักตัวหลัก ทำให้ได้ว่า $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $\operatorname{Col} A$ □

ให้ $H$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^m$ และ $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $H$ เราสามารถแสดงได้ว่า ถ้า $\mathcal{C}$ เป็นฐานหลักอีกฐานหนึ่งสำหรับ $H$ แล้ว $|\mathcal{B}| = |\mathcal{C}|$ เราเรียกจำนวนสมาชิกของฐานหลักสำหรับ $H$ ว่า**มิติ (dimension) ของ** $H$ เขียนแทนด้วย $\dim H$ และเพื่อความสะดวก เรากำหนด $\operatorname{Span} \emptyset = \{\vec{0}_m\}$ ดังนั้น $\dim\{\vec{0}\} = 0$

**ตัวอย่าง 2.2.8** โดยใช้ฐานหลักมาตรฐาน $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m\}$ สำหรับ $\mathbb{R}^m$ เราได้ว่า

$$\dim \mathbb{R}^m = m$$

เราเรียกมิติของปริภูมิหลักของเมทริกซ์ $A$ ว่า**แรงก์ (rank) ของเมทริกซ์** $A$ เขียนแทนด้วย $\operatorname{rank} A$ และเราเรียกมิติของปริภูมิสู่ศูนย์ของเมทริกซ์ $A$ ว่า**ศูนยภาพ (nullity) ของเมทริกซ์** $A$ เขียนแทนด้วย $\operatorname{nullity} A$ นั่นคือ

$$\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Col} A \quad \text{และ} \quad \operatorname{nullity} A = \dim \operatorname{Nul} A$$

**ตัวอย่าง 2.2.9** ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ จากตัวอย่าง 2.2.7 เราได้ว่า $\operatorname{rank} A = 2$ และจากตัวอย่าง 2.2.6 เราได้ว่า $\operatorname{nullity} A = 1$

**ตัวอย่าง 2.2.10** จงแสดงว่าเซต

$$H = \{(x_1 + 2x_2, -x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$ พร้อมทั้งหาฐานหลักและมิติของ $H$

**วิธีทำ** เพราะว่า

$$
\begin{aligned}
H &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & + & 2x_2 & & \\ & - & x_2 & + & x_3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 \end{bmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \operatorname{Col} A \quad \text{เมื่อ } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $H$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$
ต่อไปเราลดรูปเมทริกซ์ $A$ จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดเป็น

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

เพราะฉะนั้นหลักที่ 1 และ 2 เป็นหลักตัวหลัก
ทำให้ได้ว่า $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $H$ ดังนั้น $\dim H = 2$ $\square$

**ตัวอย่าง 2.2.11** จงแสดงว่าเซต

$$
H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \text{ และ } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}
$$

เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^4$ พร้อมทั้งหาฐานหลักและมิติของ $H$

**วิธีทำ** เพราะว่า

$$
\begin{aligned}
H &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{matrix} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \end{matrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $H = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 : A\vec{x} = \vec{0}_2 \right\} = \operatorname{Nul} A$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น $H$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$

ต่อไปเราลดรูปเมทริกซ์ $A$ จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปเป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned} \quad \text{นั่นคือ} \quad \begin{aligned} x_1 &= -x_2 \\ x_3 &= -x_4 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ $A\vec{x} = \vec{0}_2$

ดังนั้น $H = \mathrm{Nul}\, A = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

ทำให้ได้ว่า $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $H$ และ $\dim H = 2$ □

**ตัวอย่าง 2.2.12** จงหาฐานหลักสำหรับปริภูมิหลักและปริภูมิสู่ศูนย์ของเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

พร้อมทั้งหา $\mathrm{rank}\, A$ และ $\mathrm{nullity}\, A$

**วิธีทำ** ลดรูปเมทริกซ์ $A$ จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดเป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้นหลักที่ 1, 2 และ 3 เป็นหลักตัวหลัก

ทำให้ได้ว่า $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $\operatorname{Col} A$
ดังนั้น $\operatorname{rank} A = 3$
ต่อไปเราลดรูปเมทริกซ์ $A$ จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปเป็น

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&-1&3\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{array}{rcl}x_1+2x_4&=&0\\x_2-x_4&=&0\\x_3-x_4&=&0\end{array}\qquad\text{นั่นคือ}\qquad\begin{array}{rcl}x_1&=&-2x_4\\x_2&=&x_4\\x_3&=&x_4\end{array}$$

เพราะฉะนั้น $\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2x_4\\x_4\\x_4\\x_4\end{bmatrix}=x_4\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ เป็นผลเฉลยของสมการ $A\vec{x}=\vec{0}_5$

ดังนั้น $H = \operatorname{Nul} A = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ ทำให้ได้ว่า $\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $\operatorname{Nul} A$ และ nullity $A = 1$ □

สังเกตว่า สำหรับ $m \times n$ เมทริกซ์ $A$ เราได้ว่า $\operatorname{rank} A$ คือจำนวนหลักของเมทริกซ์ $A$ ที่เป็นหลักตัวหลักและ nullity $A$ คือจำนวนตัวแปรเสรีของสมการเอกพันธุ์ $A\vec{x}=\vec{0}_m$ ซึ่งมีจำนวนเท่ากับจำนวนหลักของเมทริกซ์ $A$ ที่ไม่เป็นหลักตัวหลัก ดังนั้นเราสรุปได้ว่า

**ทฤษฎีบท 2.2.5** [ทฤษฎีบทแรงก์ (Rank Theorem)]
*ถ้า $A$ เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ แล้ว* $\operatorname{rank} A + \operatorname{nullity} A = n$

**ตัวอย่าง 2.2.13** ให้ $A$ เป็น $10 \times 12$ เมทริกซ์ ซึ่งมี nullity $A = 7$
ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 2.2.5 จะได้ว่า $\operatorname{rank} A = 12 - 7 = 5$

## แบบฝึกหัด 2.2

1. จงพิจารณาว่าเซตต่อไปนี้เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^3$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

(ก) $\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\3\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\-7\\4\end{bmatrix}$ (ข) $\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\0\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\-1\\2\end{bmatrix}$

(ค) $\begin{bmatrix}-1\\5\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-1\\-2\end{bmatrix}$ (ง) $\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\-2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\5\\0\end{bmatrix}$

2. จงหาฐานหลักและมิติของปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^4$ ซึ่งแผ่ทั่วโดยเวกเตอร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(ก) $\begin{bmatrix}1\\-3\\2\\-4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\4\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\-5\\3\\-7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\9\\-6\\12\end{bmatrix}$ (ข) $\begin{bmatrix}-1\\4\\-7\\7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\-2\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-3\\-1\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\-6\\8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-8\\9\\-5\end{bmatrix}$

3. จงพิจารณาว่าเซต $H$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$ หรือไม่ ถ้าเป็นจงหาฐานหลักและมิติของ $H$
(ก) $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + |x_2| = 0\}$
(ข) $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$
(ค) $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$
(ง) $H = \{(x_1 - x_3, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$
(จ) $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$
(ฉ) $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0$ และ $x_2 - x_3 = 0\}$

4. จงหาฐานหลักสำหรับปริภูมิหลักและปริภูมิสู่ศูนย์ของเมทริกซ์ $A$ ต่อไปนี้ พร้อมทั้งหา $\text{rank}\, A$ และ $\text{nullity}\, A$

(ก) $A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\7 & -6 & 2\\-5 & 4 & 4\end{bmatrix}$ (ข) $A = \begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & -5\\9 & 2 & -5 & 1\\-9 & -4 & 1 & 7\end{bmatrix}$

(ค) $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\-5 & -1 & 0\\0 & 12 & 7\\2 & -5 & 4\end{bmatrix}$ (ง) $A = \begin{bmatrix}4 & 5 & 9 & -2\\6 & 5 & 1 & 12\\3 & 4 & 8 & -3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 6 & -5\\0 & 1 & 5 & -6\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

(จ) $A = \begin{bmatrix}1 & 4 & 8 & -3 & -7\\-1 & 2 & 7 & 3 & 4\\3 & 6 & 9 & -5 & -2\\-2 & 2 & 9 & 5 & 5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 4 & 8 & 0 & 5\\0 & 2 & 5 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 1 & 4\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

(ฉ) $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 2\\-2 & -5 & 5 & 6\\0 & -3 & 15 & 18\\0 & -2 & 10 & 8\\3 & 6 & 0 & 6\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 2\\0 & 1 & -5 & -10\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

5. ให้ $A$ เป็น $4 \times 6$ เมทริกซ์ จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ โดยอธิบายเหตุผล หรือ ยกตัวอย่างประกอบ
(ก) $\text{Nul}\, A$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^4$ (ข) $\text{rank}\, A = 3$ ก็ต่อเมื่อ $\text{nullity}\, A = 3$
(ค) $\text{nullity}\, A \geq 2$ (ง) $\text{rank}\, A \geq 2$
(จ) ถ้า $A$ มี 4 หลักตัวหลักแล้ว $\text{Col}\, A = \mathbb{R}^4$

6. ให้ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ เป็นการแปลงเชิงเส้น และ $A$ เป็นเมทริกซ์มาตรฐานสำหรับ $T$
จงแสดงว่า $T$ มีสมบัติ 1-1 ก็ต่อเมื่อ $\text{nullity}\, A = 0$

## 2.3 เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์จัตุรัส

ให้ $A$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n$ ถ้ามีเมทริกซ์ $C$ ซึ่ง $AC = I_n = CA$ เราเรียก $C$ ว่า**เมทริกซ์ผกผัน (inverse matrix) ของเมทริกซ์** $A$

สังเกตว่า ถ้า $B$ เป็นเมทริกซ์ผกผันอีกตัวหนึ่งของเมทริกซ์ $A$ จะได้ว่า

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

ดังนั้น ถ้า $A$ มีเมทริกซ์ผกผันแล้วเมทริกซ์ผกผันจะมีเพียงตัวเดียว เขียนแทนด้วย $A^{-1}$ เราเรียกเมทริกซ์ที่ไม่มีเมทริกซ์ผกผันว่า**เมทริกซ์เอกฐาน (singular matrix)** และเรียกเมทริกซ์ที่มีเมทริกซ์ผกผันว่า**เมทริกซ์ไม่เอกฐาน (nonsingular matrix)**

สำหรับ $2 \times 2$ เมทริกซ์ เราสามารถหาเมทริกซ์ผกผันได้โดยง่ายจาก

**ทฤษฎีบท 2.3.1** *ให้* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *เป็น* $2 \times 2$ *เมทริกซ์ จะได้ว่า* $A$ *มีเมทริกซ์ผกผัน เป็น*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

*ก็ต่อเมื่อ* $ad - bc \neq 0$

สำหรับเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ เราเรียก $ad - bc$ ว่า**ดีเทอร์มิแนนต์ (determinant)** ของเมทริกซ์ $A$ เขียนแทนด้วย $\det A$ ดังนั้นสำหรับเมทริกซ์จัตุรัส $A$ ขนาด 2 เราได้ว่า $A$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน ก็ต่อเมื่อ $\det A \neq 0$

**ตัวอย่าง 2.3.1** ถ้า $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$A^{-1} = \frac{1}{2(-7) - 5(-3)} \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

**ตัวอย่าง 2.3.2** จงใช้เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$ หาผลเฉลยของระบบเชิงเส้น

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & = & -1 \\ -3x_1 & - & 7x_2 & = & 1 \end{array}$$

**วิธีทำ** เนื่องจากระบบเชิงเส้นที่กำหนดให้สมมูลกับสมการเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{นั่นคือ} \quad A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นเราได้ว่า $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ □

โดยทั่วไป เราสามารถใช้เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์จัตุรัส $A$ หาผลเฉลยของสมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ ดังนี้

**ทฤษฎีบท 2.3.2** *ถ้า* $A$ *เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด* $n$ *ซึ่งมีเมทริกซ์ผกผันและ* $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ *แล้วสมการเมทริกซ์* $A\vec{x} = \vec{b}$ *มีผลเฉลยชุดเดียวคือ* $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

ทฤษฎีบทต่อไป กล่าวถึงสมบัติเบื้องต้นของเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์

**ทฤษฎีบท 2.3.3** *สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส $A$ และ $B$ ขนาด $n$ ซึ่งมีเมทริกซ์ผกผัน เราได้ว่า*

1. $A^{-1}$ *หาเมทริกซ์ผกผันได้ และ* $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $A^T$ *หาเมทริกซ์ผกผันได้ และ* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
3. $AB$ *หาเมทริกซ์ผกผันได้ และ* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

เราเรียกเมทริกซ์ซึ่งได้จากการดำเนินการแถวมูลฐานหนึ่งครั้งกับเมทริกซ์เอกลักษณ์ว่า **เมทริกซ์มูลฐาน (elementary matrix)**

**ตัวอย่าง 2.3.3** ให้ $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ และ $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ จงหา $E_1A, E_2A$ และ $E_3A$

**วิธีทำ** เห็นชัดว่า $E_1, E_2$ และ $E_3$ เป็นเมทริกซ์มูลฐานและจากการคูณเมทริกซ์เราได้โดยง่ายว่า

$$E_1A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ -4a+g & -4b+h & -4c+i \end{bmatrix}, \quad E_2A = \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{bmatrix},$$

$$\text{และ} \quad E_3A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 5g & 5h & 5i \end{bmatrix}$$

สังเกตว่า เมทริกซ์ $E_1A, E_2A$ และ $E_3A$ มีค่าเท่ากับเมทริกซ์ที่ได้จากการดำเนินการแถวกับเมทริกซ์ $A$ ด้วยการดำเนินการแถวเดียวกับ $I_3$ จนได้เมทริกซ์มูลฐาน $E_1, E_2$ และ $E_3$ ตามลำดับ □

ซึ่งในกรณีทั่วไป เราได้ว่า

**ทฤษฎีบท 2.3.4** *ให้ $A$ เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ และ $I_m$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ $m \times m$ ถ้า $E$ และ $B$ เป็นเมทริกซ์ที่ได้จาก $I_m$ และ $A$ โดยการดำเนินการแถวแบบเดียวกัน ตามลำดับ แล้วเราจะได้ว่า $EA = B$*

โดยทฤษฎีบท 1.3.1 เราได้ว่า ทุก ๆ $m \times n$ เมทริกซ์ $A$ สามารถลดรูปโดยใช้การดำเนินการแถวมูลฐานต่าง ๆ ชุดหนึ่งให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูป $B$ ได้แบบเดียว และถ้าเราให้ $E_1, E_2, \ldots, E_k$ เป็นเมทริกซ์มูลฐานที่ได้จากการใช้การดำเนินการแถวเหล่านั้นกับเมทริกซ์เอกลักษณ์ $I_m$ ตามลำดับ จะได้ว่า $C = E_k \ldots E_2E_1$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน และ $CA = B$ ซึ่งเราสามารถหาเมทริกซ์ $C$ ได้โดยการดำเนินการกับเมทริกซ์แต่งเติม $M = [A \mid I_m]$ จนมีรูปแบบขั้นบันไดลดรูป $M' = [B \mid C]$

**ตัวอย่าง 2.3.4** ให้ $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ไม่เอกฐาน $C$ ซึ่งทำให้ $CA$ เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูป

**วิธีทำ** ลดรูปเมทริกซ์แต่งเติม $[A \mid I_2]$ จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} -3 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 10 & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right]$$

ดังนั้น เมทริกซ์ $C$ ซึ่งทำให้ $CA$ เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปคือ $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$ □

วิธีการข้างต้น อาจใช้หาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์จัตุรัส $A$ ขนาด $n$ (ถ้ามี) โดยดำเนินการแถวมูลฐานกับเมทริกซ์แต่งเติม $[A \mid I_n]$ จนมีรูปแบบขั้นบันไดลดรูป $[B \mid C]$ ดังนั้น $CA = B$ โดยเราสรุปการมีเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ $A$ จาก

**ทฤษฎีบท 2.3.5** *เมทริกซ์จัตุรัส $A$ ขนาด $n$ มีเมทริกซ์ผกผัน ก็ต่อเมื่อ $A$ สมมูลแถวกับเมทริกซ์เอกลักษณ์ $I_n$ นั่นคือรูปแบบขั้นบันไดลดรูปของเมทริกซ์ $A$ คือ $I_n$*

**ตัวอย่าง 2.3.5** จงหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (ถ้ามี)

**วิธีทำ** เขียนเมทริกซ์แต่งเติม $[A \mid I_3]$ และลดรูปจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

เพราะฉะนั้น เราได้ว่า $A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ □

เราเรียกการแปลงเชิงเส้น $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ว่า**หาตัวผกผันได้ (invertible)** ก็ต่อเมื่อ เมทริกซ์มาตรฐาน $A$ ของการแปลงเชิงเส้น $T$ มีเมทริกซ์ผกผัน และ $T^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}\vec{x}$ สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

**ตัวอย่าง 2.3.6** ถ้า $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้นที่มีเมทริกซ์มาตรฐานเป็น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

จากตัวอย่าง 2.3.5 เราได้ว่า $A$ มีเมทริกซ์ผกผัน ดังนั้น $T$ หาตัวผกผันได้ และ $T^{-1}$ กำหนดโดย

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{ทุก ๆ เวกเตอร์ } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

เรารวบรวมความรู้ที่ได้ศึกษาไว้แล้ว มาใช้ตรวจสอบว่าเมทริกซ์จัตุรัส $A$ ที่กำหนดให้หาเมทริกซ์ผกผันได้หรือไม่ ในทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 2.3.6** [ทฤษฎีบทเมทริกซ์หาตัวผกผันได้ (Invertible Matrix Theorem)]
*ให้ $A$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n$ จะได้ว่า ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน*
*1. เมทริกซ์ $A$ หาเมทริกซ์ผกผันได้*
*2. เมทริกซ์ $A$ สมมูลแถวกับเมทริกซ์เอกลักษณ์ $I_n$*
*3. เมทริกซ์ $A$ มีตำแหน่งตัวหลัก $n$ ตำแหน่ง*
*4. สมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{0}$ มีเพียงผลเฉลยชัด*
*5. หลักของเมทริกซ์ $A$ เป็นอิสระเชิงเส้น*
*6. การแปลงเชิงเส้น $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง*
*7. สมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ มีผลเฉลยสำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$*
*8. หลักของเมทริกซ์ $A$ แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^n$*
*9. การแปลงเชิงเส้น $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ มีสมบัติทั่วถึง*
*10. มีเมทริกซ์จัตุรัส $C$ ขนาด $n$ ซึ่ง $CA = I_n$*
*11. มีเมทริกซ์จัตุรัส $D$ ขนาด $n$ ซึ่ง $AD = I_n$*
*12. เมทริกซ์ $A^T$ หาเมทริกซ์ผกผันได้*
*13. หลักของเมทริกซ์ $A$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^n$*
*14.* $\operatorname{Col} A = \mathbb{R}^n$
*15.* $\operatorname{rank} A = n$
*16.* $\operatorname{Nul} A = \{\vec{0}_n\}$
*17.* $\operatorname{nullity} A = 0$

**ตัวอย่าง 2.3.7** จงใช้ทฤษฎีบทเมทริกซ์หาตัวผกผันได้ตรวจสอบว่าเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

มีเมทริกซ์ผกผันหรือไม่ เพราะเหตุใด

**วิธีทำ** ลดรูป $A$ จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดเป็น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $A$ มีตำแหน่งตัวหลักเพียง 2 ตำแหน่ง
เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 2.3.6 เราได้ว่า $A$ ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน □

**ตัวอย่าง 2.3.8** จงหาค่าของ $h$ ซึ่งทำให้เมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & -7 & h \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ หาเมทริกซ์ผกผันได้

**วิธีทำ** ลดรูป $A$ จนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดเป็น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -7 & h \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -7 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 10 & h-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & h+4 \end{bmatrix}$$

โดยทฤษฎีบท 2.3.6 ได้ว่า $A$ มีเมทริกซ์ผกผัน ก็ต่อเมื่อ หลักที่ 3 เป็นหลักตัวหลัก
นั่นคือ ก็ต่อเมื่อ $h+4 \neq 0$ ทำให้ได้ว่า $h \neq -4$ $\square$

**แบบฝึกหัด 2.3**

1. จงหาเมทริกซ์ผกผันของ $2 \times 2$ เมทริกซ์ต่อไปนี้
(ก) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (ข) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (ค) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ (ง) $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -7 & -5 \end{bmatrix}$

2. โดยอาศัยเมทริกซ์ผกผันที่ได้ในข้อก่อนหน้านี้ จงหาผลเฉลยของระบบเชิงเส้นต่อไปนี้
(ก) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4 \\ -x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$ (ข) $\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 = -9 \\ -7x_1 - 5x_2 = 11 \end{cases}$

3. ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}, \vec{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
(ก) จงหา $A^{-1}$ และใช้ $A^{-1}$ หาผลเฉลยของสมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}_1$, $A\vec{x} = \vec{b}_2$, $A\vec{x} = \vec{b}_3$ และ $A\vec{x} = \vec{b}_4$
(ข) สังเกตว่าสมการเมทริกซ์ในข้อ (ก) สามารถหาผลเฉลยได้พร้อมๆ กันจากการดำเนินการแถวกับเมทริกซ์แต่งเติม
$$\left[\begin{array}{c|cccc} A & \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 & \vec{b}_4 \end{array}\right]$$
จงหาผลเฉลยของสมการเมทริกซ์ทั้งสี่โดยใช้การดำเนินการแถว

4. จงหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ต่อไปนี้ (ถ้ามี)
(ก) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ (ข) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ (ค) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
(ง) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (จ) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ (ฉ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

5. จงหาผลเฉลยของสมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ เมื่อกำหนดให้
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

6. เมื่อกำหนดเมทริกซ์ $A$ ดังต่อไปนี้ จงหาเมทริกซ์ไม่เอกฐาน $C$ ซึ่งทำให้ $CA$ เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูป พร้อมทั้งบอกแรงก์ของ $A$
(ก) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (ข) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

7. ถ้า $A = \begin{bmatrix} -2 & -7 & -9 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ โดยไม่คำนวณหลักหรือแถวอื่นๆ จงหาหลักที่สามและหาแถวที่สองของ $A^{-1}$

8. จงแสดงว่า ถ้าเมทริกซ์ $A$ หาเมทริกซ์ผกผันได้ แล้ว $AA^T$ หาเมทริกซ์ผกผันได้

## 2.4 ดีเทอร์มิแนนต์

สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ขนาด $n$ ให้ $M_{ij}(A)$ เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่ $i$ และ หลักที่ $j$ ของ $A$ ออก เรานิยาม**ดีเทอร์มิแนนต์ (determinant) ของ** $A$ เขียนแทนด้วย $\det A$ หรือ $|A|$ อย่างเวียนเกิด (recursive definition) ดังนี้

*กรณีที่* $n = 1$ เราได้ว่า $A = [a_{11}]$ เราให้ $\det A = a_{11}$

*กรณีที่* $n > 1$ เราให้

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det M_{1j}(A)$$

สังเกตว่า เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ เป็น $2 \times 2$ เมทริกซ์ เราได้ว่า $\det A = ad - bc$ สอดคล้องกับหัวข้อที่แล้ว

**ตัวอย่าง 2.4.1** ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \det A &= 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 5(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 1((-3)(-1) - (1)(4)) + 5(-1)(0(-1) - (1)(2)) + 0((0)(4) - (-3)2) \\ &= (-1) + 10 + 0 = 9 \end{aligned}$$

ให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n$ สำหรับแต่ละ $i, j = 1, 2, \ldots, n$ เราเรียก

$$C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \det M_{ij}(A)$$

ว่า**โคแฟกเตอร์ของแถวที่ $i$ และหลักที่ $j$ ของเมทริกซ์ $A$ (($i, j$)-cofactor of $A$)** ดังนั้น

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j}(A)$$

เรียกว่า**การกระจายโคแฟกเตอร์ตามแถวที่ 1 ของเมทริกซ์ $A$ (cofactor expansion across the first row of the matrix $A$)** เราสามารถแสดงได้ว่าการกระจายโคแฟกเตอร์ตามแถวใด ๆ ของเมทริกซ์ $A$ จะมีค่าเท่ากันทั้งหมด กล่าวคือ

**ทฤษฎีบท 2.4.1** *ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $A$ หาได้จากการกระจายโคแฟกเตอร์ตามแถวใด ๆ ของเมทริกซ์ $A$ นั่นคือ*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}(A)$$

*สำหรับทุก ๆ* $i = 1, 2, \ldots, n$

สังเกตว่าเครื่องหมายบวกหรือลบของโคแฟกเตอร์ของแถวที่ $i$ และหลักที่ $j$ ของเมทริกซ์ $A$ ขึ้นกับตำแหน่งของ $a_{ij}$ ซึ่งอาจมองเครื่องหมายบวกหรือลบได้ในรูปคล้ายตารางหมากรุก

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$$

**ตัวอย่าง 2.4.2** ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ โดยการกระจายโคแฟกเตอร์ตามแถวที่ 5 จะได้ว่า

$$\det A = (-2)(-1)^{5+4} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

ซึ่งโดยการกระจายโคแฟกเตอร์ตามแถวที่ 3 ต่อ เราได้ว่า

$$\begin{aligned} &= (-2)(-1)1(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2(9) = 18 \end{aligned}$$

โดยอาศัยค่าดีเทอร์มิแนนต์ที่คำนวณได้ในตัวอย่าง 2.4.1

เราเรียกเมทริกซ์จัตุรัสซึ่งทุกสมาชิกเหนือหรือทุกสมาชิกใต้เส้นทแยงมุมหลักเป็น 0 ว่า**เมทริกซ์รูปสามเหลี่ยม (triangular matrix)** และเราได้โดยทฤษฎีบท 2.4.1 ว่า

**บทแทรก 2.4.2** *ถ้า $A$ เป็นเมทริกซ์รูปสามเหลี่ยมแล้ว $\det A$ เท่ากับผลคูณของสมาชิกทแยงมุมในเมทริกซ์ $A$*

**ตัวอย่าง 2.4.3** $\begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-4)(2)(-3)(-1) = -24$

สำหรับ $3 \times 3$ เมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ สังเกตว่า ถ้าเรานำหลักที่ 1 และหลักที่ 2 มาเขียนต่อทางขวามือของเมทริกซ์ $A$ เป็นหลักที่ 4 และ 5 ตามลำดับ เราได้ว่า

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}) \\ &= (\text{ผลบวกของผลคูณในแนวเฉียงจากซ้ายบนลงมาขวาล่าง}) \\ &\qquad - (\text{ผลบวกของผลคูณในแนวเฉียงจากซ้ายล่างขึ้นไปขวาบน}) \quad (\text{ดังรูป}) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

**ตัวอย่าง 2.4.4** กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \left| \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \\ -1 & -2 \end{matrix} \\ &= [(2-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) + 2 + 2] - [(3-\lambda) + 2(2-\lambda) + 2(2-\lambda)] \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 \end{aligned}$$

เราสรุปสมบัติเบื้องต้นของดีเทอร์มิแนนต์กับการดำเนินการแถวขั้นมูลฐานดังนี้

**ทฤษฎีบท 2.4.3** *ให้ $A$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัส จะได้ว่า*

1. $\det A = \det A^T$
2. *ถ้า $C$ เป็นเมทริกซ์ที่ได้จาก $A$ โดยการดำเนินการแถว $R_{pq}$ $(p \neq q)$ แล้ว* $\det C = -\det A$
3. *ถ้าสองแถวใด ๆ ของ $A$ เหมือนกัน แล้ว* $\det A = 0$
4. *ถ้า $C$ เป็นเมทริกซ์ที่ได้จาก $A$ โดยการดำเนินการแถว $R_p + cR_q$ $(p \neq q)$ แล้ว* $\det C = \det A$
5. *ถ้า $C$ เป็นเมทริกซ์ที่ได้จาก $A$ โดยการดำเนินการแถว $cR_p$ แล้ว* $\det C = c \det A$

และเรายังมีสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์และเมทริกซ์ไม่เอกฐานเป็น

**ทฤษฎีบท 2.4.4** *ให้ $A$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัส จะได้ว่า*

1. *$A$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน ก็ต่อเมื่อ* $\det A \neq 0$
2. *ถ้า* $\det A \neq 0$ *แล้ว* $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

อีกสมบัติที่สำคัญของดีเทอร์มิแนนต์คือดีเทอร์มิแนนต์ของผลคูณของเมทริกซ์เท่ากับผลคูณของดีเทอร์มิแนนต์ของแต่ละเมทริกซ์ กล่าวคือ

**ทฤษฎีบท 2.4.5** *ถ้า $A$ และ $B$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาดเดียวกันแล้ว*

$$\det(AB) = \det A \det B$$

เพราะฉะนั้น เรามี

**บทแทรก 2.4.6** *ให้ $A$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n$, $k$ เป็นจำนวนเต็มบวกและ $c$ เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า*

$$\det(A^k) = (\det A)^k \quad \text{และ} \quad \det(cA) = c^n \det A$$

**ตัวอย่าง 2.4.5** กำหนดให้ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$ จะได้ว่า

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} = 2(-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-2)(5) = -10$$

และ

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3(5) = 15$$

**ตัวอย่าง 2.4.6** ให้ $A, B$ และ $C$ เป็น $3 \times 3$ เมทริกซ์ซึ่ง $\det A = 2$, $\det B = 3$ และ $\det C = 4$ จะได้ว่า

$$\det(2AB^TC^{-1}) = 2^3 \det A \det B^T \det C^{-1} = 8 \det A \det B \frac{1}{\det C} = 8(2)(3)\frac{1}{4} = 12$$

ให้ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n$ และ $C_{ij}(A)$ เป็นโคแฟกเตอร์ของแถวที่ $i$ และ หลักที่ $j$ ของเมทริกซ์ $A$ เราเรียกเมทริกซ์ $[C_{ij}(A)]^T_{n\times n}$ ว่า**เมทริกซ์ผูกพัน (adjoint matrix) ของเมทริกซ์** $A$ เขียนแทนด้วย $\operatorname{adj} A$

**ตัวอย่าง 2.4.7** กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา $\operatorname{adj} A$

**วิธีทำ** คำนวณโคแฟกเตอร์สำหรับทุก ๆ ตำแหน่งดังนี้

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2,\ C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4,\ C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,\ C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2,\ C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 9,$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8,\ C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5,\ C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

ดังนั้น $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 9 \\ 8 & 5 & -12 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 8 \\ 4 & -2 & 5 \\ 3 & 9 & -12 \end{bmatrix}$ □

จากตัวอย่างข้างต้นเราสังเกตว่า

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = \begin{bmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \det A = 21$$

ซึ่งในกรณีทั่วไป เราได้ความสัมพันธ์ระหว่างเมทริกซ์ $A$ และเมทริกซ์ผูกพันของ $A$ ดังนี้

**ทฤษฎีบท 2.4.7** *สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส $A$ ขนาด $n$ เราได้ว่า*

$$A\,(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = (\det A)\, I_n$$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $\det A \neq 0$ เราอาจหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ $A$ ได้โดย

**บทแทรก 2.4.8** *ถ้า $A$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสซึ่ง $\det A \neq 0$ แล้ว*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\text{adj } A$$

**ตัวอย่าง 2.4.8** จงหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ในตัวอย่าง 2.4.7 โดยใช้เมทริกซ์ผูกพันที่คำนวณได้

**วิธีทำ** เพราะว่า $\det A = 21$ และ $\text{adj } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 8 \\ 4 & -2 & 5 \\ 3 & 9 & -12 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{21}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 8 \\ 4 & -2 & 5 \\ 3 & 9 & -12 \end{bmatrix}$ โดยบทแทรก 2.4.8 $\square$

ให้ $A$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ เราอาจใช้ดีเทอร์มิแนนต์หาผลเฉลยของสมการ $A\vec{x} = \vec{b}$ เมื่อ $\det A \neq 0$ โดย

**ทฤษฎีบท 2.4.9** [กฎของคราเมอร์ (Cramer's Rule)]
*ให้ $A$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n$ ซึ่ง $\det A \neq 0$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ จะได้ว่าผลเฉลยของสมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ คือเวกเตอร์ที่มีตำแหน่งที่ $i$ เป็น*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

*เมื่อ $A_i$ เป็นเมทริกซ์ซึ่งได้จาก $A$ โดยการแทนหลักที่ $i$ ของเมทริกซ์ $A$ ด้วยเวกเตอร์ $\vec{b}$ สำหรับทุก ๆ $i = 1, 2, \ldots, n$*

**ตัวอย่าง 2.4.9** จงใช้กฎของคราเมอร์หาผลเฉลยของระบบเชิงเส้น

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -5 \\ & & 2x_2 & - & 5x_3 & = & 2 \end{array}$$

**วิธีทำ** จากระบบเชิงเส้นที่กำหนดให้เรามีเมทริกซ์สัมประสิทธิ์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น เราได้ว่า

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -5 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}, \quad \text{และ} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

คำนวณดีเทอร์มิแนนต์ของแต่ละเมทริกซ์ได้เป็น

$$\det A = -1,\ \det A_1 = 1,\ \det A_2 = -1 \text{ และ } \det A_3 = 0$$

เพราะฉะนั้น เราได้ว่า

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = -1,\ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = 1 \text{ และ } x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = 0$$

โดยกฎของคราเมอร์จะได้ว่า $\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ เป็นผลเฉลยของระบบเชิงเส้นนี้ $\square$

## แบบฝึกหัด 2.4

1. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$
   จงหาโคแฟกเตอร์ $C_{ij}(A)$ สำหรับทุก $i, j = 1, 2, 3$ และ จงหา $\det A$ โดยการกระจายโคแฟกเตอร์ตามแถวที่ 1 ของ $A$

2. จงหาค่าของ
   (ก) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ (ข) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+1 & b+1 & c+1 \\ a-1 & b-1 & c-1 \end{vmatrix}$
   (ค) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ (ง) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

3. จงแสดงว่า $\begin{vmatrix} p+x & q+y & r+z \\ a+x & b+y & c+z \\ a+p & b+q & c+r \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

4. จงหาค่าของ $b$ เมื่อ $\begin{vmatrix} 3 & -1 & x \\ 2 & 6 & y \\ -5 & 4 & z \end{vmatrix} = ax + by + cz$

5. กำหนดให้ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$ จงหา

(ก) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -g & -h & -i \\ 3d & 3e & 3f \end{vmatrix}$ (ข) $\begin{vmatrix} 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ g & h & i \\ -2a & -2b & -2c \end{vmatrix}$

(ค) $\begin{vmatrix} g & h & i \\ 2a & 2b & 2c \\ 3d-a & 3e-b & 3f-c \end{vmatrix}$ (ง) $\begin{vmatrix} a & d & g \\ 2b & 2e & 2h \\ c-b & f-e & i-h \end{vmatrix}$

6. จงใช้ดีเทอร์มิแนนต์ตรวจสอบว่าเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 5 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 0 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ มีเมทริกซ์ผกผันหรือไม่ เพราะเหตุใด

7. ให้ $A, B, C$ เป็น $4 \times 4$ เมทริกซ์ซึ่ง $\det A = -2, \det B = 0.5$ และ $\det C = -1$ จงหา
   (ก) $\det(A^TB)$ (ข) $\det(-2CB)$ (ค) $\det(B^{-1}AB)$
   (ง) $\det(B^{-1}A^TC)$ (จ) $\det(-ABC^T)$ (ฉ) $\det((2A)^{-1}B^{-1})$

8. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$
   จงหาเมทริกซ์ผูกพันของ $A$ และจงหา $A^{-1}$ โดยใช้เมทริกซ์ผูกพันที่ได้

9. จงใช้กฎของคราเมอร์หาผลเฉลยของระบบเชิงเส้นต่อไปนี้
   (ก) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$
   (ข) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$

10. จงแสดงว่า ถ้า $A$ เป็นเมทริกซ์ซึ่ง $\det A = -\det A^T$ แล้ว $A$ ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

11. จงแสดงว่า ถ้า $U$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n$ ซึ่ง $U^TU = I_n$ แล้ว $\det U = \pm 1$

12. ให้ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
    จงแสดงว่า $\det(A + I_2) = 1 + \det A$ ก็ต่อเมื่อ $a + d = 0$

**คำตอบแบบฝึกหัด 2.1** 1.$\vec{x} = \begin{bmatrix}9\\4\\1\\0\end{bmatrix}x_3 + \begin{bmatrix}-7\\-3\\0\\1\end{bmatrix}x_4,\ x_3, x_4 \in \mathbb{R}$/อยู่; 2.$\vec{x} = \begin{bmatrix}-3\\-2\\1\\0\end{bmatrix}x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}$/ไม่อยู่;

3.(ก)$\vec{x} = \begin{bmatrix}-3\\1\\1\end{bmatrix}$, (ข)$\vec{x} = \begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}$, (ค)$\vec{x} = \begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1.5\\-0.5\\1\end{bmatrix}x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}$, (ง)$\vec{x} = \begin{bmatrix}7\\3\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-3\\-1\\1\end{bmatrix}x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}$;

5.(ก)$\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\\-2 & 1\end{bmatrix}$/1-1/ไม่ทั่วถึง, (ข)$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & -1 & 0\\-1 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$/ไม่1-1/ไม่ทั่วถึง, (ค)$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & -2\end{bmatrix}$/1-1/ทั่วถึง, (ง)$\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\0 & 9 & -2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$/ไม่1-1/ไม่ทั่วถึง;

7.(ก)$A = \begin{bmatrix}-0.5 & 0.5\\1 & 0\end{bmatrix}$/1-1/ทั่วถึง, (ข)$A = \begin{bmatrix}-0.5 & 0.5 & 0\\0.5 & 0.5 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$/ไม่1-1/ไม่ทั่วถึง

**คำตอบแบบฝึกหัด 2.2** 1.(ก)เป็น , (ข)เป็น , (ค)ไม่เป็น , (ง)ไม่เป็น;

2.(ก)$\left\{\begin{bmatrix}1\\-3\\2\\-4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\4\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\-5\\3\\-7\end{bmatrix}\right\}$, (ข)$\left\{\begin{bmatrix}-1\\4\\-7\\7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\-2\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-3\\-1\\6\end{bmatrix}\right\}$;

3.(ก)ไม่เป็น, (ข)เป็น/Span $\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$, (ค)ไม่เป็น, (ง)เป็น/Span $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$, (จ)เป็น/$\emptyset$, (ฉ)เป็น/Span $\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$;

4.(ก)$\mathrm{Col}\,A = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\7\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-6\\-4\end{bmatrix}\right\}, \mathrm{Nul}\,A = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix}16\\19\\1\end{bmatrix}\right\}$,

(ข)$\mathrm{Col}\,A = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix}3\\9\\-9\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\-4\end{bmatrix}\right\}, \mathrm{Nul}\,A = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$,

(ค)$\mathrm{Col}\,A = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-5\\2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\7\\-5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\\11\\4\end{bmatrix}\right\}, \mathrm{Nul}\,A = \{\vec{0}\}$,

(ง)$\mathrm{Col}\,A = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix}4\\6\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\5\\4\end{bmatrix}\right\}, \mathrm{Nul}\,A = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix}4\\-5\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-7\\6\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$,

(จ)$\mathrm{Col}\,A = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\3\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\2\\6\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\3\\-5\\5\end{bmatrix}\right\}, \mathrm{Nul}\,A = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix}2\\-2.5\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-7\\0.5\\0\\-4\\1\end{bmatrix}\right\}$,

(ฉ)$\mathrm{Col}\,A = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\0\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-5\\-3\\-2\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\6\\18\\8\\6\end{bmatrix}\right\}, \mathrm{Nul}\,A = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix}-10\\5\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$;

5.(ก)จริง, (ข)จริง, (ค)จริง, (ง)เท็จ, (จ)เท็จ

**คำตอบแบบฝึกหัด 2.3** 1.(ก)$\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & -2\\1 & 1\end{bmatrix}$, (ข)$-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & -4\\0 & 2\end{bmatrix}$, (ค)$-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6 & -4\\-5 & 3\end{bmatrix}$, (ง)$-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-5 & -5\\7 & 8\end{bmatrix}$;

2.(ก)$\begin{bmatrix}-\frac{14}{5}\\-\frac{3}{5}\end{bmatrix}$, (ข)$\begin{bmatrix}2\\-5\end{bmatrix}$; 3.$A^{-1}=\begin{bmatrix}-12 & 5\\5 & -2\end{bmatrix}, \vec{x_1} = \begin{bmatrix}27\\-11\end{bmatrix}, \vec{x_2} = \begin{bmatrix}-37\\15\end{bmatrix}, \vec{x_3} = \begin{bmatrix}20\\-8\end{bmatrix}, \vec{x_4} = \begin{bmatrix}-26\\11\end{bmatrix}$;

4.(ก)$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\-2 & 3 & -2\\-\frac{8}{5} & \frac{2}{5} & -1\end{bmatrix}$, (ข)$\begin{bmatrix}-40 & 16 & 9\\13 & -5 & -3\\5 & -2 & -1\end{bmatrix}$, (ค)$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\-3 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{bmatrix}$, (ง)$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\-2 & 1 & 0 & 0\\0 & -2 & 1 & 0\\8 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$,

(จ)$\begin{bmatrix}9 & 8 & -7 & -16\\0 & 3 & -2 & -3\\-2 & -1 & 1 & 3\\1 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$, (ฉ)$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$; 5.$\vec{x} = \begin{bmatrix}4\\1\\10\end{bmatrix}$;

6.(ก) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & -1.5 \\ 1 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$/rank $A = 2$, (ข) $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} -5 & 0 & -15 & 10 \\ -5 & 0 & -5 & 6 \\ 5 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 10 & 10 & -10 \end{bmatrix}$/rank $A = 3$; 7. $\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -6 \end{bmatrix}$

**คำตอบแบบฝึกหัด 2.4** 1.($C_{11} = -8, C_{12} = -3, C_{13} = 1, C_{21} = 0, C_{22} = 6, C_{23} = -2, C_{31} = 8, C_{32} = -1, C_{33} = -5$);
2.(ก)1, (ข)0, (ค)$-2$, (ง)$-2$; 4.$b = -7$; 5.(ก)12, (ข)$-8$, (ค)24, (ง)8; 6.($\det A = 0$, ไม่มี $A^{-1}$);
7.(ก)$-1$, (ข)$-8$, (ค)$-2$, (ง)4, (จ)1, (ฉ)$-\frac{1}{16}$; 8.adj $A$= $\begin{bmatrix} 7 & -8 & 5 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$/$\det A = 1$; 9.(ก) $\vec{x} = \begin{bmatrix} 13/11 \\ 1/11 \\ 48/11 \end{bmatrix}$, (ข) $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

# บทที่ 3

# ค่าเฉพาะและเวกเตอร์เฉพาะ

## 3.1 เมทริกซ์สำหรับการแปลงเชิงเส้นและการเปลี่ยนฐานหลัก

ให้ $H$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^m$ และ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $H$ นั่นคือเซต $\mathcal{B}$ แผ่ทั่ว $H$ และ $\mathcal{B}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น ทำให้สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{x} \in H$ จะมีจำนวนจริง $c_1, c_2, \ldots, c_p$ เพียงชุดเดียวที่ทำให้ $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_p\vec{v}_p$ เราเรียกเวกเตอร์

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$$

ว่า**เวกเตอร์พิกัดของ $\vec{x}$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก** $\mathcal{B}$ **(coordinate vector of $\vec{x}$ relative to** $\mathcal{B}$**)** และ เรียก $c_1, c_2, \ldots, c_p$ ว่า**พิกัดที่ $i$ ของ $\vec{x}$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก** $\mathcal{B}$ **($i^{\text{th}}$-coordinates of $\vec{x}$ relative to** $\mathcal{B}$**)** สังเกตว่าสำหรับเวกเตอร์ $\vec{x}, \vec{y} \in H$ และจำนวนจริง $c$ เรามี

$$[\vec{x} + \vec{y}]_{\mathcal{B}} = [\vec{x}]_{\mathcal{B}} + [\vec{y}]_{\mathcal{B}} \quad \text{และ} \quad [c\vec{x}]_{\mathcal{B}} = c[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$$

**ตัวอย่าง 3.1.1** ให้ $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ ดังนั้น $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $H = \text{Span}\,\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ จงตรวจสอบว่า $\vec{x} \in H$ หรือไม่ ถ้าอยู่ จงหาเวกเตอร์พิกัดของ $\vec{x}$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$

**วิธีทำ** โดยบทแทรก 1.4.2 ในการตรวจสอบว่า $\vec{x}$ อยู่ใน $H$ เราจะพิจารณาว่าสมการเวกเตอร์ $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = \vec{x}$ มีผลเฉลยหรือไม่ โดยดำเนินการแถวกับเมทริกซ์แต่งเติมจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดเป็น

$$\left[\begin{array}{cc|c} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{x} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -5 \\ 1 & -4 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ดังนั้นสมการเวกเตอร์ $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = \vec{x}$ มีผลเฉลย ส่งผลให้ $\vec{x} \in H$
เราจึงใช้การดำเนินการแถวต่อไปจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปเป็น

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{ซึ่งสมนัยกับผลเฉลย} \quad \begin{array}{rcr} c_1 & = & 2 \\ c_2 & = & -1 \end{array}$$

นั่นคือ $\vec{x} = 2\vec{v}_1 + (-1)\vec{v}_2$ เพราะฉะนั้น $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ □

ให้ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^n$ และ $\mathcal{C} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^m$ กำหนด $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ เป็นการแปลงเชิงเส้น เราเรียก $m \times n$ เมทริกซ์ซึ่งมีหลักที่ $j$ เป็นเวกเตอร์พิกัด $[T(\vec{v}_j)]_{\mathcal{C}}$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{C}$ สำหรับทุก ๆ $j = 1, 2, \ldots, n$ ว่า**เมทริกซ์สำหรับ $T$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$ และ $\mathcal{C}$ (matrix for $T$ relative to the bases $\mathcal{B}$ and $\mathcal{C}$)** เขียนแทนด้วย $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ นั่นคือ

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \Big[[T(\vec{v}_1)]_{\mathcal{C}} \quad [T(\vec{v}_2)]_{\mathcal{C}} \quad \ldots \quad [T(\vec{v}_n)]_{\mathcal{C}}\Big]$$

สังเกตว่า สำหรับแต่ละเวกเตอร์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ เราได้ว่า $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n$
ดังนั้น $T(\vec{x}) = c_1T(\vec{v}_1) + c_2T(\vec{v}_2) + \cdots + c_nT(\vec{v}_n)$
เพราะฉะนั้น

$$[T(\vec{x})]_{\mathcal{C}} = c_1[T(\vec{v}_1)]_{\mathcal{C}} + c_2[T(\vec{v}_2)]_{\mathcal{C}} + \cdots + c_n[T(\vec{v}_n)]_{\mathcal{C}}$$

นั่นคือ

$$[T(\vec{x})]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}[\vec{x}]_{\mathcal{B}} \tag{3.1.1}$$

สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ในกรณีที่ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ เป็นการแปลงเชิงเส้นและ $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ เราเขียนแทน $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ ด้วย $[T]_{\mathcal{B}}$ และเรียกว่า**เมทริกซ์สำหรับ $T$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$ (matrix for $T$ relative to the basis $\mathcal{B}$)**

$$\begin{tikzcd} \vec{x} \arrow[r, "T"] \arrow[d] & T(\vec{x}) \arrow[d] \\ {[\vec{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "{[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\times}"] & {[T(\vec{x})]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}[\vec{x}]_{\mathcal{B}}} \end{tikzcd}$$

**ตัวอย่าง 3.1.2** ให้ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^2$ และ $\mathcal{C} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^3$ ถ้า $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่ง

$$T(\vec{v}_1) = 3\vec{w}_1 - \vec{w}_2 + 5\vec{w}_3 \quad \text{และ} \quad T(\vec{v}_2) = \vec{w}_2 - 4\vec{w}_3$$

จงหาเมทริกซ์สำหรับ $T$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$ และ $\mathcal{C}$

**วิธีทำ** จากที่กำหนดให้ จะได้ $[T(\vec{v}_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ และ $[T(\vec{v}_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

ดังนั้น เราได้ว่า $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ $\square$

**ตัวอย่าง 3.1.3** ให้ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^3$ และ $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่งมี $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ จงหา $T(2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3)$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $[2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ทำให้ได้ว่า

$$[T(2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $T(2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3) = -2\vec{v}_1 - 12\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3$ $\square$

เราสามารถแสดงได้ว่าการประกอบของการแปลงเชิงเส้นนั้นจะเป็นการแปลงเชิงเส้นด้วย และ ได้ความสัมพันธ์ของเมทริกซ์สัมพัทธ์กับฐานหลักต่าง ๆ ดังนี้

**ทฤษฎีบท 3.1.1** *ให้ $n$, $m$ และ $p$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ และ $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ เป็นการแปลงเชิงเส้น จะได้ว่า*

1. *$T \circ S$ เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก $\mathbb{R}^n$ ไป $\mathbb{R}^p$*
2. *ถ้า $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^m$ และ $\mathcal{D}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^p$ แล้ว*

$$[T \circ S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} [S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

*ยิ่งกว่านั้น ถ้า $n = m = p$ และ $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{D}$ แล้ว $[T \circ S]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{B}}$*

จากทฤษฎีบทข้างต้นทำให้ได้ว่า

**บทแทรก 3.1.2** *ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวก $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ เป็นการแปลงเชิงเส้น และ $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^n$ จะได้ว่า*

1. *ถ้า $T$ หาตัวผกผันได้ (มี $T^{-1}$) แล้ว $[T]_{\mathcal{B}}$ จะเป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานโดยที่ $[T]_{\mathcal{B}}^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}$*
2. *ถ้า $[T]_{\mathcal{B}}$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน แล้ว $T$ จะหาตัวผกผันได้ (มี $T^{-1}$) และ $[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{-1}$*

ให้ $H$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^m$ และให้ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ และ $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_p\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $H$ พิจารณาการแปลงเชิงเส้นเอกลักษณ์ $I : H \to H$ ซึ่งกำหนดโดย $I(\vec{x}) = \vec{x}$ สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{x} \in H$ จากสมการ 3.1.1 จะได้ว่า

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}'} = [I(\vec{x})]_{\mathcal{B}'} = [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} [\vec{x}]_{\mathcal{B}} \quad \text{สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ } \vec{x} \in H$$

เราเรียกเมทริกซ์ $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ ว่า**เมทริกซ์การเปลี่ยนพิกัดจาก $\mathcal{B}$ ไป $\mathcal{B}'$ (change-of-coordinates matrix from $\mathcal{B}$ to $\mathcal{B}'$)** ซึ่งตำราส่วนใหญ่นิยมใช้สัญลักษณ์ $P = \underset{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}{P}$

สังเกตว่า เรายังได้ด้วยว่า

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = [I(\vec{x})]_{\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}[\vec{x}]_{\mathcal{B}'} \quad \text{สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ } \vec{x} \in H$$

เพราะฉะนั้น

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}[\vec{x}]_{\mathcal{B}} \quad \text{และ} \quad [\vec{x}]_{\mathcal{B}'} = [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}[\vec{x}]_{\mathcal{B}'} \quad \text{สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ } \vec{x} \in H$$

ทำให้สรุปได้ว่า

$$[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = I_p = [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$$

ดังนั้น เมทริกซ์ $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ และเมทริกซ์ $[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ เป็นเมทริกซ์ผกผันของกันและกัน

**ทฤษฎีบท 3.1.3** *ให้ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ และ $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_p\}$ เป็นฐานหลักสำหรับปริภูมิย่อย $H$ จะได้ว่ามีเมทริกซ์ไม่เอกฐาน $\underset{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}{P}$ ขนาด $p$ กำหนดโดย*

$$\underset{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}{P} = [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} [\vec{v}_1]_{\mathcal{B}'} & [\vec{v}_2]_{\mathcal{B}'} & \ldots & [\vec{v}_p]_{\mathcal{B}'} \end{bmatrix}$$

*ที่ทำให้*

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}'} = \underset{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}{P}[\vec{x}]_{\mathcal{B}} \quad \text{สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ } \vec{x} \in H$$

**ตัวอย่าง 3.1.4** จงแสดงว่า $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^3$ และจงหาเมทริกซ์การเปลี่ยนพิกัดจากฐานหลักมาตรฐาน $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ไป $\mathcal{B}'$ พร้อมทั้งหา $[\vec{x}]_{\mathcal{B}'}$ เมื่อ $\vec{x} = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$

**วิธีทำ** ให้ $A = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ เราได้โดยง่ายว่า $\det A = -1 \neq 0$
ทำให้ $A$ หาเมทริกซ์ผกผันได้ จึงได้โดยทฤษฎีบท 2.3.6 ว่า $\mathcal{B}'$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^3$
ต่อมาให้ $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$
และเขียน $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ในรูปการรวมเชิงเส้นของ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ ได้เป็น

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= 0\cdot\vec{v}_1 + 0\cdot\vec{v}_2 + 1\cdot\vec{v}_3\\
\vec{e}_2 &= 0\cdot\vec{v}_1 + 1\cdot\vec{v}_2 + (-1)\vec{v}_3\\
\vec{e}_3 &= 1\cdot\vec{v}_1 + (-1)\cdot\vec{v}_2 + 0\cdot\vec{v}_3
\end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า

$$[\vec{e}_1]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [\vec{e}_2]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad [\vec{e}_3]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น เมทริกซ์การเปลี่ยนพิกัดจาก $\mathcal{B}$ ไป $\mathcal{B}'$ คือ $\underset{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

เห็นชัดว่า $\vec{x} = 1\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$ ทำให้ $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $[\vec{x}]_{\mathcal{B}'} = P[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ □

จากทฤษฎีบท 3.1.1 และบทแทรก 3.1.2 เราสรุปได้ว่า

**บทแทรก 3.1.4** *ให้ $\mathcal{B}$ และ $\mathcal{B}'$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^n$ และ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ เป็นการแปลงเชิงเส้น แล้ว*

$$[T]_{\mathcal{B}'} = [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \left(\underset{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}{P}\right)^{-1}[T]_{\mathcal{B}}\underset{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}{P}$$

**ตัวอย่าง 3.1.5** ให้ $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ เป็นการแปลงเชิงเส้นที่มีเมทริกซ์มาตรฐานเป็น $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

จงหา $[T]_{\mathcal{B}'}$ โดยที่ $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

**วิธีทำ** ให้ $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ เป็นฐานหลักมาตรฐานสำหรับ $\mathbb{R}^3$ ดังนั้น $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

เนื่องจาก $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักมาตรฐาน เราจึงหา $\underset{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}{P}$ ได้โดยง่าย กล่าวคือ $\underset{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ซึ่งเราหาตัวผกผันได้เป็น $\left(\underset{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}{P}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ทำให้ได้โดยบทแทรกข้างต้นว่า

$$[T]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ตามต้องการ □

## แบบฝึกหัด 3.1

1. กำหนดเวกเตอร์ $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ และ $\vec{x}$ ถ้า $H$ เป็นปริภูมิย่อยที่มีฐานหลักเป็น $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ และ $\vec{x} \in H$ จงหาเวกเตอร์พิกัดของ $\vec{x}$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$

   (ก) $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{bmatrix}-2\\7\end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix}-3\\7\end{bmatrix}$ (ข) $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}$

   (ค) $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix}3\\6\\2\end{bmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix}3\\12\\7\end{bmatrix}$ (ง) $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\5\\-3\end{bmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{bmatrix}3\\7\\-5\end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$

2. จงแสดงว่า $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^3$ และ จงหาเมทริกซ์การเปลี่ยนพิกัดจากฐานหลักมาตรฐาน $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ไป $\mathcal{B}'$ พร้อมทั้งหา $[\vec{v}]_{\mathcal{B}'}$ เมื่อ $\vec{v} = \begin{bmatrix}0\\3\\3\end{bmatrix}$

3. ให้ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ และ $\mathcal{C} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^2$ โดยที่ $\vec{v}_1 = 4\vec{w}_1 - \vec{w}_2$ และ $\vec{v}_2 = -6\vec{w}_1 + \vec{w}_2$ จงหาเมทริกซ์ของการเปลี่ยนพิกัดจาก $\mathcal{B}$ ไป $\mathcal{C}$ และถ้า $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ จงหา $[\vec{x}]_{\mathcal{C}}$

4. ให้ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ และ $\mathcal{C} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^2$ โดยที่

$$\vec{v}_1 = 2\vec{w}_1 - \vec{w}_2 + \vec{w}_3, \vec{v}_2 = 3\vec{w}_2 + \vec{w}_3 \quad \text{และ} \quad \vec{v}_3 = -3\vec{w}_1 + 2\vec{w}_2$$

   จงหาเมทริกซ์ของการเปลี่ยนพิกัดจาก $\mathcal{C}$ ไป $\mathcal{B}$ และเวกเตอร์พิกัด $[\vec{w}_1 - 2\vec{w}_2 + 2\vec{w}_3]_{\mathcal{B}}$

5. ให้ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^3$ และ $\mathcal{C} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^2$ ถ้า $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่ง

$$T(\vec{v}_1) = 2\vec{w}_1 - \vec{w}_2,\ T(\vec{v}_2) = \vec{w}_2 - 4\vec{w}_1 \quad \text{และ} \quad T(\vec{v}_3) = -\vec{w}_2$$

   จงหาเมทริกซ์สำหรับ $T$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$ และ $\mathcal{C}$

6. ให้ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้น ซึ่งกำหนดโดย

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 - 3x_2)$$

   จงหาเมทริกซ์สำหรับ $T$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$ และ $\mathcal{C}$ เมื่อ

   (ก) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \right\}$ และ $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} \right\}$

   (ข) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix} \right\}$ และ $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} \right\}$

7. ให้ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ และ $\mathcal{C} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^2$ จงหาเมทริกซ์ของการเปลี่ยนพิกัดจาก $\mathcal{B}$ ไป $\mathcal{C}$ และเมทริกซ์ของการเปลี่ยนพิกัดจาก $\mathcal{C}$ ไป $\mathcal{B}$ เมื่อ

   (ก) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}-3\\-1\end{bmatrix}, \vec{w}_1 = \begin{bmatrix}1\\-5\end{bmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$

   (ข) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}-1\\8\end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\-5\end{bmatrix}, \vec{w}_1 = \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

   (ค) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}-6\\-1\end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}, \vec{w}_1 = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{bmatrix}6\\-2\end{bmatrix}$

8. ให้ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^3$ และ $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่ง

$$T(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3) = (2x_1 - 4x_2 + 5x_3, -x_2 + 3x_3)$$

จงหาเมทริกซ์สำหรับ $T$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$ และฐานหลักมาตรฐาน $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ สำหรับ $\mathbb{R}^2$

9. ให้ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^3$ และ $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่งมี $[T]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ จงหา $T(\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - 3\vec{v}_3)$

10. ให้ $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ เป็นการแปลงเชิงเส้น กำหนดโดย
$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2 + x_3, x_2 - x_3)$$
จงหาเมทริกซ์สำหรับ $T$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ และเวกเตอร์พิกัด $[\vec{x}]_\mathcal{B}$ และ $[T(\vec{x})]_\mathcal{B}$ เมื่อ $\vec{x} = (-1, 4, 0)$

11. ให้ $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ เป็นการแปลงเชิงเส้น กำหนดโดย
$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3 - x_4, 2x_1 - x_3, x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4, x_3 - x_4)$$
จงหาเมทริกซ์สำหรับ $T$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ และเวกเตอร์พิกัด $[\vec{x}]_\mathcal{B}$ และ $[T(\vec{x})]_\mathcal{B}$ เมื่อ $\vec{x} = (2, -1, 2, 3)$

12. ให้ $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่งมีเมทริกซ์มาตรฐาน $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ และให้ $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์สำหรับ $T$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, เมทริกซ์สำหรับ $T$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ และเวกเตอร์พิกัด $[T(\vec{x})]_{\mathcal{B}_1}$ และ $[T(\vec{x})]_{\mathcal{B}_2}$ พร้อมทั้งเมทริกซ์การเปลี่ยนพิกัดจาก $\mathcal{B}_2$ ไป $\mathcal{B}_1$ และเมทริกซ์สำหรับ $T$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}_1$ และ $\mathcal{B}_2$

## 3.2 ค่าเฉพาะ เวกเตอร์เฉพาะ และการแปลงเป็นทแยงมุม

### 3.2.1 ค่าเฉพาะ และ เวกเตอร์เฉพาะ

ให้ $A$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n$ เราเรียกจำนวนจริง $\lambda$ ว่า**ค่าเฉพาะ (eigenvalue or characteristic value) ของเมทริกซ์** $A$ ถ้าระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ มีผลเฉลยไม่ชัด และ เราเรียกผลเฉลยนี้ว่า**เวกเตอร์เฉพาะของเมทริกซ์** $A$ **ซึ่งสมนัยกับ** $\lambda$ **(eigenvector or characteristic vector corresponding to** $\lambda$**)**

**ตัวอย่าง 3.2.1** ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ จงพิจารณาว่า

(ก) 1 เป็นค่าเฉพาะของ $A$ หรือไม่

(ข) เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์เฉพาะของ $A$ หรือไม่ ถ้าเป็นจงหาค่าเฉพาะซึ่งสมนัยกับเวกเตอร์นี้

**วิธีทำ** (ก) เนื่องจากระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \vec{x}$ สมมูลกับสมการเอกพันธุ์ $(A - I_2)\vec{x} = \vec{0}$ และ

$$\det(A - I_2) = \begin{vmatrix} 2-1 & 1-0 \\ 4-0 & 2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

ดังนั้น สมการเอกพันธุ์ $(A - I_2)\vec{x} = \vec{0}$ มีเพียงผลเฉลยชัด
ทำให้ได้ว่า 1 ไม่เป็นค่าเฉพาะของ $A$
(ข) เพราะว่า

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้นเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์เฉพาะของ $A$
ซึ่งสมนัยกับค่าเฉพาะ $\lambda = 4$ $\square$

ให้ $A$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n$ และ $\lambda$ เป็นจำนวนจริง สังเกตว่าระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ สมมูลกับสมการเอกพันธุ์ $(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}_n$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 2.3.6 และทฤษฎีบท 2.4.4 เราได้ว่า

| | | |
|---|---|---|
| $\lambda$ เป็นค่าเฉพาะของ $A$ | ก็ต่อเมื่อ | $(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}_n$ มีผลเฉลยไม่ชัด |
| | ก็ต่อเมื่อ | $(A - \lambda I_n)$ ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน |
| | ก็ต่อเมื่อ | $\det(A - \lambda I_n) = 0$ |

เราเรียกสมการ $\det(A - \lambda I_n) = 0$ ว่า**สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) ของเมทริกซ์** $A$ ซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญในการหาค่าเฉพาะของเมทริกซ์ $A$ และเรียก $\det(A - \lambda I_n)$ ซึ่งเป็นพหุนามที่มีดีกรี $n$ ว่า**พหุนามลักษณะเฉพาะ (characteristic polynomial) ของเมทริกซ์** $A$

ต่อไปเรากำหนดให้

$$A_\lambda = \text{Nul}\,(A - \lambda I_n) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}_n\}$$

เพราะฉะนั้น ถ้า $\lambda$ เป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ $A$ แล้ว $A_\lambda$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$ ซึ่งประกอบด้วย $\vec{0}_n$ และเวกเตอร์เฉพาะของ $A$ ทั้งหมดซึ่งสมนัยกับ $\lambda$ เรียกว่า**ปริภูมิเฉพาะของเมทริกซ์ $A$ ซึ่งสมนัยกับ $\lambda$ (eigenspace of $A$ corresponding to $\lambda$)** สังเกตว่า ถ้า $\lambda$ ไม่เป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ $A$ แล้ว $A_\lambda = \{\vec{0}_n\}$

**ตัวอย่าง 3.2.2** กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ จงหาสมการลักษณะเฉพาะ ค่าเฉพาะ และฐานหลักสำหรับปริภูมิเฉพาะซึ่งสมนัยกับแต่ละค่าเฉพาะที่หาได้

**วิธีทำ** เนื่องจาก

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(8-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 11\lambda + 18$$

ดังนั้น สมการลักษณะเฉพาะของ $A$ คือ $\lambda^2 - 11\lambda + 18 = 0$
เพราะว่า $\lambda^2 - 11\lambda + 18 = (\lambda - 2)(\lambda - 9)$ ทำให้ได้ว่าค่าเฉพาะของ $A$ คือ $\lambda = 2, 9$

ต่อมา เราจะหาปริภูมิเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าเฉพาะแต่ละค่าโดยใช้วิธีที่ได้ศึกษาไว้แล้วในหัวข้อ 2.2 ดังนี้

$\lambda = 2$ เราได้

$$A - 2I_2 = \begin{bmatrix} 3-2 & 2 \\ 3 & 8-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $x_1 + 2x_2 = 0$ ทำให้ได้ว่า $x_1 = -2x_2$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

ทำให้ได้ว่า $A_2 = \text{Nul}\,(A - 2I_2) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักเป็น $\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\lambda = 4$ เราได้

$$A - 4I_2 = \begin{bmatrix} 3-9 & 2 \\ 3 & 8-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $x_1 - \frac{1}{3}x_2 = 0$ ทำให้ได้ว่า $x_1 = \frac{1}{3}x_2$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

ทำให้ได้ว่า $A_4 = \text{Nul}\,(A - 4I_2) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักเป็น $\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ $\square$

**หมายเหตุ** สำหรับ $\lambda = 4$ เราอาจใช้ $x_1$ เป็นตัวแปรเสรีเพื่อหลีกเลี่ยงเศษส่วน

โดยเขียน $x_2 = 3x_1$ ทำให้ได้ว่า $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 3x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A_4 = \text{Nul}\,(A - 4I_2) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักเป็น $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$

**ตัวอย่าง 3.2.3** จงหาสมการลักษณะเฉพาะ ค่าเฉพาะ และฐานหลักสำหรับปริภูมิเฉพาะของเมทริกซ์ $A$ ซึ่งสมนัยกับแต่ละค่าเฉพาะที่หาได้ เมื่อกำหนดให้

(ก) $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$

**วิธีทำ** เนื่องจาก

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4$$

ดังนั้น สมการลักษณะเฉพาะของ $A$ คือ $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$

เพราะว่า $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ ทำให้ได้ว่าค่าเฉพาะของ $A$ คือ $\lambda = 1, 2, 2$

ต่อมา เราจะหาปริภูมิเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าเฉพาะแต่ละค่าดังนี้

$\lambda = 1$ เราได้

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 5-1 & -6 & -6 \\ -1 & 4-1 & 2 \\ 3 & -6 & -4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

ซึ่งใช้การดำเนินการแถวลดรูปให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น} \quad \begin{array}{ccccc} x_1 & - & x_3 & = & 0 \\ x_2 & + & \frac{1}{3}x_3 & = & 0 \end{array}$$

ทำให้ได้ว่า $\quad x_1 = x_3 \quad$ และ $\quad x_2 = -\frac{1}{3}x_3$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ -\frac{1}{3}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A_1 = \text{Nul}\,(A - I_3) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

$\lambda = 2$ เราได้

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 5-2 & -6 & -6 \\ -1 & 4-2 & 2 \\ 3 & -6 & -4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

ซึ่งใช้การดำเนินการแถวลดรูปให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น} \quad x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$$

ทำให้ได้ว่า $\quad x_1 = 2x_2 + 2x_3$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 + 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A_2 = \text{Nul}\,(A - 2I_3) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ $\quad\square$

(ข) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

**วิธีทำ** เนื่องจาก

$$\det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4$$

ดังนั้น สมการลักษณะเฉพาะของ $A$ คือ $-\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4=0$
เพราะว่า $-\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4=-(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ ทำให้ได้ว่าค่าเฉพาะของ $A$ คือ $\lambda=1,2,2$

ต่อมา เราจะหาปริภูมิเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าเฉพาะแต่ละค่าดังนี้
$\lambda=1$ เราได้

$$A-I_3 = \begin{bmatrix} 3-1 & 1 & -1 \\ 2 & 2-1 & -1 \\ 2 & 2 & 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งใช้การดำเนินการแถวลดรูปให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น} \quad \begin{aligned} x_1-\tfrac{1}{2}x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $x_1=\frac{1}{2}x_3$ และ $x_2=0$
เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
ดังนั้น $A_1 = \mathrm{Nul}\,(A-I_3) = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$
และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$
$\lambda=2$ เราได้

$$A-2I_3 = \begin{bmatrix} 3-2 & 1 & -1 \\ 2 & 2-2 & -1 \\ 2 & 2 & 0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

ซึ่งใช้การดำเนินการแถวลดรูปให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น} \quad \begin{aligned} x_1 + \tfrac{1}{2}x_3 &= 0 \\ x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $x_1=-\frac{1}{2}x_3$ และ $x_2=\frac{1}{2}x_3$
เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_3 \\ \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A_2 = \operatorname{Nul}(A - 2I_3) = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ $\square$

เราสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์เฉพาะของเมทริกซ์ $A$ ซึ่งสมนัยกับค่าเฉพาะที่ต่าง ๆ กัน ดังนี้

**ทฤษฎีบท 3.2.1** *ถ้า $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r$ เป็นเวกเตอร์เฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าเฉพาะ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ ที่แตกต่างกันของเมทริกซ์ $A$ แล้วเซต $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น*

สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส $A$ และ $B$ ขนาด $n$ เรากล่าวว่า**เมทริกซ์ $A$ คล้าย (similar) กับเมทริกซ์** $B$ ถ้ามีเมทริกซ์ไม่เอกฐาน $P$ ขนาด $n$ ที่ทำให้ $B = P^{-1}AP$ สังเกตว่าถ้าเมทริกซ์ $A$ คล้ายกับเมทริกซ์ $B$ แล้ว $\det A = \det B$ และ

$$\det(B - \lambda I_n) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}I_nP) = \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) = \det(A - \lambda I_n)$$

เพราะฉะนั้น

**ทฤษฎีบท 3.2.2** *ถ้า $A$ และ $B$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n$ ซึ่งคล้ายกันแล้ว $A$ และ $B$ มีพหุนามลักษณะเฉพาะเหมือนกัน ดังนั้น $A$ และ $B$ มีค่าเฉพาะชุดเดียวกัน*

เราได้ข้อสังเกตที่สำคัญจากตัวอย่าง 3.2.3 ว่า เมทริกซ์ที่มีพหุนามลักษณะเฉพาะเดียวกันไม่จำเป็นต้องคล้ายกัน

### 3.2.2 การแปลงเป็นทแยงมุม

ให้ $A$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n$ เราจะศึกษาว่าเมื่อใดเมทริกซ์ $A$ จะคล้ายกับเมทริกซ์ทแยงมุม $D$ นั่นคือมีเมทริกซ์ไม่เอกฐาน $P$ ขนาด $n$ ซึ่ง $A = PDP^{-1}$ ส่งผลให้

$$A^k = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\ldots(PDP^{-1}) = PD^kP^{-1}$$

โดยสำหรับเมทริกซ์ทแยงมุม

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

เราได้ว่า

$$D^k = \begin{bmatrix} d_{11}^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_{22}^k & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_{nn}^k \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$A^k = P \begin{bmatrix} d_{11}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22}^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn}^k \end{bmatrix} P^{-1}$$

สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก $k$ ทำให้เราสามารถคำนวณค่าของ $A^k$ ได้อย่างรวดเร็ว

เมทริกซ์จัตุรัส $A$ **สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้ (diagonalizable)** ก็ต่อเมื่อเมทริกซ์ $A$ คล้ายกับเมทริกซ์ทแยงมุม

สังเกตว่าหากเมทริกซ์ $A$ มิติ $n \times n$ คล้ายกับเมทริกซ์ทแยงมุม $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ จะได้ว่ามีเมทริกซ์ไม่เอกฐาน $P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$ ที่ทำให้ $AP = PD$ ดังนั้น

$$A \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A\vec{v}_1 & A\vec{v}_2 & \dots & A\vec{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\vec{v}_1 & \lambda_2\vec{v}_2 & \dots & \lambda_n\vec{v}_n \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $A\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i$ นั่นคือ แต่ละหลัก $\vec{v}_i$ ของ $P$ เป็นเวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะ $\lambda_i$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ และเนื่องจาก $P$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน จึงได้ด้วยว่าเวกเตอร์เฉพาะในหลักของเมทริกซ์ $P$ นั้นต้องเป็นอิสระเชิงเส้น

เราได้เกณฑ์การตรวจสอบการแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้และวิธีการหาเมทริกซ์ทแยงมุม $D$ และเมทริกซ์ไม่เอกฐาน $P$ โดยอาศัยค่าเฉพาะและเวกเตอร์เฉพาะ ดังนี้

**ทฤษฎีบท 3.2.3** [ทฤษฎีบทการแปลงเป็นทแยงมุม (Diagonalization Theorem)]
*เมทริกซ์จัตุรัส $A$ ขนาด $n$ สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ นั่นคือมีเมทริกซ์ไม่เอกฐาน $P$ และเมทริกซ์ทแยงมุม $D$ ซึ่ง $A = PDP^{-1}$ ก็ต่อเมื่อ เมทริกซ์ $A$ มีเวกเตอร์เฉพาะซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้น $n$ ตัว โดยเราได้ว่าหลักของเมทริกซ์ $P$ คือ เวกเตอร์เฉพาะซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้น $n$ ตัวนี้ และสมาชิกทแยงมุมของเมทริกซ์ $D$ คือค่าเฉพาะของเมทริกซ์ $A$ ที่สมนัยตามลำดับกับเวกเตอร์เฉพาะในเมทริกซ์ $P$*

**ตัวอย่าง 3.2.4** จงแปลงเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม นั่นคือ จงหาเมทริกซ์ไม่เอกฐาน $P$ และเมทริกซ์ทแยงมุม $D$ ที่ทำให้ $A = PDP^{-1}$ พร้อมทั้งหาสูตรสำหรับ $A^k$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก $k$

**วิธีทำ** เนื่องจาก

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(1-\lambda) + 8 = \lambda^2 - 8\lambda + 15$$

ดังนั้น สมการลักษณะเฉพาะของ $A$ คือ $\lambda^2 - 8\lambda + 15 = (\lambda - 3)(\lambda - 5) = 0$
ทำให้ได้ว่าค่าเฉพาะของ $A$ คือ $\lambda = 3, 5$

ต่อมา เราจะหาปริภูมิเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าเฉพาะแต่ละค่าดังนี้

$\lambda = 3$ เราได้

$$A - 3I_2 = \begin{bmatrix} 7-3 & 2 \\ -4 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

ซึ่งใช้การดำเนินการแถวลดรูปให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น } x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 = 0 \text{ ทำให้ได้ว่า } x_1 = -\tfrac{1}{2}x_2$$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A_3 = \text{Nul}\,(A - 3I_2) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

$\lambda = 5$ เราได้

$$A - 5I_2 = \begin{bmatrix} 7-5 & 2 \\ -4 & 1-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

ซึ่งใช้การดำเนินการแถวลดรูปให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น } x_1 + x_2 = 0 \text{ ทำให้ได้ว่า } x_1 = -x_2$$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A_5 = \text{Nul}\,(A - 5I_2) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 3.2.3 เราได้ว่า $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ และ $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

เพราะว่า $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ และทำให้เราได้

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$A^k = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 5^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3^k + 2 \cdot 5^k & -3^k + 5^k \\ 2 \cdot 3^k - 2 \cdot 5^k & 2 \cdot 3^k - 5^k \end{bmatrix}$$

สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก $k$ $\square$

โดยทฤษฎีบท 3.2.1 และทฤษฎีบท 3.2.3 เราได้

**บทแทรก 3.2.4** *ถ้า $A$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n$ ซึ่งมีค่าเฉพาะแตกต่างกัน $n$ ค่าแล้ว $A$ สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้*

ในกรณีที่ค่าเฉพาะของเมทริกซ์ $A$ มีค่าไม่แตกต่างกันทั้งหมด นั่นคือ สมการลักษณะเฉพาะของ $A$ มีรากบางรากซ้ำกัน เราสามารถแสดงได้ว่า

**ทฤษฎีบท 3.2.5** *ให้ $A$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n$ ซึ่งมีค่าเฉพาะที่แตกต่างกัน คือ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$*

1. *มิติของปริภูมิเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าเฉพาะ $\lambda_k$ มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับจำนวนการซ้ำกันของค่าเฉพาะ $\lambda_k$ สำหรับทุก $k = 1, 2, \ldots, p$ นั่นคือ $\operatorname{nullity}(A - \lambda_k I_n) \leq$ จำนวนการซ้ำกันของ $\lambda_k$ สำหรับทุก $k = 1, 2, \ldots, p$*
2. *เมทริกซ์ $A$ สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้*
   *ก็ต่อเมื่อ ผลรวมของมิติของปริภูมิเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ $A$ มีค่าเท่ากับ $n$*
   *ก็ต่อเมื่อ $\operatorname{nullity}(A - \lambda_k I_n)$ มีค่าเท่ากับจำนวนการซ้ำกันของ $\lambda_k$ สำหรับทุก $k = 1, 2, \ldots, p$*
3. *ถ้า $A$ สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้และ $\mathcal{B}_k$ เป็นฐานหลักสำหรับปริภูมิเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าเฉพาะ $\lambda_k$ สำหรับทุก $k = 1, 2, \ldots, p$ แล้ว $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^n$*

**ตัวอย่าง 3.2.5** จงพิจารณาว่าเมทริกซ์ในตัวอย่าง 3.2.3 สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

(ก) $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$

**วิธีทำ** จากตัวอย่าง 3.2.3 (ก) เราได้ว่า

| ค่าเฉพาะ | ปริภูมิเฉพาะ | มิติของปริภูมิเฉพาะ |
|---|---|---|
| $\lambda = 1$ | $\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$ | 1 |
| $\lambda = 2, 2$ | $\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ | 2 |

โดยทฤษฎีบท 3.2.5 เราสรุปได้ว่า $A$ สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้

และเรามี $A = PDP^{-1}$ โดยที่ $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ และ $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ □

(ข) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

**วิธีทำ** จากตัวอย่าง 3.2.3 (ข) เราได้ว่า

| ค่าเฉพาะ | ปริภูมิเฉพาะ | มิติของปริภูมิเฉพาะ |
|---|---|---|
| $\lambda = 1$ | $\text{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}\right\}$ | 1 |
| $\lambda = 2, 2$ | $\text{Span}\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$ | 1 |

ดังนั้นการซ้ำกันของค่าเฉพาะ 2 มีค่ามากกว่ามิติของปริภูมิเฉพาะ
เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 3.2.5 เราได้ว่า $A$ ไม่สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้ $\square$

เราอาจสรุปขั้นตอนการแปลงเมทริกซ์จัตุรัส $A$ ให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ดังนี้

1. หาสมการลักษณะเฉพาะ $\det(A - \lambda I) = 0$ และคำนวณค่าเฉพาะ $\lambda$ ซึ่งอาจมีค่าซ้ำกัน
2. หาฐานหลักและมิติสำหรับปริภูมิเฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะต่าง ๆ
3. ตรวจสอบจากทฤษฎีบท 3.2.5 ว่า $A$ สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้หรือไม่
4. หาก $A$ สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้ (นั่นคือมีเวกเตอร์เฉพาะเพียงพอที่จะสร้างเมทริกซ์ $P$ ให้เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานได้) เขียนเมทริกซ์ทแยงมุม $D$ จากค่าเฉพาะ และ $P$ จากเวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกัน และเราจะได้ว่า $P^{-1}AP = D$

ให้ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ เป็นการแปลงเชิงเส้น เรากล่าวว่า $T$ **สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้** ถ้ามีฐานหลัก $\mathcal{B}'$ ของ $\mathbb{R}^n$ ซึ่งเมทริกซ์ $[T]_{\mathcal{B}'}$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

เราอาจตรวจสอบว่าการแปลงเชิงเส้นที่กำหนดให้สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้หรือไม่ จากทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 3.2.6** *ให้ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ เป็นการแปลงเชิงเส้นและ $A$ เป็นเมทริกซ์มาตรฐานสำหรับ $T$ จะได้ว่า $T$ สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้ ก็ต่อเมื่อ $A$ สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้ นั่นคือมีเมทริกซ์ไม่เอกฐาน $P$ และมีเมทริกซ์ทแยงมุม $D$ ซึ่ง $A = PDP^{-1}$ ยิ่งกว่านั้นฐานหลัก $\mathcal{B}'$ ที่สร้างจากหลักของเมทริกซ์ $P$ ทำให้ $[T]_{\mathcal{B}'} = D$*

**ตัวอย่าง 3.2.6** ให้ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้นกำหนดโดย

$$T(x_1, x_2) = (7x_1 + 2x_2, -4x_1 + x_2)$$

สำหรับทุก ๆ $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ จงหาฐานหลัก $\mathcal{B}'$ สำหรับ $\mathbb{R}^2$ ซึ่งทำให้ $[T]_{\mathcal{B}'}$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม (ถ้ามี)

**วิธีทำ** เพราะว่า

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}7x_1 + 2x_2\\-4x_1 + x_2\end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}7\\-4\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & 2\\-4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้นเมทริกซ์มาตรฐานของ $T$ คือ $A = \begin{bmatrix}7 & 2\\-4 & 1\end{bmatrix}$

โดยตัวอย่าง 3.2.4 เราได้ว่า $A$ มีค่าเฉพาะเป็น 3 และ 5

และมีฐานหลักสำหรับปริภูมิเฉพาะเป็น $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ ตามลำดับ
ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.2.6 ได้ว่า $\mathcal{B}' = \left\{\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right\}$ ทำให้ $[T]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 5\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม □

**ตัวอย่าง 3.2.7** ให้ $A = \begin{bmatrix}4 & -9\\4 & -8\end{bmatrix}$ และ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงเมทริกซ์ กำหนดโดย $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ สำหรับทุก ๆ $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ จงหาฐานหลัก $\mathcal{B}'$ สำหรับ $\mathbb{R}^2$ ซึ่งทำให้ $[T]_{\mathcal{B}'}$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม (ถ้ามี)

**วิธีทำ** เนื่องจาก

$$\det(A-\lambda I_2) = \begin{vmatrix}4-\lambda & -9\\4 & -8-\lambda\end{vmatrix} = (4-\lambda)(-8-\lambda)+36 = \lambda^2-4\lambda+4$$

ดังนั้น สมการลักษณะเฉพาะของ $A$ คือ $\lambda^2-4\lambda+4 = (\lambda-2)^2 = 0$
ทำให้ได้ว่าค่าเฉพาะของ $A$ คือ $\lambda = -2, -2$
ต่อมา เราจะหาปริภูมิเฉพาะซึ่งสมนัยกับ $\lambda = -2$ ดังนี้
เราได้

$$A + 2I_2 = \begin{bmatrix}4+2 & -9\\4 & -8+2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & -9\\4 & -6\end{bmatrix}$$

ซึ่งใช้การดำเนินการแถวลดรูปให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$\sim \begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{2}\\0 & 0\end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น} \quad x_1 - \tfrac{3}{2}x_2 = 0$$

ทำให้ได้ว่า $x_1 = \frac{3}{2}x_2$ เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{2}x_2\\x_2\end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\1\end{bmatrix}$
ดังนั้น $A_{-2} = \operatorname{Nul}(A+2I_2) = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\1\end{bmatrix}\right\} = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right\}$
เพราะฉะนั้น nullity $(A+2I) = 1$ น้อยกว่าการซ้ำกันของ $\lambda = -2$
ทำให้ได้โดยทฤษฎีบท 3.2.5 ว่า $A$ ไม่สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้ □

## แบบฝึกหัด 3.2

1. จงตอบคำถามต่อไปนี้
   (ก) $\lambda = 2$ เป็นค่าเฉพาะของ $\begin{bmatrix}3 & 8\\3 & 2\end{bmatrix}$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
   (ข) $\lambda = -2$ เป็นค่าเฉพาะของ $\begin{bmatrix}7 & 3\\3 & -1\end{bmatrix}$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

2. จงตอบคำถามต่อไปนี้
   (ก) เวกเตอร์ $\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์เฉพาะของ $\begin{bmatrix}-3 & 1\\-3 & 5\end{bmatrix}$ หรือไม่
   ถ้าเป็นจงหาค่าเฉพาะซึ่งสมนัยกับเวกเตอร์นี้

(ข) เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์เฉพาะของ $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ หรือไม่
ถ้าเป็นจงหาค่าเฉพาะซึ่งสมนัยกับเวกเตอร์นี้

3. จงหาฐานหลักสำหรับปริภูมิเฉพาะของเมทริกซ์ $A$ ซึ่งสมนัยกับค่าเฉพาะที่กำหนดให้

(ก) $A = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \lambda = 4$ (ข) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}, \lambda = 10$

(ค) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -13 & 1 \end{bmatrix}, \lambda = -2$ (ง) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \lambda = 3$

(จ) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \lambda = -3$ (ฉ) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \lambda = 4$

4. สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส $A$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหาสมการลักษณะเฉพาะ ค่าเฉพาะ ฐานหลักสำหรับปริภูมิเฉพาะซึ่งสมนัยกับแต่ละค่าเฉพาะ พร้อมทั้งพิจารณาว่า $A$ สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้หรือไม่ ถ้าได้ จงเมทริกซ์ไม่เอกฐาน $P$ และเมทริกซ์ทแยงมุม $D$ ซึ่งทำให้ $A = PDP^{-1}$

(ก) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (ข) $A = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ -9 & -10 \end{bmatrix}$ (ค) $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ (ง) $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(จ) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ฉ) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ช) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(ซ) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (ฌ) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 7 \end{bmatrix}$ (ญ) $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & -7 \end{bmatrix}$

(ฎ) $A = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ฏ) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(ฐ) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 9 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

5. สำหรับเมทริกซ์ $A$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหาฐานหลัก $\mathcal{B}'$ สำหรับ $\mathbb{R}^2$ ซึ่งทำให้ $[T]_{\mathcal{B}'}$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม (ถ้ามี) เมื่อ $T : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$

(ก) $A = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (ข) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ (ค) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (ง) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

6. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & h & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

จงหาค่าของ $h$ ที่ทำให้ปริภูมิเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าเฉพาะ $\lambda = 5$
(ก) มีมิติเท่ากับ 1 (ข) มีมิติเท่ากับ 2

7. กำหนดให้ $A$ เป็นเมทริกซ์มิติ $4 \times 4$ ซึ่งมีค่าเฉพาะเป็น $\lambda = 2, 2, 1, -1$ ถ้า $\text{nullity}\,(A - 2I_4) = 2$ แล้ว $A$ สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

8. จงแสดงว่า ถ้าเมทริกซ์ $A$ คล้ายกับเมทริกซ์ $B$ แล้ว $A^T$ คล้ายกับเมทริกซ์ $B^T$

9. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $A$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานซึ่งสามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้ แล้ว $A^{-1}$ สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้

10. จงแสดงว่า $A$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน ก็ต่อเมื่อ 0 เป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ $A$

11. จงยกตัวอย่างเมทริกซ์ $A$ และ $B$ มิติ $2 \times 2$ ซึ่งมีค่าเฉพาะชุดเดียวกัน แต่เมทริกซ์ $A$ ไม่คล้ายกับเมทริกซ์ $B$

12. สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เรียกผลบวกของสมาชิกทแยงมุม $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ ว่า**รอย (trace) ของเมทริกซ์** $A$ เขียนแทนด้วย $\operatorname{tr} A$ จงแสดงว่า

    (ก) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ สำหรับทุก ๆ เมทริกซ์จัตุรัส $A$ และ $B$ ขนาด $n$

    (ข) ถ้าเมทริกซ์ $A$ คล้ายกับเมทริกซ์ $B$ แล้ว $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$

    (ค) ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ แล้วพหุนามลักษณะเฉพาะของ $A$ คือ $\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A$

## 3.3 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ (เพิ่มเติม)

เราอาจหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ในรูป

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

เมื่อ $x_1' = \dfrac{dx_1}{dt}$ และ $x_2' = \dfrac{dx_2}{dt}$ ได้โดยเขียนในรูปสมการเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \vec{x}' = A\vec{x}$$

และเลียนแบบการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง $\dfrac{dx}{dt} = ax$ ซึ่งมีผลเฉลยทั่วไปเป็น $x = Ce^{at}$ ดังนั้นเราคาดว่าผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการ (3.3.1) อยู่ในรูป $\vec{x} = e^{At}\vec{C}$ เมื่อ $\vec{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ และสำหรับเมทริกซ์จัตุรัส $M$ และจำนวนจริง $t$ เราจะนิยาม $e^{Mt}$ จากการเลียนแบบการคำนวณค่า $e^t$ จากอนุกรมกำลัง โดย

$$e^{Mt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Mt)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k t^k}{k!} = I + Mt + \frac{M^2t^2}{2!} + \frac{M^3t^3}{3!} + \cdots$$

และอนุพันธ์ของเมทริกซ์ $e^{Mt}$ ก็คืออนุพันธ์ของแต่ละสมาชิกของเมทริกซ์ ซึ่งทำให้เราพบว่า $(e^{Mt})' = Me^{Mt}$ เพราะฉะนั้น เราได้ว่าผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการ (3.3.1) คือ

$$\vec{x} = e^{At}\vec{C}$$

ในการคำนวณ $e^{At}$ สังเกตว่า เราต้องหา $A^k$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $k$ ดังนั้น ถ้า $A$ สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ เราจะหาเมทริกซ์ไม่เอกฐาน $P$ และเมทริกซ์ทแยงมุม $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$ ซึ่ง $A = PDP^{-1}$

เพราะฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(PDP^{-1}t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{P(Dt)^kP^{-1}}{k!} \\
&= P\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Dt)^k}{k!}P^{-1} = P\begin{bmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d_1t)^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d_2t)^k}{k!}\end{bmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{bmatrix} e^{d_1t} & 0 \\ 0 & e^{d_2t}\end{bmatrix}P^{-1}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ (3.3.1) คือ

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} e^{d_1t} & 0 \\ 0 & e^{d_2t}\end{bmatrix}P^{-1}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}
$$

เมื่อ $c_1$ และ $c_2$ เป็นจำนวนจริง

**ตัวอย่าง 3.3.1** จงหาผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_1 - x_2 \\
x_2' &= 2x_1 + 4x_2
\end{aligned}
$$

**วิธีทำ** เราเขียนระบบสมการที่กำหนดให้ได้เป็น

$$
\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
$$

ดังนั้นสมการลักษณะเฉพาะของ $A$ คือ

$$
0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)+2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)
$$

ทำให้ได้ว่าค่าเฉพาะของ $A$ คือ $\lambda = 2, 3$
ต่อมา เราจะหาปริภูมิเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าเฉพาะแต่ละค่าดังนี้
$\lambda = 2$ เราได้

$$
A - 2I_2 = \begin{bmatrix} 1-2 & -1 \\ 2 & 4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}
$$

ซึ่งใช้การดำเนินการแถวลดรูปให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$
\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น $x_1 + x_2 = 0$ ทำให้ได้ว่า $x_1 = -x_2$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A_2 = \text{Nul}\,(A - 2I_2) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\lambda = 3$ เราได้

$$A - 3I_2 = \begin{bmatrix} 1-3 & -1 \\ 2 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งใช้การดำเนินการแถวลดรูปให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น $x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0$ ทำให้ได้ว่า $x_1 = -\frac{1}{2}x_2$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A_3 = \text{Nul}\,(A - 3I_2) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 3.2.3 เราได้ว่า $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ และ $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้คือ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $c_1$ และ $c_2$ เป็นจำนวนจริง $\square$

**หมายเหตุ** สังเกตว่า หากคูณเมทริกซ์ทางขวามือเราอาจเขียนผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ได้ในรูป

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$ เมื่อ $C_1$ และ $C_2$ เป็นจำนวนจริง

ในกรณีทั่วไปเราได้ว่า

**ทฤษฎีบท 3.3.1** *สำหรับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ในรูป $\vec{x}' = A\vec{x}$ เมื่อ $A$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n$ ซึ่งสามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้ ถ้า $\vec{v}_i$ เป็นเวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะ $\lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ และ $P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \ldots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานซึ่ง $P^{-1}AP$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมแล้วจะได้ว่าผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์นี้อยู่ในรูป*

$$\vec{x} = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}\vec{v}_n$$

*เมื่อ $C_1, C_2, \ldots, C_n$ เป็นจำนวนจริง*

**ตัวอย่าง 3.3.2** จงหาผลเฉลยเฉพาะของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1' & = & 5x_1 & - & 6x_2 & - & 6x_3 \\ x_2' & = & -x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 \\ x_3' & = & 3x_1 & - & 6x_2 & - & 4x_3 \end{array}$$

เมื่อ $x_1(0) = 4, x_2(0) = 2$ และ $x_3(0) = -1$

**วิธีทำ** เราเขียนระบบสมการที่กำหนดให้ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

โดยตัวอย่าง 3.2.5 เราได้ว่า $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ และ $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้คือ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = C_1 e^t \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $C_1, C_2$ และ $C_3$ เป็นจำนวนจริง
จากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้ เราอาจหา $C_1, C_2$ และ $C_3$ โดยการแทนค่า $t = 0$ ในผลเฉลยทั่วไป ทำให้ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งเราหาผลเฉลยของระบบเชิงเส้นนี้ได้เป็น $C_1 = -2, C_2 = 0$ และ $C_3 = 5$
เพราะฉะนั้น ผลเฉลยเฉพาะของระบบสมการเชิงอนุพันธ์นี้คือ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -2e^t \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + 5e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ตามต้องการ □

## แบบฝึกหัด 3.3

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

(ก) $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = -4x_1 + 4x_2 \end{cases}$ (ข) $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 \\ x_2' = -2x_1 - x_2 \end{cases}$

(ค) $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 - x_3 \\ x_2' = x_2 + 3x_3 \\ x_3' = 3x_2 + x_3 \end{cases}$ (ง) $\begin{cases} x_1' = 4x_1 \\ x_2' = 3x_1 - 5x_2 \\ x_3' = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases}$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

(ก) $\begin{cases} x_1' = x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ x_2' = -x_2 \\ x_3' = -x_2 - 2x_3 \end{cases}$ เมื่อ $x_1(0) = -3, x_2(0) = 0$ และ $x_3(0) = 3$

(ข) $\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = -2x_2 + x_3 \\ x_3' = x_3 \end{cases}$ เมื่อ $x_1(0) = 2, x_2(0) = 7$ และ $x_3(0) = 15$

**คำตอบแบบฝึกหัด 3.1** 1.(ก) $\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}$, (ข) $\begin{bmatrix}-\frac{3}{11}\\-\frac{13}{11}\end{bmatrix}$, (ค) $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$, (ง) $\begin{bmatrix}\frac{7}{4}\\-\frac{5}{4}\end{bmatrix}$; 2.($P = \begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{3}\\-2 & 1 & -1\\0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}, [\vec{v}]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$);

3.($\underset{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}{P} = \begin{bmatrix}4 & -6\\-1 & 1\end{bmatrix}, [\vec{x}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}6\\-2\end{bmatrix}$); 4.($\underset{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{9}{8}\\\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8}\\-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix} = \underset{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}{P^{-1}}, [\vec{w}_1 - 2\vec{w}_2 + 2\vec{w}_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}\frac{11}{4}\\-\frac{3}{4}\\\frac{3}{2}\end{bmatrix}$);

5. $\begin{bmatrix}2 & -4 & 0\\-1 & 1 & -1\end{bmatrix}$; 6.(ก) $\begin{bmatrix}2 & -3\\3 & -8\end{bmatrix}$, (ข) $\begin{bmatrix}3 & 4\\-2 & -\frac{17}{2}\end{bmatrix}$; 7.(ก) $\begin{bmatrix}-2 & 1\\-5 & 3\end{bmatrix}$, (ข) $\begin{bmatrix}3 & 2\\4 & 3\end{bmatrix}$, (ค) $\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 9\end{bmatrix}$;

8. $\begin{bmatrix}2 & -4 & 5\\0 & -1 & 3\end{bmatrix}$; 9. $3\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 + 4\vec{v}_3$; 10. $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}17 & 7 & -1\\-42 & -17 & 1\\-11 & -5 & 2\end{bmatrix}, [\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}7\\-18\\-3\end{bmatrix}, [T(\vec{x})]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-4\\9\\7\end{bmatrix}$;

11. $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-1 & -5 & -3 & -1\\0 & 9 & 5 & 1\\-4 & -22 & -14 & -4\\7 & 39 & 24 & 7\end{bmatrix}, [\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-2\\1\\-2\\8\end{bmatrix}, [T(\vec{x})]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-5\\7\\-18\\33\end{bmatrix}$;

12.($[T]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix}4 & 6 & -4\\-1 & -5 & 5\\-2 & -3 & 1\end{bmatrix}, [T]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix}-\frac{8}{3} & -\frac{7}{3} & -2\\-\frac{11}{3} & -\frac{13}{3} & -7\\5 & 4 & 7\end{bmatrix}$), ($\underset{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1}{P} = \begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\-1 & 4 & 3\\0 & 3 & 2\end{bmatrix}$,

$[\vec{x}]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, [\vec{x}]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix}0.5\\0\\0.5\end{bmatrix}, [T(\vec{x})]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix}6\\-1\\-4\end{bmatrix}, [T(\vec{x})]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix}-\frac{7}{3}\\-\frac{16}{3}\\6\end{bmatrix}, [T]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}_1}$)

**คำตอบแบบฝึกหัด 3.2** 1.(ก)ไม่, (ข)เป็น; 2.(ก)ไม่ , (ข)เป็น/$\lambda = -2$;

3.(ก) $\left\{\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right\}$, (ข) $\left\{\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}\right\}$, (ค) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}\right\}$, (ง) $\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$, (จ) $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$, (ฉ) $\left\{\begin{bmatrix}2\\3\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$;

4.(ก)($\lambda^2 - \lambda - 6 = 0, \lambda = 3, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \lambda = -2, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$)/$P = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -2\end{bmatrix}$/$D = \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & -2\end{bmatrix}$,

(ข)($\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0, \lambda = 2, \vec{v} = \begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix}$)ไม่สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้,

(ค)($\lambda^2 - 4\lambda - 32 = 0, \lambda = -4, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}-5\\2\end{bmatrix}, \lambda = 8, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$)/$P = \begin{bmatrix}-5 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}$/$D = \begin{bmatrix}-4 & 0\\0 & 8\end{bmatrix}$,

(ง)($\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0, \lambda = 3, \vec{v} = \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$)ไม่สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้,

ข้อ (จ) ถึง (ฉ) ถ้าสามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้ให้เขียน $P$ และ $D$ ด้วยตนเอง*

(จ)($\lambda^3 - 4\lambda^2 - \lambda + 4 = 0, \lambda = 4, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \lambda = -1, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\-3\\0\end{bmatrix}, \lambda = 1, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}-1\\1\\-6\end{bmatrix}$),

(ฉ)($(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0, \lambda = 2, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}-3\\1\\3\end{bmatrix}, \lambda = -1, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \lambda = 1, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$),

(ช)($(\lambda - 2)(\lambda - 3)^2 = 0, \lambda = 3, \vec{v} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \lambda = 2, \vec{v} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$)ไม่สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้,

(ซ)($\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0, \lambda = 2, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}, \lambda = 1, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$),

(ฌ)($\lambda^3 - 12\lambda^2 + 47\lambda - 60 = 0, \lambda = 3, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}, \lambda = 5, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \lambda = 4, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$),

(ญ)($\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0, \lambda = -1, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}, \lambda = -2, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}-3\\1\\-3\end{bmatrix}$),

(ฎ)($(\lambda - 4)(\lambda - 3)^2(\lambda - 1) = 0, \lambda = 3, \vec{v} = \begin{bmatrix}7\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \lambda = 4, \vec{v} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \lambda = 1, \vec{v} = \begin{bmatrix}11\\5\\4\\1\end{bmatrix}$) ไม่สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้,

(ฏ)($(\lambda - 3)^2(\lambda - 2)^2 = 0, \lambda = 3, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \lambda = 2, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$),

(ฐ)($(\lambda-3)^2(\lambda-1)^2\lambda=0, \lambda=1, \vec{v}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \lambda=3, \vec{v}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \lambda=0, \vec{v}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\3\\-6\\-13\end{bmatrix}$) ไม่สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้;

5.(ก)$B=\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\}, D=\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}$, (ข)$B=\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\}, D=\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}$, (ค)$B=\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\}, D=\begin{bmatrix}2&0\\0&5\end{bmatrix}$,
(ง)$\lambda=2,2, \vec{v}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ไม่มีฐานหลักที่ทำให้$[T]_B$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม; 6.(ก)$h\neq 6$, (ข)$h=6$

**คำตอบแบบฝึกหัด 3.3** 1.(ก)$\vec{y}=C_1e^{5t}\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix}+C_2e^{0t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, (ข)$\vec{y}=C_1e^{(1+\sqrt{2})t}\begin{bmatrix}1\\-2+\sqrt{2}\end{bmatrix}+C_2e^{(1-\sqrt{2})t}\begin{bmatrix}1\\-2-\sqrt{2}\end{bmatrix}$,
(ค)$\vec{y}=C_1e^{4t}\begin{bmatrix}2\\-3\\-3\end{bmatrix}+C_2e^{-2t}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}+C_3e^{t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, (ง)$\vec{y}=C_1e^{2t}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+C_2e^{4t}\begin{bmatrix}6\\2\\7\end{bmatrix}+C_3e^{-5t}\begin{bmatrix}0\\-7\\1\end{bmatrix}$;
2.(ก)($\vec{y}=C_1e^{t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+C_2e^{-2t}\begin{bmatrix}2\\0\\-3\end{bmatrix}+C_3e^{-t}\begin{bmatrix}-5\\-2\\2\end{bmatrix}, C_1=-1, C_2=-1, C_3=0$),
(ข)($\vec{y}=C_1e^{-2t}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+C_2e^{t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+C_3e^{t}\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}, C_1=2, C_2=2, C_3=5$)

# บทที่ 4

# เรขาคณิตเชิงเส้นและฐานหลักเชิงตั้งฉาก

## 4.1 ผลคูณภายในและเซตเชิงตั้งฉาก

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ เราเรียก $\vec{u}^T\vec{v}$ ว่า**ผลคูณภายใน (inner product) หรือ ผลคูณจุด (dot product) ของเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$** เขียนแทนด้วย $\vec{u}\cdot\vec{v}$ นั่นคือ

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}^T\vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \in \mathbb{R}$$

เราสามารถแสดงได้โดยง่ายว่า

**ทฤษฎีบท 4.1.1** *สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ ใน $\mathbb{R}^n$ และจำนวนจริง $c$ เราได้ว่า*

1. $\vec{u}\cdot\vec{0}_n = 0$
2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
3. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$
4. $(c\vec{u})\cdot\vec{v} = c(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \vec{u}\cdot(c\vec{v})$
5. $\vec{u}\cdot\vec{u} \geq 0$ *และ* $\vec{u}\cdot\vec{u} = 0$ *ก็ต่อเมื่อ* $\vec{u} = \vec{0}$

**ความยาว (length) หรือนอร์ม (norm)** ของเวกเตอร์ $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ เขียนแทนด้วย $\|\vec{v}\|$ กำหนดโดย

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

ดังนั้น

$$\vec{v}\cdot\vec{v} = \|\vec{v}\|^2 \quad \text{และ} \quad \|c\vec{v}\| = |c|\|\vec{v}\| \quad \text{สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง } c$$

ถ้า $\vec{x}$ และ $\vec{y}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ เราเรียก $\|\vec{x}-\vec{y}\|$ ว่า**ระยะทาง (distance) ระหว่างเวกเตอร์ $\vec{x}$ และ $\vec{y}$** สังเกตว่า ถ้า $\vec{v} \neq \vec{0}_n$ แล้วเวกเตอร์ $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีความยาวหนึ่งหน่วยในทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\vec{v}$

**ตัวอย่าง 4.1.1** ให้ $\vec{v} = (1, 0, -2, 2) \in \mathbb{R}^4$ จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\vec{v}$ และเวกเตอร์สามหน่วยในทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ $\vec{v}$

**วิธีทำ** เพราะว่า $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2+0^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$

ดังนั้นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\vec{v}$ คือ $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\0\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$

และเวกเตอร์ 3 หน่วยในทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ $\vec{v}$ คือ $-\frac{3}{3}\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\0\\2\\-2\end{bmatrix}$ □

เรากล่าวว่าเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ใน $\mathbb{R}^n$ **ตั้งฉากกัน (orthogonal or perpendicular)** ก็ต่อเมื่อ $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ และเรียกเซตของเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ ใน $\mathbb{R}^n$ ว่า**เซตเชิงตั้งฉาก (orthogonal set)** ถ้าเวกเตอร์ที่ต่างกันแต่ละคู่ในเซต $S$ ตั้งฉากกัน นั่นคือ $\vec{u}_i\cdot\vec{u}_j = 0$ สำหรับทุก $i \neq j$ เมื่อ $i, j \in \{1, 2, \dots, p\}$

**ตัวอย่าง 4.1.2** เซต $S = \left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-5\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากใน $\mathbb{R}^3$

สมบัติที่สำคัญของเซตเชิงตั้งฉากคือ

**ทฤษฎีบท 4.1.2** *ถ้า $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากของเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์แล้ว $S$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น ดังนั้น $S$ เป็นฐานหลักสำหรับปริภูมิย่อย $H = \mathrm{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$*

**บทพิสูจน์** ให้ $c_1, c_2, \dots, c_p$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่งทำให้ $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_p\vec{u}_p = \vec{0}$
จะแสดงว่า $c_1 = c_2 = \cdots = c_p = 0$
ให้ $i \in \{1, 2, \dots, p\}$
เพราะว่า $\vec{u}_j\cdot\vec{u}_i = 0$ ทุก $j \neq i$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}(c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_p\vec{u}_p)\cdot\vec{u}_i &= \vec{0}\cdot\vec{u}_i\\ c_1\vec{u}_1\cdot\vec{u}_i + \cdots + c_{i-1}\vec{u}_{i-1}\cdot\vec{u}_i + c_i\vec{u}_i\cdot\vec{u}_i + c_{i+1}\vec{u}_{i+1}\cdot\vec{u}_i + \cdots + c_p\vec{u}_p\cdot\vec{u}_i &= 0\\ c_i\|\vec{u}_i\|^2 &= 0\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\vec{u}_i \neq 0$ ดังนั้น $\|\vec{u}_i\|^2 \neq 0$ ทำให้ได้ว่า $c_i = 0$
$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น □

เราเรียกฐานหลัก $\mathcal{B}$ สำหรับปริภูมิย่อย $H$ ของ $\mathbb{R}^n$ ว่า**ฐานหลักเชิงตั้งฉาก (orthogonal basis)** ถ้า $\mathcal{B}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉาก สังเกตว่า *ฐานหลักมาตรฐานสำหรับ $\mathbb{R}^n$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉาก*

**ตัวอย่าง 4.1.3** เซต $S$ ในตัวอย่าง 4.1.2 เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับ $\mathbb{R}^3$

ให้ $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับปริภูมิย่อย $H$ ของ $\mathbb{R}^n$ และ $\vec{y} \in H$ ดังนั้น จะมี $c_1, c_2, \dots, c_p$ เป็นจำนวนจริงซึ่ง

$$\vec{y} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_p\vec{u}_p$$

เราอาจหาแต่ละ $c_i$ โดยการหาผลคูณภายใน $\vec{y}\cdot\vec{u}$ และใช้สมมติฐานที่ว่า $\vec{u}_j\cdot\vec{u}_i = 0$ ทุก $j \neq i$ คล้ายในบทพิสูจน์ของทฤษฎีบท 4.1.2 ทำให้เราได้

$$\vec{y}\cdot\vec{u}_i = c_i\vec{u}_i\cdot\vec{u}_i$$

เพราะฉะนั้น

$$c_i = \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_i}{\vec{u}_i\cdot\vec{u}_i} = \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_i}{\|\vec{u}_i\|^2} \quad \text{สำหรับทุก } i \in \{1, 2, \ldots, p\}$$

ซึ่งสรุปเป็นทฤษฎีบทได้เป็น

**ทฤษฎีบท 4.1.3** *ให้ $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับปริภูมิย่อย $H$ ของ $\mathbb{R}^n$ และ $\vec{y} \in H$ จะได้*

$$\begin{aligned}\vec{y} &= \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 + \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 + \cdots + \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_p}{\vec{u}_p\cdot\vec{u}_p}\vec{u}_p \\ &= \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2}\vec{u}_1 + \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|^2}\vec{u}_2 + \cdots + \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_p}{\|\vec{u}_p\|^2}\vec{u}_p\end{aligned}$$

**ตัวอย่าง 4.1.4** เนื่องจาก $S = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{bmatrix}-5\\-2\\1\end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากฐานหนึ่งสำหรับ $\mathbb{R}^3$ ดังนั้น สำหรับ $\vec{y} = \begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}$ เราได้ว่า

$$\begin{aligned}\vec{y} &= \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 + \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 + \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_3}{\vec{u}_3\cdot\vec{u}_3}\vec{u}_3 \\ &= \frac{3(1)+(-1)(-2)+1(1)}{1^2+(-2)^2+1^2}\vec{u}_1 + \frac{3(0)+(-1)1+1(2)}{0^2+1^2+2^2}\vec{u}_2 + \frac{3(-5)+(-1)(-2)+1(1)}{(-5)^2+(-2)^2+1^2}\vec{u}_3 \\ &= \vec{u}_1 + \tfrac{1}{5}\vec{u}_2 - \tfrac{2}{5}\vec{u}_3\end{aligned}$$

เราเรียกเซตเชิงตั้งฉากของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยว่า**เซตเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal set)** และกล่าวว่าฐานหลักเชิงตั้งฉาก $\mathcal{B}$ สำหรับปริภูมิย่อย $H$ ของ $\mathbb{R}^n$ เป็น**ฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal basis)** ถ้า $\mathcal{B}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ

**ตัวอย่าง 4.1.5** จากตัวอย่าง 4.1.2 เราได้ว่า

$$S' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}-5\\-2\\1\end{bmatrix} \right\}$$

เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติของ $\mathbb{R}^3$

เราสังเกตว่า

**ทฤษฎีบท 4.1.4** *เซตของหลักของ $m \times n$ เมทริกซ์ $U$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ ก็ต่อเมื่อ $U^TU = I_n$*

เนื่องจาก $U\vec{x}\cdot U\vec{y} = (U\vec{x})^TU\vec{y} = \vec{x}^TU^TU\vec{y} = \vec{x}^T\vec{y} = \vec{x}\cdot\vec{y}$ จึงได้บทแทรกต่อไปนี้

**บทแทรก 4.1.5** *ให้ $U$ เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ซึ่งเซตของหลักเป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ จะได้ว่า*
1. $U\vec{x} \cdot U\vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y}$
2. $\|U\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$
3. $U\vec{x} \cdot U\vec{y} = 0$ *ก็ต่อเมื่อ* $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

ถ้าเซตของหลักของเมทริกซ์จัตุรัส $U$ เป็นเซตเชิงตั้งฉาก [เชิงตั้งฉากปรกติ] เราเรียกเมทริกซ์ $U$ ว่า **เมทริกซ์เชิงตั้งฉาก (orthogonal matrix) [เมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal matrix)]** ซึ่งโดยทฤษฎีบท 4.1.4 เราได้ว่า $U$ เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ ก็ต่อเมื่อ $U$ หาเมทริกซ์ผกผันได้และ $U^{-1} = U^T$

**ตัวอย่าง 4.1.6** สังเกตว่า $U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 0 & -5/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ

ดังนั้นเราได้ว่า $\quad U^{-1} = U^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -5/\sqrt{30} & -2/\sqrt{30} & 1/\sqrt{30} \end{bmatrix}$

## แบบฝึกหัด 4.1

1. ให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
   จงหา $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{v} \cdot \vec{u}$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางเดียวและทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ $2\vec{u} + \vec{v}$
2. ให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
   จงหาเวกเตอร์ 3 หน่วยในทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\vec{u}$ และระยะห่างระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{x}$
3. กำหนดให้ $S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$ และ $\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
   (ก) จงแสดงว่าเซต $S$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากใน $\mathbb{R}^3$
   (ข) จงแสดงว่าเซต $S$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากของ $\mathbb{R}^3$
   (ค) โดยใช้ทฤษฎีบท 4.1.2 จงเขียน $\vec{x}$ ในรูปผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ในเซต $S$
   (ง) จงหาเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ $U$ ซึ่งมีหลักเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ในเซต $S$ พร้อมทั้งหา $U^{-1}$
4. กำหนดให้ $S = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ และ $\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$
   (ก) จงแสดงว่าเซต $S$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากใน $\mathbb{R}^3$
   (ข) จงแสดงว่าเซต $S$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากของ $\mathbb{R}^3$
   (ค) โดยใช้ทฤษฎีบท 4.1.2 จงเขียน $\vec{x}$ ในรูปผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ในเซต $S$
   (ง) จงหาเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ $U$ ซึ่งมีหลักเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ในเซต $S$ พร้อมทั้งหา $U^{-1}$
5. สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ใน $\mathbb{R}^n$ จงแสดงว่า
   (ก) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$
   (ข) $4\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$
   (ค) $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$
6. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $U$ เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ แล้ว $\det U = \pm 1$

## 4.2 การฉายเชิงตั้งฉาก และ กระบวนการกราม-ชมิดต์

ให้ $\vec{z}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ และ $H$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$ เรากล่าวว่า $\vec{z}$ **ตั้งฉาก (orthogonal) กับปริภูมิย่อย** $H$ ถ้า $\vec{z}$ ตั้งฉากกับทุก ๆ เวกเตอร์ใน $H$ เราเรียกเซตของเวกเตอร์ซึ่งตั้งฉากกับ $H$ ทั้งหมดว่า**ส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉาก (orthogonal complement) ของ** $H$ เขียนแทนด้วย $H^\perp$ (อ่านว่า “$H$ perp”) นั่นคือ

$$H^\perp = \{\vec{z} \in \mathbb{R}^n : \vec{z} \cdot \vec{a} = 0 \text{ สำหรับทุก ๆ } \vec{a} \in H\}$$

สังเกตว่า $H \cap H^\perp = \{\vec{0}\}$ และ

**ทฤษฎีบท 4.2.1** *ให้ $H$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$ จะได้ว่า*

1. *$H^\perp$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$*
2. *ถ้า $H = \operatorname{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ แล้ว $\vec{z} \in H^\perp$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{z} \cdot \vec{u}_1 = \vec{z} \cdot \vec{u}_2 = \cdots = \vec{z} \cdot \vec{u}_p = 0$*

**บทพิสูจน์** 1. เพราะว่า $\vec{0} \cdot \vec{a} = 0$ สำหรับทุก ๆ $\vec{a} \in H$ ดังนั้น $\vec{0} \in H^\perp$
ให้ $\vec{x}, \vec{y} \in H^\perp$ และ $c$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ ให้ $\vec{a}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $H$
ดังนั้น $\vec{x} \cdot \vec{a} = 0$ และ $\vec{y} \cdot \vec{a} = 0$
ทำให้ได้ว่า $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{a} = \vec{x} \cdot \vec{a} + \vec{y} \cdot \vec{a} = 0$ และ $(c\vec{x}) \cdot \vec{a} = c(\vec{x} \cdot \vec{a}) = c(0) = 0$
เพราะฉะนั้น $\vec{x} + \vec{y} \in H^\perp$ และ $c\vec{x} \in H^\perp$
เราจึงสรุปได้ว่า $H^\perp$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$
2. สมมติว่า $\vec{z} \in H^\perp$ ดังนั้น $\vec{z} \cdot \vec{u} = 0$ สำหรับทุก ๆ $\vec{u} \in H$
เพราะว่า $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\} \subseteq H$ ทำให้ได้ว่า $\vec{z} \cdot \vec{u}_1 = \vec{z} \cdot \vec{u}_2 = \cdots = \vec{z} \cdot \vec{u}_p = 0$
ในทางกลับกัน สมมติว่า $\vec{z} \cdot \vec{u}_1 = \vec{z} \cdot \vec{u}_2 = \cdots = \vec{z} \cdot \vec{u}_p = 0$ และให้ $\vec{u} \in H$
เพราะว่า $H = \operatorname{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$
ดังนั้น $\vec{u} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_p\vec{u}_p$ เมื่อ $c_1, c_2, \ldots, c_p \in \mathbb{R}$
ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\vec{z} \cdot \vec{u} &= \vec{z} \cdot (c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_p\vec{u}_p) \\
&= \vec{z} \cdot (c_1\vec{u}_1) + \vec{z} \cdot (c_2\vec{u}_2) + \cdots + \vec{z} \cdot (c_p\vec{u}_p) \\
&= c_1(\vec{z} \cdot \vec{u}_1) + c_2(\vec{z} \cdot \vec{u}_2) + \cdots + c_p(\vec{z} \cdot \vec{u}_p) = 0
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\vec{u}$ อยู่ใน $H^\perp$ $\square$

จากทฤษฎีบทข้างต้นเรายังได้อีกว่า

**ข้อสังเกต** ถ้า $H = \operatorname{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ แล้ว

$$\begin{aligned}
H^\perp &= \{\vec{z} \in \mathbb{R}^n : \vec{u}_1 \cdot \vec{z} = \vec{u}_2 \cdot \vec{z} = \cdots = \vec{u}_p \cdot \vec{z} = 0\} \\
&= \{\vec{z} \in \mathbb{R}^n : \vec{u}_1^T\vec{z} = \vec{u}_2^T\vec{z} = \cdots = \vec{u}_p^T\vec{z} = 0\} \\
&= \operatorname{Nul} A^T \quad \text{เมื่อ } A = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \ldots & \vec{u}_p \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

**ตัวอย่าง 4.2.1** ให้ $H = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$ จงหาฐานหลักสำหรับ $H^{\perp}$

**วิธีทำ** เพราะว่า

$$H^{\perp} = \left\{\begin{bmatrix}x_1, x_2, x_3\end{bmatrix} : \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} = 0\right\} = \left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\right\}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} H^{\perp} &= \left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} : x_1 = 2x_2 - x_3\right\} = \left\{\begin{bmatrix}2x_2 - x_3\\x_2\\x_3\end{bmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{x_2\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R}\right\} = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น ฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $H^{\perp}$ คือ $\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ $\square$

**ตัวอย่าง 4.2.2** ให้ $H = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ จงหาฐานหลักสำหรับ $H^{\perp}$

**วิธีทำ** จากข้อสังเกตหลังทฤษฎีบท 4.2.1 เราได้ว่า

$$H^{\perp} = \operatorname{Nul} A^T \text{ เมื่อ } A = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$$

ดังนั้น เราจึงลดรูป $A^T$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A^T = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

ซึ่งสมนัยกับสมการเอกพันธุ์

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{นั่นคือ} \quad \begin{aligned} x_1 &= x_3 \\ x_2 &= -x_3 \end{aligned} \quad \text{โดยที่ } x_3 \in \mathbb{R}$$

ทำให้ได้ว่า $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ เมื่อ $x_3 \in \mathbb{R}$

ดังนั้น ฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $H^{\perp} = \mathrm{Nul}\, A^T$ คือ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ $\square$

ให้ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ และ $H = \mathrm{Span}\,\{\vec{u}\}$ สำหรับแต่ละเวกเตอร์ $\vec{y}$ ใน $\mathbb{R}^n$ เราสนใจที่จะแยก $\vec{y}$ ออกเป็นผลบวกของเวกเตอร์ใน $H$ และเวกเตอร์ใน $H^{\perp}$ กล่าวคือ

$$\vec{y} = \hat{y} + \vec{z}$$

โดยที่ $\hat{y} = \alpha\vec{u}$ สำหรับบาง $\alpha \in \mathbb{R}$ และ $\vec{z} \perp \vec{u}$ เราคำนวณ $\alpha$ โดยเริ่มจากการสังเกตว่า $\vec{z} = \vec{y} - \hat{y} = \vec{y} - \alpha\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ ดังนั้น $(\vec{y} - \alpha\vec{u}) \cdot \vec{u} = 0$ ทำให้

$$\alpha = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \quad \text{และ} \quad \hat{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\vec{u}$$

ในกรณีทั่วไปเรามี

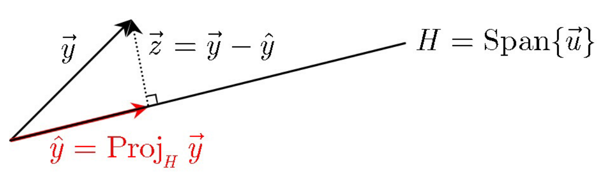
**ทฤษฎีบท 4.2.2** [การแยกเชิงตั้งฉาก (Orthogonal Decomposition)]
*ให้ $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากของเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์และ $H = \mathrm{Span}\,\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ จะได้ว่าสำหรับแต่ละเวกเตอร์ $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ จะมีเวกเตอร์*

$$\hat{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\vec{u}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2}\vec{u}_2 + \cdots + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_p}{\vec{u}_p \cdot \vec{u}_p}\vec{u}_p \in H$$

*และเวกเตอร์ $\vec{z} = \vec{y} - \hat{y} \in H^{\perp}$ ซึ่งทำให้*

$$\vec{y} = \hat{y} + \vec{z}$$

เราเรียกเวกเตอร์ $\hat{y}$ ว่า**การฉายเชิงตั้งฉากของเวกเตอร์ $\vec{y}$ บน $H$ (orthogonal projection of $\vec{y}$ onto $H$)** เขียนแทนด้วย $\mathrm{proj}_H\vec{y}$ และเรียกเวกเตอร์ $\vec{z}$ ว่า**ส่วนเติมเต็ม (complement) ของเวกเตอร์ $\vec{y}$ ซึ่งตั้งฉากกับ $H$**




**ตัวอย่าง 4.2.3** กำหนดให้ $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ และ $\vec{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$
เราได้ว่า $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากของ $\mathbb{R}^3$ จงเขียนเวกเตอร์ $\vec{x}$ ในรูปของผลรวมของสองเวกเตอร์ $\vec{y}$ และ $\vec{z}$ โดยที่ $\vec{y} \in \mathrm{Span}\,\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ และ $\vec{z} \in \mathrm{Span}\,\{\vec{u}_3\}$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากของ $\mathbb{R}^3$ โดยทฤษฎีบท 4.1.3 เราได้ว่า

$$\vec{x} = \frac{\vec{x}\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 + \frac{\vec{x}\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 + \frac{\vec{x}\cdot\vec{u}_3}{\vec{u}_3\cdot\vec{u}_3}\vec{u}_3 = \frac{5}{2}\vec{u}_1 - \frac{3}{2}\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$$

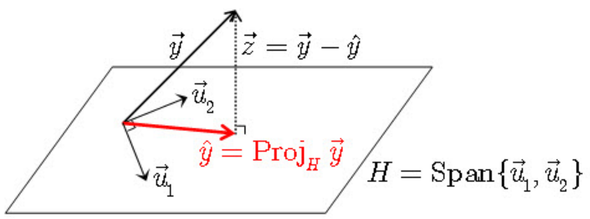
ดังนั้น เรามี $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ โดยที่ $\vec{y} = \frac{5}{2}\vec{u}_1 - \frac{3}{2}\vec{u}_2 \in \operatorname{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ และ $\vec{z} = 2\vec{u}_3 \in \operatorname{Span}\{\vec{u}_3\}$
และเรายังได้อีกด้วยว่า $\vec{y} = \operatorname{proj}_H\vec{x} \in H$ เมื่อ $H = \operatorname{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ และ $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y} \in \operatorname{Span}\{\vec{u}_3\} = H^\perp$
$\square$

**ตัวอย่าง 4.2.4** ให้ $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับปริภูมิย่อย $H = \operatorname{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ จงแยกเวกเตอร์ $\vec{y}$ เป็นผลบวกของเวกเตอร์ใน $H$ และ $H^\perp$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉาก โดยทฤษฎีบท 4.2.2 เราได้ว่า $\vec{y} = \hat{y} + \vec{z}$ โดยที่

$$\hat{y} = \operatorname{proj}_H\vec{y} = \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 + \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 = -\frac{1}{6}\vec{u}_1 - \frac{2}{3}\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

และ $\vec{z} = \vec{y} - \hat{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$ $\square$




จากทฤษฎีบท 4.2.2 เราเห็นว่าฐานหลักเชิงตั้งฉากมีบทบาทสำคัญในการแยกเชิงตั้งฉาก เราจะปิดท้ายหัวข้อนี้ด้วยการแสดงว่าเราสามารถสร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$ ได้เสมอโดยก่อนอื่นเราจะพิจารณาการสร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากจากตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 4.2.5** ให้ $H = \operatorname{Span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ โดยที่ $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$
จงสร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับ $H$

**วิธีทำ** เราต้องการเซตของเวกเตอร์ $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ ซึ่ง $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ และ $H = \operatorname{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$
ถ้าให้ $\vec{v}_1 = \vec{x}_1$ และ $\vec{v}_2$ เป็นส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉากของ $\vec{x}_2$ บน $\operatorname{Span}\{\vec{x}_1\}$ นั่นคือ

$$\vec{v}_2 = \vec{x}_2 - \hat{x}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\vec{x}_2\cdot\vec{x}_1}{\vec{x}_1\cdot\vec{x}_1}\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} - \frac{5}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $\vec{v}_2 \perp \vec{v}_1$ และ $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \text{Span}\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2 - \frac{\vec{x}_2\cdot\vec{x}_1}{\vec{x}_1\cdot\vec{x}_1}\vec{x}_1\right\} = \text{Span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\} = H$

เพราะฉะนั้น $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\-3\end{bmatrix}\right\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากฐานหนึ่งสำหรับ $H$ $\square$

**ตัวอย่าง 4.2.6** ให้ $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix}-1\\2\\1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ และ $\vec{x}_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ จะได้ว่า $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น ซึ่งทำให้เป็นฐานหลักสำหรับปริภูมิย่อย $H = \text{Span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ ของ $\mathbb{R}^4$ จงสร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากและฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับ $H$

**วิธีทำ** ในการสร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับ $H$ เราจะเริ่มจาก

1. ให้ $\vec{v}_1 = \vec{x}_1$ และ $\vec{v}_2$ เป็นส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉากของ $\vec{x}_2$ บน $\text{Span}\{\vec{x}_1\}$ นั่นคือ

$$\vec{v}_2 = \vec{x}_2 - \text{proj}_{\text{Span}\{x_1\}}\vec{x}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\vec{x}_2\cdot\vec{x}_1}{\vec{x}_1\cdot\vec{x}_1}\vec{x}_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{3}{6}\begin{bmatrix}-1\\2\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$$

   ทั้งนี้เราอาจเลือกเวกเตอร์ $\vec{v}_2' = 2\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}$ ซึ่งเป็นพหุคูณของ $\vec{v}_2$ เพื่อความสะดวกในการคำนวณต่อไป ซึ่งในทำนองเดียวกับตัวอย่าง 4.2.5 จะได้ว่า $\vec{v}_2'$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}_1$ และ $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2'\} = \text{Span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$
   เพราะฉะนั้น $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2'\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากฐานหนึ่งสำหรับ $\text{Span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$

2. ให้ $\vec{v}_3$ เป็นส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉากของ $\vec{x}_3$ บน $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2'\}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}\vec{v}_3 = \vec{x}_3 - \text{proj}_{\text{Span}\{\vec{v}_1,\vec{v}_2'\}}\vec{x}_3 &= \vec{x}_3 - \left(\frac{\vec{x}_3\cdot\vec{v}_1}{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1}\vec{v}_1 + \frac{\vec{x}_3\cdot\vec{v}_2'}{\vec{v}_2'\cdot\vec{v}_2'}\vec{v}_2'\right)\\ &= \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} - \left(-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-1\\2\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{3}{6}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

   โดยเราอาจเลือกเวกเตอร์ $\vec{v}_3' = 3\vec{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\0\end{bmatrix}$ ซึ่งเราได้ว่า $\vec{v}_3'$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2'$ และ
   $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2', \vec{v}_3'\} = \text{Span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$

เพราะฉะนั้น $\left\{\begin{bmatrix}-1\\2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากฐานหนึ่งสำหรับ $H$

และหากเราทำให้เวกเตอร์ในฐานหลักนี้เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยจะได้ว่า

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติฐานหนึ่งสำหรับ $H$ $\square$

ในกรณีทั่วไป ถ้าเรามี $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับปริภูมิย่อย $H$ จะได้ขั้นตอนในการหาฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับ $H$ เป็น

1. ให้ $\vec{v}_1 = \vec{x}_1$ และ $\vec{v}_2$ เป็นส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉากของ $\vec{x}_2$ บนปริภูมิย่อย Span $\{\vec{v}_1\}$
2. ให้ $\vec{v}_3$ เป็นส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉากของ $\vec{x}_3$ บนปริภูมิย่อย Span $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ และกำหนดเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \vec{v}_i &= \text{ส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉากของ } \vec{x}_i \text{ บนปริภูมิย่อย Span } \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{i-1}\} \\ &= \vec{x}_i - \operatorname{proj}_{\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{i-1}\}} \vec{x}_i \\ &= \vec{x}_i - \left( \frac{\vec{x}_i \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 + \cdots + \frac{\vec{x}_i \cdot \vec{v}_{i-1}}{\vec{v}_{i-1} \cdot \vec{v}_{i-1}} \vec{v}_{i-1} \right) \quad \text{สำหรับทุก } i \in \{2, 3, \ldots, p\} \end{aligned}$$

และเซตของเวกเตอร์ $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ ที่ได้จะเป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากฐานหนึ่งสำหรับ $H$

เราเรียกกระบวนการสร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับปริภูมิย่อย $H$ ของ $\mathbb{R}^n$ ว่า**กระบวนการกราม-ชมิดต์ (Gram-Schmidt process)** ซึ่งกล่าวโดยสรุปได้เป็น

**ทฤษฎีบท 4.2.3** [กระบวนการกราม-ชมิดต์ (The Gram-Schmidt Process)]
*ให้ $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับปริภูมิย่อย $H$ ของ $\mathbb{R}^n$ กำหนด*

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{x}_1 \\ \vec{v}_2 &= \vec{x}_2 - \frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_3 &= \vec{x}_3 - \frac{\vec{x}_3 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 - \frac{\vec{x}_3 \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} \vec{v}_2 \\ &\vdots \\ \vec{v}_p &= \vec{x}_p - \frac{\vec{x}_p \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 - \frac{\vec{x}_p \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} \vec{v}_2 - \cdots - \frac{\vec{x}_p \cdot \vec{v}_{p-1}}{\vec{v}_{p-1} \cdot \vec{v}_{p-1}} \vec{v}_{p-1} \end{aligned}$$

*จะได้ว่า $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากฐานหนึ่งสำหรับ $H$*

เราจึงได้ด้วยว่า

**บทแทรก 4.2.4** *ถ้า $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับปริภูมิย่อย $H$ แล้วเราสามารถสร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับ $H$ จากฐานหลัก $\mathcal{B}$ ได้เสมอ*

**ตัวอย่าง 4.2.7** จงสร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับ

$$H = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

**วิธีทำ** เราจะตรวจสอบก่อนว่าเซตของเวกเตอร์ $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานหลักของ $H$ หรือไม่ โดยเขียนเป็นเมทริกซ์และลดรูปจนได้รูปแบบขั้นบันไดดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จึงได้โดยทฤษฎีบท 2.2.4 ว่าฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $H = \operatorname{Col} A$ คือ $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

ให้ $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ซึ่งเราได้โดยกระบวนการกราม-ชมิดต์ว่า ถ้า

$$\vec{v}_1 = \vec{x}_1 \quad \text{และ} \quad \vec{v}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

จะได้ $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับ $H$ โดยเราอาจเลือก $\vec{v}_2' = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ แทน $\vec{v}_2$

ดังนั้น $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากฐานหนึ่งสำหรับ $H$

เพราะฉะนั้น $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ จึงเป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติฐานหนึ่งสำหรับ $H$ $\square$

หากทราบว่าหลักของ $m \times n$ เมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \ldots & \vec{x}_n \end{bmatrix}$ เป็นอิสระเชิงเส้นเราอาจใช้กระบวนการกราม-ชมิดท์หาฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ ฐานหนึ่งของ $\operatorname{Col} A$ เพราะว่า $\vec{v}_i$ ตั้งฉากกับ $\operatorname{Span}\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i-1}\}$ ทุก $i \in \{2, \ldots, n\}$ ดังนั้น $\vec{u}_i \cdot \vec{x}_j = 0$ ทุก $j < i$

ถ้าเราให้ $Q = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \ldots & \vec{u}_n \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $Q$ เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ และ

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vec{u}_2^T \\ \vdots \\ \vec{u}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \ldots & \vec{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1^T\vec{x}_1 & \vec{u}_1^T\vec{x}_2 & \cdots & \vec{u}_1^T\vec{x}_{n-1} & \vec{u}_1^T\vec{x}_n \\ 0 & \vec{u}_2^T\vec{x}_2 & \cdots & \vec{u}_2^T\vec{x}_{n-1} & \vec{u}_2^T\vec{x}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \vec{u}_{n-1}^T\vec{x}_{n-1} & \vec{u}_n^T\vec{x}_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \vec{u}_n^T\vec{x}_n \end{bmatrix}$$

จะเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนซึ่ง

$$QR = Q(Q^T A) = (QQ^T)A = A$$

เรียกว่า**การแยกตัวประกอบ $QR$ ($QR$ Factorization) ของ** $A$ ซึ่งมีประโยชน์ในการประมาณค่าเฉพาะของเมทริกซ์จัตุรัส $A$

**ทฤษฎีบท 4.2.5** *ให้ $A$ เป็นเมทริกซ์มิติ $m \times n$ ซึ่งหลักของ $A$ เป็นอิสระเชิงเส้น จะได้ว่า $A$ สามารถแยกได้เป็น $A = QR$ โดยที่ $Q$ เป็นเมทริกซ์มิติ $m \times n$ ซึ่งเซตของหลักของ $Q$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติของ $\operatorname{Col} A$ และ $R$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนไม่เอกฐานมิติ $n \times n$ ซึ่งทุกสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเป็นบวก*

**ตัวอย่าง 4.2.8** จงหาการแยกตัวประกอบ $QR$ ของเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

**วิธีทำ** จากตัวอย่าง 4.2.6 เราได้ว่า $\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติฐานหนึ่งสำหรับ $H = \operatorname{Col} A$ เราจึงได้ $A = QR$ เมื่อ

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad R = Q^T A = \begin{bmatrix} \frac{6}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

เป็นการแยกตัวประกอบ $QR$ ของ $A$ □

## แบบฝึกหัด 4.2

1. จงหาฐานหลักสำหรับ $H^\perp$ เมื่อ

   (ก) $H = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ (ข) $H = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

2. กำหนดให้ $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \vec{u}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

   เราได้ว่า $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากของ $\mathbb{R}^4$ จงเขียนเวกเตอร์ $\vec{x}$ ในรูปของผลรวมของสองเวกเตอร์ $\vec{y}$ และ $\vec{z}$ โดยที่ $\vec{y} \in \operatorname{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ และ $\vec{z} \in \operatorname{Span}\{\vec{u}_4\}$

3. กำหนดให้ $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{u}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ และ $\vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$

   เราได้ว่า $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากของ $\mathbb{R}^4$ จงเขียนเวกเตอร์ $\vec{x}$ ในรูปของผลรวมของสองเวกเตอร์ $\vec{y}$ และ $\vec{z}$ โดยที่ $\vec{y} \in \operatorname{Span}\{\vec{u}_1\}$ และ $\vec{z} \in \operatorname{Span}\{\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$

4. จงแสดงว่า $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากและหาการฉายเชิงตั้งฉากของเวกเตอร์ $\vec{y}$ บนปริภูมิย่อย $\operatorname{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$

   (ก) $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ (ข) $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

5. กำหนดให้ $H$ เป็นปริภูมิย่อยที่แผ่ทั่วโดยเซตเชิงตั้งฉากของเวกเตอร์ $\vec{u}$'s
   จงแยกเวกเตอร์ $\vec{y}$ เป็นผลบวกของเวกเตอร์ใน $H$ และ $H^{\perp}$
   (ก) $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix}3\\4\\0\end{bmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{bmatrix}-4\\3\\0\end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix}6\\3\\-2\end{bmatrix}$ (ข) $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{bmatrix}5\\1\\4\end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}$
   (ค) $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{bmatrix}-1\\3\\1\\-2\end{bmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix}4\\3\\3\\1\end{bmatrix}$ (ง) $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{bmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}$
6. ให้ $\vec{y} = \begin{bmatrix}4\\8\\1\end{bmatrix}, \vec{u}_1 = \begin{bmatrix}2/3\\1/3\\2/3\end{bmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{bmatrix}-2/3\\2/3\\1/3\end{bmatrix}, H = \text{Span}\,\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ และ $U = \begin{bmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2\end{bmatrix}$
   จงหา $U^TU, UU^T, \text{proj}_H\vec{y}$ และ $(UU^T)\vec{y}$
7. จงใช้กระบวนการกราม-ชมิดต์สร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากของปริภูมิย่อยที่แผ่ทั่วโดยเวกเตอร์ในแต่ละข้อต่อไปนี้
   (ก) $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ (ข) $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{bmatrix}8\\5\\-6\end{bmatrix}$ (ค) $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix}2\\-5\\1\end{bmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{bmatrix}4\\-1\\2\end{bmatrix}$
   (ง) $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\-4\\0\\1\end{bmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{bmatrix}7\\-7\\0\\1\end{bmatrix}$ (จ) $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix}3\\-1\\2\\-1\end{bmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{bmatrix}-5\\9\\-9\\3\end{bmatrix}$ (ฉ) $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$
8. จงหาฐานหลัก และ ใช้กระบวนการกราม-ชมิดต์สร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติของ $\text{Col}\,A$ เมื่อกำหนด
   (ก) $A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ (ข) $A = \begin{bmatrix}-1 & 6 & 6\\1 & -2 & 6\\1 & -4 & -3\\3 & -8 & 3\end{bmatrix}$ (ค) $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\1 & -1 & 1 & 1\\1 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$
9. จงหาการแยกตัวประกอบ $QR$ ของเมทริกซ์ $A$ ต่อไปนี้
   (ก) $A = \begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 3\end{bmatrix}$ (ข) $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}$ (ค) $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\-2 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}$
   (ง) $A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ (จ) $A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 1\\1 & 2 & 0\end{bmatrix}$ (ฉ) $A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\-1 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$
10. ให้ $H$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$ จงแสดงว่า
    (ก) $H \cap H^{\perp} = \{\vec{0}\}$ (ข) $(H^{\perp})^{\perp} = H$
11. ให้ $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากของปริภูมิย่อย $H$ ของ $\mathbb{R}^n$ จงแสดงว่าฟังก์ชัน $T : \mathbb{R}^n \to H$ ซึ่งกำหนดโดย $T(\vec{x}) = \text{proj}_H(\vec{x})$ สำหรับทุก ๆ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ เป็นการแปลงเชิงเส้น
12. ให้ $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติของปริภูมิย่อย $H$ ของ $\mathbb{R}^n$ และ $\vec{y}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ จงพิสูจน์ว่า
    (ก) $\text{proj}_H\vec{y} = (\vec{y}\cdot\vec{u}_1)\vec{u}_1 + (\vec{y}\cdot\vec{u}_2)\vec{u}_2 + \cdots + (\vec{y}\cdot\vec{u}_p)\vec{u}_p$
    (ข) ถ้า $U = \begin{bmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \ldots & \vec{u}_p\end{bmatrix}$ แล้ว $\text{proj}_H\vec{y} = (UU^T)\vec{y}$

## 4.3 ปัญหากำลังสองน้อยสุด (เพิ่มเติม)

ให้ $H$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$ และ $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$

สังเกตว่าถ้า $\vec{y} \in H$ แล้ว $\text{proj}_H\vec{y} = \vec{y}$ ในกรณีที่ $\vec{y} \notin H$ เราจะได้ว่า $\|\vec{y} - \text{proj}_H\vec{y}\|$ เป็นระยะทางที่สั้นสุดจาก $\vec{y}$ ไปยัง $H$ จาก

**ทฤษฎีบท 4.3.1** [ทฤษฎีบทการประมาณที่ดีสุด (The Best Approximation Theorem)]
*ให้ $H$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^n$ และ $\vec{y}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $\mathbb{R}^n$ จะได้ว่า $\hat{y} = \mathrm{proj}_H\vec{y}$ เป็นจุดบนปริภูมิย่อย $H$ ซึ่งใกล้ $\vec{y}$ มากสุดในแง่*

$$\|\vec{y} - \hat{y}\| < \|\vec{y} - \vec{v}\|$$

*สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{v}$ ใน $H \setminus \{\hat{y}\}$*

โดยทฤษฎีบทข้างต้นเราอาจเรียก $\mathrm{proj}_H\vec{y}$ ว่า**การประมาณที่ดีสุดของ $\vec{y}$ โดยเวกเตอร์ใน $H$ (the best approximation to $\vec{y}$ by elements of $H$)** และเราเรียก $\|\vec{y} - \mathrm{proj}_H\vec{y}\|$ ว่า**ระยะทาง (distance) จาก $\vec{y}$ ไปยังปริภูมิย่อย $H$**

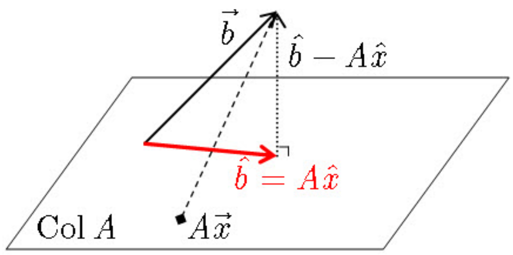
**ตัวอย่าง 4.3.1** จงหาการประมาณที่ดีสุดของ $\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ โดยเวกเตอร์ในปริภูมิย่อย $H = \mathrm{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ เมื่อ $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

**วิธีทำ** เพราะว่า $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$ ดังนั้น $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับ $H$
เราจึงได้โดยทฤษฎีบท 4.3.1 ว่า

$$\hat{y} = \mathrm{proj}_H\vec{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\vec{u}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2}\vec{u}_2 = \frac{9}{30}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{-3}{6}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ 2 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

เป็นการประมาณที่ดีสุดของ $\vec{y}$ โดยเวกเตอร์ในปริภูมิย่อย $H$ □

เมื่อระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \vec{b}$ ไม่มีผลเฉลย นั่นคือ $\vec{b}$ ไม่อยู่ใน $\mathrm{Col}\,A$ โดยทฤษฎีบท 4.3.1 เราอาจใช้ตัวประมาณที่ดีสุด $\hat{b}$ จากการฉายเชิงตั้งฉากของเวกเตอร์ $\vec{b}$ บน $\mathrm{Col}\,A$ แล้วหาผลเฉลย $\hat{x}$ ของระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \hat{b}$ ซึ่งเป็นจุดบน $\mathrm{Col}\,A$ ที่อยู่ใกล้ $\vec{b}$ มากสุด ดังรูป




ดังนั้น เราสรุปได้ว่า

**บทแทรก 4.3.2** *ถ้า $A$ เป็นเมทริกซ์มิติ $m \times n$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^m$ เราได้ว่า ระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \hat{b}$ เป็นระบบเชิงเส้นต้องกัน เมื่อ $\hat{b} = \mathrm{proj}_{\mathrm{Col}\,A}\vec{b}$ และผลเฉลย $\hat{x}$ ของระบบเชิงเส้นนี้สอดคล้อง*

$$\|\vec{b} - A\hat{x}\| \le \|\vec{b} - A\vec{x}\|$$

*สำหรับทุก ๆ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$*

เราเรียกผลเฉลยของระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \hat{b}$ ว่า**ผลเฉลยกำลังสองน้อยสุด (least-squares solution) ของระบบเชิงเส้น** $A\vec{x} = \vec{b}$ ซึ่งเมื่อหลักของเมทริกซ์ $A$ ตั้งฉากกัน เราสามารถหาผลเฉลยกำลังสองน้อยสุดได้โดยง่าย เช่น

**ตัวอย่าง 4.3.2** จงหาผลเฉลยกำลังสองน้อยสุดของระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \vec{b}$ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \text{ และ } \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

**วิธีทำ** สังเกตว่าหลักของเมทริกซ์ $A$ ตั้งฉากกัน ดังนั้นถ้า $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น

$$\hat{b} = \mathrm{proj}_{\mathrm{Col}\,A}\vec{b} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 + \frac{\vec{b}\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 = \frac{8}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{45}{90}\begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

จึงได้โดยบทแทรก 4.3.2 ว่า $\hat{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ เป็นผลเฉลยกำลังสองน้อยสุดของ $A\vec{x} = \vec{b}$ □

ในกรณีทั่วไป ให้ $A$ เป็นเมทริกซ์มิติ $m \times n$, $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^m$ และ $\hat{b} = \mathrm{proj}_{\mathrm{Col}\,A}\vec{b}$ ถ้า $\hat{x}$ สอดคล้องระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \hat{b}$ โดยทฤษฎีบทการแยกเชิงตั้งฉาก เราได้ว่า $\vec{b} - \hat{b} = \vec{b} - A\hat{x} \in (\mathrm{Col}\,A)^{\perp}$ ดังนั้น $b - A\vec{x}$ ตั้งฉากกับทุก ๆ หลักของเมทริกซ์ $A$ นั่นคือ ถ้า $A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$ เมื่อ $\vec{v}_j \in \mathbb{R}^m$ แล้ว $\vec{v}_j \cdot (\vec{b} - A\vec{x}) = 0$ สำหรับทุก $j = 1, 2, \dots, n$ ทำให้

$$A^T(\vec{b} - A\hat{x}) = \begin{bmatrix} \vec{v}_1^T \\ \vec{v}_2^T \\ \vdots \\ \vec{v}_n^T \end{bmatrix}(\vec{b} - A\hat{x}) = \begin{bmatrix} \vec{v}_1^T(\vec{b} - A\hat{x}) \\ \vec{v}_2^T(\vec{b} - A\hat{x}) \\ \vdots \\ \vec{v}_n^T(\vec{b} - A\hat{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1\cdot(\vec{b} - A\hat{x}) \\ \vec{v}_2\cdot(\vec{b} - A\hat{x}) \\ \vdots \\ \vec{v}_n\cdot(\vec{b} - A\hat{x}) \end{bmatrix} = \vec{0}_n$$

เพราะฉะนั้น

$$A^TA\hat{x} = A^T\vec{b}$$

นั่นคือ

**ทฤษฎีบท 4.3.3** *เซตผลเฉลยกำลังสองน้อยสุดของระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \vec{b}$ เป็นเซตเดียวกับเซตผลเฉลยของสมการเมทริกซ์ $A^TA\vec{x} = A^T\vec{b}$ ซึ่งเป็นระบบเชิงเส้นต้องกัน*

เราเรียกสมการ $A^TA\vec{x} = A^T\vec{b}$ ว่า**สมการปรกติ (normal equations)** สำหรับระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \vec{b}$ ซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญในการหาผลเฉลยกำลังสองน้อยสุดของระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \vec{b}$

**ตัวอย่าง 4.3.3** จงหาผลเฉลยกำลังสองน้อยสุดของระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \vec{b}$ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

**วิธีทำ** สร้างสมการปรกติโดยคำนวณ

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -11 \\ -11 & 22 \end{bmatrix}$$

และ

$$A^T \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 11 \end{bmatrix}$$

ทำให้ได้สมการปรกติ $A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}$ เป็น

$$\begin{bmatrix} 6 & -11 \\ -11 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 11 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ผลเฉลยกำลังสองน้อยสุด $\hat{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 22 & 11 \\ 11 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ □

**ตัวอย่าง 4.3.4** จงหาผลเฉลยกำลังสองน้อยสุดของระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \vec{b}$ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

**วิธีทำ** สร้างสมการปรกติโดยคำนวณ

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

และ

$$A^T \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

ทำให้ได้สมการปรกติ $A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}$ เป็น

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

ซึ่งเราหาผลเฉลยโดยลดรูปเมทริกซ์แต่งเติมจนได้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นไดลดรูปดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 14 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{นั่นคือ} \quad \begin{array}{rcr} x_1 + x_3 & = & 5 \\ x_2 - x_3 & = & -3 \end{array}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - x_3 \\ -3 + x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ } x_3 \in \mathbb{R}$$

เป็นผลเฉลยกำลังสองน้อยสุดของระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \vec{b}$ $\square$

จากผลเฉลยกำลังสองน้อยสุด $\hat{x}$ จะได้ว่า $A\hat{x}$ เป็นตัวประมาณที่ดีสุดของ $\vec{b}$

เรียกระยะทางจาก $\vec{b}$ ไปยัง $A\hat{x}$ ซึ่งเท่ากับ $\|\vec{b} - A\hat{x}\|$ ว่า**ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองน้อยสุด (least-squares error)** ของการประมาณนี้

**ตัวอย่าง 4.3.5** จากตัวอย่าง 4.3.3 เรามี

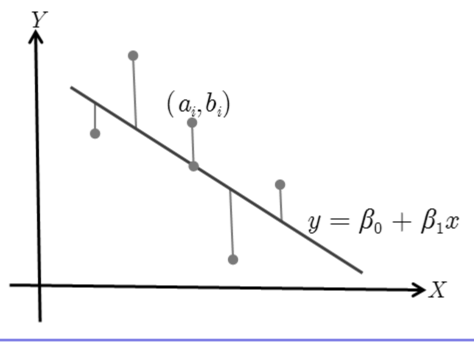
$$\vec{b} - A\hat{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ทำให้ได้ว่าค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองน้อยสุดของการประมาณคือ $\|\vec{b} - A\hat{x}\| = \sqrt{11}$

บ่อยครั้งในการเก็บรวบรวมข้อมูลทำให้เกิดจุด

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$$

ซึ่งเมื่อนำมากราฟ เราจะเห็นว่าความสัมพันธ์ของจุดต่าง ๆ ดังกล่าวกระจายใกล้เคียงกับเส้นตรง ดังนั้นเราจึงสนใจที่จะหา $\beta_0$ และ $\beta_1$ ซึ่งทำให้เส้นตรง $y = \beta_0 + \beta_1 x$ อยู่ใกล้จุดต่าง ๆ มากสุดเท่าที่จะเป็นได้ เราเรียกเส้นตรงนี้ว่า**เส้นกำลังสองน้อยสุด (least-squares line)**



ถ้าจุดข้อมูลอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน เราได้ว่า $\beta_0$ และ $\beta_1$ สอดคล้องระบบเชิงเส้น

$$\begin{aligned}\beta_0 + \beta_1 a_1 &= b_1\\ \beta_0 + \beta_1 a_2 &= b_2\\ &\vdots\\ \beta_0 + \beta_1 a_n &= b_n\end{aligned}$$

ซึ่งเราเขียนเป็นสมการเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix}1 & a_1\\ 1 & a_2\\ \vdots & \vdots\\ 1 & a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$$

หรือ

$$A\vec{\beta} = \vec{b}$$

แต่จุดต่าง ๆ ไม่จำเป็นต้องอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ดังนั้นระบบเชิงเส้น $A\vec{\beta} = \vec{b}$ ไม่มีผลเฉลยและเราจะใช้ผลเฉลยกำลังสองน้อยสุดแก้ปัญหานี้

**ตัวอย่าง 4.3.6** จงหาเส้นกำลังสองน้อยสุดของจุดข้อมูล

$$(0,1),(1,1),(2,2),(3,2)$$

**วิธีทำ** นำจุดข้อมูลที่กำหนดให้มาสร้างเมทริกซ์ $A$ และเวกเตอร์ $\vec{b}$ ได้เป็น

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 2\\ 2\end{bmatrix}$$

และหาผลเฉลยกำลังสองน้อยสุดของระบบเชิงเส้น $A\vec{\beta} = \vec{b}$ โดยสร้างสมการปรกติจาก

$$A^TA = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 6\\ 6 & 14\end{bmatrix} \text{ และ } A^T\vec{b} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 2\\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\ 11\end{bmatrix}$$

ซึ่งทำให้ได้สมการปรกติ $A^TA\vec{\beta} = A^T\vec{b}$ เป็น

$$\begin{bmatrix}4 & 6\\ 6 & 14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\ 11\end{bmatrix}$$

ดังนั้น ผลเฉลยกำลังสองน้อยสุด $\hat{\beta} = \begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix}14 & -6\\ -6 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ 11\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.9\\ 0.4\end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น เส้นกำลังสองน้อยสุดของจุดข้อมูลคือ $y = \beta_0 + \beta_1 x = 0.9 + 0.4x$ □

**แบบฝึกหัด 4.3**

1. จงหาการประมาณที่ดีสุดของ $\vec{y}$ โดยเวกเตอร์ใน $H = \text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ เมื่อ

(ก) $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ข) $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 13 \end{bmatrix}$

2. จงหาระยะทางจาก $\vec{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}$ ไปยังปริภูมิย่อย $H = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

3. จงหาผลเฉลยกำลังสองน้อยสุดของระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \vec{b}$ เมื่อ $A$ เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากในแต่ละข้อต่อไปนี้

(ก) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ (ข) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

(ค) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$ (ง) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. จงหาผลเฉลยกำลังสองน้อยสุดของระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \vec{b}$ พร้อมทั้งหาค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองน้อยสุดของการประมาณในแต่ละข้อต่อไปนี้

(ก) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ข) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

(ค) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ (ง) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

5. จงหาเส้นกำลังสองน้อยสุดของจุดข้อมูลต่อไปนี้

(ก) $(1,0), (2,1), (4,2), (5,3)$ (ข) $(-3,8), (-1,5), (1,3), (3,0)$

(ค) $(1,1), (2,4), (3,6), (4,9)$ (ง) $(0,0), (1,1), (2,3), (3,8)$

## 4.4 การแปลงเป็นทแยงมุมของเมทริกซ์สมมาตร

เราเรียกเมทริกซ์ $A$ ว่า**เมทริกซ์สมมาตร (symmetric matrix)** ก็ต่อเมื่อ $A^T = A$

**ตัวอย่าง 4.4.1** (ก) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร

(ข) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ ไม่เป็นเมทริกซ์สมมาตร

**ตัวอย่าง 4.4.2** จงแปลงเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ เป็นทแยงมุม

**วิธีทำ** คำนวณสมการลักษณะเฉพาะของ $A$ ได้เป็น

$$\det(A-\lambda I_3)=(\lambda+1)(\lambda+4)(5-\lambda)=0$$

ดังนั้นค่าเฉพาะของ $A$ คือ $\lambda=-1,-4,5$
ต่อมา เราจะหาปริภูมิเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าเฉพาะแต่ละค่าดังนี้

$\lambda=-1$ ดำเนินการแถวลดรูป $A+I_3$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A+I_3=\begin{bmatrix}3&3&3\\3&0&0\\3&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับ} \quad \begin{aligned}x_1&=0\\x_2+x_3&=0\end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $x_1=0$ และ $x_2=-x_3$

เพราะฉะนั้น $\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-x_3\\x_3\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$

ดังนั้น $A_{-1}=\operatorname{Nul}(A+I_3)=\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$

$\lambda=-4$ ดำเนินการแถวลดรูป $A+4I_3$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A+4I_3=\begin{bmatrix}6&3&3\\3&3&0\\3&0&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับ} \quad \begin{aligned}x_1+x_3&=0\\x_2-x_3&=0\end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $x_1=-x_3$ และ $x_2=x_3$

เพราะฉะนั้น $\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_3\\x_3\\x_3\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$

ดังนั้น $A_{-4}=\operatorname{Nul}(A+4I_3)=\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

$\lambda=5$ ดำเนินการแถวลดรูป $A-5I_3$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A-5I_3=\begin{bmatrix}-3&3&3\\3&-6&0\\3&0&-6\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับ} \quad \begin{aligned}x_1-2x_3&=0\\x_2-x_3&=0\end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $x_1=2x_3$ และ $x_2=x_3$

เพราะฉะนั้น $\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_3\\x_3\\x_3\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$

ดังนั้น $A_5=\operatorname{Nul}(A+5I_3)=\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

โดยทฤษฎีบท 3.2.5 เราสรุปได้ว่า $A$ สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้

และเรามี $A = PDP^{-1}$ โดยที่ $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ และ $P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\square$

จากตัวอย่าง 4.4.2 สังเกตว่าเมทริกซ์ $P$ ที่สร้างจากเวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะซึ่งแตกต่างกันแต่ละค่าเป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก เราสรุปกรณีทั่วไปได้ดังนี้

**ทฤษฎีบท 4.4.1** *ถ้า $A$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรแล้วปริภูมิเฉพาะสองปริภูมิซึ่งสมนัยกับค่าเฉพาะที่แตกต่างกันจะตั้งฉากกัน*

เรากล่าวว่า เมทริกซ์จัตุรัส $A$ **สามารถแปลงเป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้ (orthogonally diagonalizable)** ถ้าเรามีเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ $P$ (เมทริกซ์เชิงตั้งฉาก $P$ ซึ่ง $P^{-1} = P^T$) และเมทริกซ์ทแยงมุม $D$ ซึ่ง $A = PDP^{-1} = PDP^T$

**ตัวอย่าง 4.4.3** ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

จากตัวอย่าง 4.4.2 เราสังเกตว่าเราอาจเลือกเมทริกซ์

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

ซึ่งเป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ ทำให้ได้ว่า $P^{-1} = P^T$ และ $A = P \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} P^T$

ดังนั้น $A$ สามารถแปลงเป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้

สังเกตว่า ถ้า $A$ สามารถแปลงเป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้ เรามีเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ $P$ และเมทริกซ์ทแยงมุม $D$ ซึ่ง $A = PDP^{-1} = PDP^T$ ดังนั้น

$$A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = A$$

นั่นคือ $A$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร ยิ่งกว่านั้น เรามี

**ทฤษฎีบท 4.4.2** *ให้ $A$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัส เราได้ว่า $A$ สามารถแปลงเป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้ก็ต่อเมื่อ $A$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร*

ในการแปลงเมทริกซ์สมมาตร $A$ เป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากนั้น เราเริ่มจากหาฐานหลักสำหรับแต่ละปริภูมิเฉพาะของ $A$ และหาฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับปริภูมิเฉพาะของ $A$ จากฐานหลักนั้น ซึ่งบางครั้งต้องอาศัยกระบวนการกราม-ชมิทต์ที่ได้ศึกษาไว้แล้ว และนำฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติเหล่านั้นมาสร้างเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ $P$ ที่ทำให้ $A = PDP^T$ เมื่อ $D$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมที่สมาชิกทแยงมุมคือค่าเฉพาะของเมทริกซ์ $A$ ที่สมนัยตามลำดับกับเวกเตอร์เฉพาะหนึ่งหน่วยในเมทริกซ์ $P$ เช่น

**ตัวอย่าง 4.4.4** จงแปลงเมทริกซ์สมมาตร $A = \begin{bmatrix} 7 & -16 & -8 \\ -16 & 7 & 8 \\ -8 & 8 & -5 \end{bmatrix}$
ซึ่งมีสมการลักษณะเฉพาะเป็น $(27-\lambda)(\lambda+9)^2 = 0$ เป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉาก

**วิธีทำ** ค่าเฉพาะของ $A$ คือ $\lambda = 27, -9, -9$
ต่อมา เราจะหาปริภูมิเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าเฉพาะแต่ละค่าดังนี้
$\lambda = 27$ ดำเนินการแถวลดรูป $A - 27I_3$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A - 27I_3 = \begin{bmatrix} -20 & -16 & -8 \\ -16 & -20 & 8 \\ -8 & 8 & -32 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับ} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $x_1 = -2x_3$ และ $x_2 = 2x_3$ เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
ดังนั้น $A_{27} = \operatorname{Nul}(A + 27I_3) = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติฐานหนึ่งเป็น $\left\{\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}\right\}$
$\lambda = -9$ ดำเนินการแถวลดรูป $A + 9I_3$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A + 9I_3 = \begin{bmatrix} 16 & -16 & -8 \\ -16 & 16 & 8 \\ -8 & 8 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งสมนัยกับ $x_1 - x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0$ ทำให้ได้ว่า $x_1 = x_2 + \frac{1}{2}x_3$
เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
ดังนั้น $A_{-9} = \operatorname{Nul}(A + 9I_3) = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$
และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ ซึ่งไม่เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉาก
เราจึงใช้กระบวนการกราม-ชมิดต์หาฐานหลักเชิงตั้งฉากของ $A_{-9}$ ดังนี้
ให้ $\vec{v}_1 = \vec{x}_1$ และ $\vec{v}_2 = \vec{x}_2 - \dfrac{\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1}{\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1}\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$ โดยเราอาจเลือก $\vec{v}_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ แทน $\vec{v}_2$
ดังนั้น $\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{4}{\sqrt{18}} \end{bmatrix}\right\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติฐานหนึ่งของ $A_{-9}$
ดังนั้น $A$ สามารถแปลงเป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้และเรามี $A = PDP^T$

โดยที่ $D = \begin{bmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$ และ $P = \begin{bmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} \end{bmatrix}$ $\square$

เราเรียกเซตของค่าเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์จัตุรัส $A$ ว่า**สเปกตรัม (spectrum) ของเมทริกซ์** $A$ โดยในกรณีที่ $A$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร เราได้

**ทฤษฎีบท 4.4.3** [ทฤษฎีบทเชิงสเปกตรัมสำหรับเมทริกซ์สมมาตร (The Spectral Theorem for Symmetric Matrices)] *เมทริกซ์สมมาตร $A$ มีสมบัติดังต่อไปนี้*

1. *ค่าเฉพาะทุกตัวของ $A$ เป็นจำนวนจริง*
2. *มิติของปริภูมิเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าเฉพาะ $\lambda$ มีค่าเท่ากับจำนวนการซ้ำกันของราก $\lambda$ ในสมการลักษณะเฉพาะ*
3. *ปริภูมิเฉพาะสองปริภูมิซึ่งสมนัยกับค่าเฉพาะที่ต่างกันจะตั้งฉากกัน*
4. *$A$ สามารถแปลงเป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้*

ให้ $A$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรมิติ $n \times n$ ดังนั้น $A$ สามารถแปลงเป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้ ทำให้มีเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ $P$ ซึ่งทำให้ $A = PDP^T$ โดยที่หลักของเมทริกซ์ $P$ คือเวกเตอร์เฉพาะหนึ่งหน่วย $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ ที่สมนัยกับค่าเฉพาะ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (ซ้ำได้) ซึ่งเป็นสมาชิกทแยงมุมของเมทริกซ์ทแยงมุม $D$ และ

$$\begin{aligned} A = PDP^T &= \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \ldots & \vec{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vec{u}_2^T \\ \vdots \\ \vec{u}_n^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1\vec{u}_1 & \lambda_2\vec{u}_2 & \ldots & \lambda_n\vec{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vec{u}_2^T \\ \vdots \\ \vec{u}_n^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

นั่นคือ เราสามารถเขียน $A$ ได้ในรูป

$$A = \lambda_1\vec{u}_1\vec{u}_1^T + \lambda_2\vec{u}_2\vec{u}_2^T + \cdots + \lambda_n\vec{u}_n\vec{u}_n^T$$

เรียกว่า**การแยกเชิงสเปกตรัม (spectral decomposition) ของเมทริกซ์** $A$ โดยแต่ละพจน์ในการแยกนี้จะขึ้นกับ ค่าเฉพาะหรือสเปกตรัม และเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ ซึ่งมีแรงก์เป็น 1 (สังเกตว่า $\operatorname{Col}(\vec{u}_i\vec{u}_i^T) = \operatorname{Span}\{\vec{u}_i\}$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \ldots, n$)

**ตัวอย่าง 4.4.5** เมทริกซ์สมมาตร $A$ ซึ่ง

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

มีการแยกเชิงสเปกตรัมเป็น

$$\begin{aligned} A &= 8\begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \\ &= 8\begin{bmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**แบบฝึกหัด 4.4**

1. จงแปลงเมทริกซ์ต่อไปนี้เป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉาก

   (ก) $A = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ (ข) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (ค) $A = \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix}$ (ง) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1.5 \\ -1.5 & 7 \end{bmatrix}$

   (จ) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (ฉ) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (ช) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

   (ซ) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix}$ (ฌ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (ญ) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

   (ฎ) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \lambda = 0, 2$ (ฏ) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \lambda = 1, 3$

2. จงหาการแยกเชิงสเปกตรัมของเมทริกซ์สมมาตร $A$ ในข้อ 1. (ก)–(ง)

3. ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

   จงแสดงว่า 5 เป็นค่าเฉพาะของ $A$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์เฉพาะของ $A$ และจงแปลง $A$ เป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉาก

4. ให้ $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

   จงแสดงว่า $\vec{v}_1$ และ $\vec{v}_2$ เป็นเวกเตอร์เฉพาะของ $A$ และจงแปลง $A$ เป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉาก

5. ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ โดยที่ $b \neq 0$ จงแปลง $A$ เป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉาก

6. จงแสดงว่า สำหรับเมทริกซ์ $A$ ใด ๆ เราได้ว่า $AA^T$ และ $A^TA$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร

7. ให้ $A$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรไม่เอกฐาน จงแสดงว่า $A^{-1}$ สามารถแปลงเป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้

8. ให้ $A$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรมิติ $n \times n$ จงแสดงว่า $(A\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (A\vec{y})$ สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

## 4.5 รูปแบบกำลังสอง

**ตัวอย่าง 4.5.1** ให้ $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ จงหา $\vec{x}^TA\vec{x}$ สำหรับเมทริกซ์ $A$ ต่อไปนี้

(ก) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ เราได้ว่า $\vec{x}^TA\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 - 3x_2^2$

(ข) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ เราได้ว่า $\vec{x}^T A\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$

ให้ $A$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร เราเรียกฟังก์ชัน $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ซึ่งกำหนดโดย

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x} = \vec{x} \cdot (A\vec{x}) = (A\vec{x}) \cdot \vec{x}$$

สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ว่า**รูปแบบกำลังสอง (quadratic form)** และเราเรียกเมทริกซ์สมมาตร $A$ ว่า **เมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสอง $Q$ (matrix of the quadratic form $Q$)**

**ข้อสังเกต** รูปแบบกำลังสอง $Q$ มี $Q(\vec{0}) = 0$ แต่ไม่เป็นการแปลงเชิงเส้น

**ตัวอย่าง 4.5.2** ให้ $Q(\vec{x}) = 3x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + x_2x_3$ สำหรับทุก $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ จงแสดงว่า $Q$ เป็นรูปแบบกำลังสอง พร้อมทั้งหาเมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสอง $Q$

**วิธีทำ** ให้ $A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรซึ่ง $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x}$

ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = Q(\vec{x})$$

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2dx_1x_2 + 2ex_1x_3 + 2fx_2x_3 = 3x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + x_2x_3$$

ทำให้ได้ว่า $a = 3, b = -5, c = 1, d = -1, e = 0$ และ $f = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & -5 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ $\square$

**ข้อสังเกต** เราได้ว่ารูปแบบกำลังสองบน $\mathbb{R}^2$ อยู่ในรูปแบบ

$$Q(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = ax_1^2 + bx_2^2 + 2cx_1x_2$$

และรูปแบบกำลังสองบน $\mathbb{R}^3$ อยู่ในรูปแบบ

$$\begin{aligned} Q(\vec{x}) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2dx_1x_2 + 2ex_1x_3 + 2fx_2x_3 \end{aligned}$$

เราเรียกพจน์ $cx_ix_j$ เมื่อ $i \neq j$ ในรูปแบบกำลังสอง $Q$ ว่า**พจน์ผลคูณไขว้ (cross-product term)**
ให้ $\vec{x}$ แทนเวกเตอร์ตัวแปรใน $\mathbb{R}^n$ เราเรียกสมการ

$$\vec{x} = P\vec{y} \quad \text{หรือ} \quad \vec{y} = P^{-1}\vec{x}$$

เมื่อ $P$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานและ $\vec{y}$ แทนเวกเตอร์ตัวแปรตัวใหม่ใน $\mathbb{R}^n$ ว่า**การเปลี่ยนตัวแปร (change of variables)**

ต่อไปให้ $A$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรและแปลง $A$ เป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉาก โดยเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ $P$ และเมทริกซ์ทแยงมุม $D$ นั่นคือ $P^TAP = D$ ดังนั้น สำหรับรูปแบบกำลังสอง $\vec{x}^TA\vec{x}$ ในเวกเตอร์ตัวแปร $\vec{x}$ เราสามารถเปลี่ยนตัวแปรใหม่โดยใช้เมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ $P$ ได้เป็น $\vec{x} = P\vec{y}$ ซึ่งทำให้

$$\vec{x}^TA\vec{x} = (P\vec{y})^TA(P\vec{y}) = \vec{y}^T(P^TAP)\vec{y} = \vec{y}^TD\vec{y}$$

ไม่มีพจน์ผลคูณไขว้ในตัวแปร $\vec{y}$ ดังนั้น

**ทฤษฎีบท 4.5.1** [ทฤษฎีบทแกนมุขสำคัญ (The Principal Axis Theorem)]
*ให้ $A$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร เราได้ว่ามีการเปลี่ยนตัวแปร $\vec{x} = P\vec{y}$ ซึ่งแปลงรูปแบบกำลังสอง $\vec{x}^TA\vec{x}$ ให้อยู่ในรูปแบบ $\vec{y}^TD\vec{y}$ ซึ่งไม่มีพจน์ผลคูณไขว้*

**ตัวอย่าง 4.5.3** ให้ $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_1x_2$ เป็นรูปแบบกำลังสอง
จงเปลี่ยนตัวแปร $\vec{x} = P\vec{y}$ ซึ่งทำให้ $Q$ ไม่มีพจน์ผลคูณไขว้
พร้อมทั้งร่างกราฟของความสัมพันธ์ $3x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_1x_2 = 14$ อย่างคร่าว ๆ

**วิธีทำ** หาเมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสองได้เป็น $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$
คำนวณค่าเฉพาะของ $A$ จากสมการลักษณะเฉพาะของ $A$

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = (\lambda - 2)(\lambda - 7) = 0$$

ดังนั้น $\lambda = 2, 7$
ต่อมา เราจะหาปริภูมิเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าเฉพาะแต่ละค่าดังนี้
$\lambda = 2$ ดำเนินการแถวลดรูป $A - 2I_2$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A - 2I_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับ} \quad x_1 - 2x_2 = 0$$

ทำให้ได้ว่า $x_1 = 2x_2$ เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
ดังนั้น $\mathrm{Nul}\,(A - 2I_2) = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$
$\lambda = 7$ ดำเนินการแถวลดรูป $A - 7I_2$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A - 7I_2 = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับ} \quad x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0$$

ทำให้ได้ว่า $x_2 = -2x_1$ เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\text{Nul}\,(A - 7I_2) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\right\}$

เนื่องจาก $A$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร โดยทฤษฎีบท 4.4.3 จะได้ว่า $A$ แปลงเป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้ นั่นคือเรามี $A = PDP^T$ โดยที่

$$D = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 7\end{bmatrix} \text{ และ } P = \begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix} \text{ เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ}$$

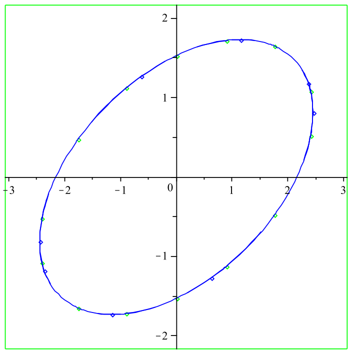
เพราะฉะนั้นถ้าเราแทนค่า $\vec{x} = P\vec{y}$ จะได้ว่า

$$Q(x_1, x_2) = \vec{x}^T A\vec{x} = (P\vec{y})^T A(P\vec{y}) = \vec{y}^T(P^T AP)\vec{y} = \vec{y}^T D\vec{y}$$

นั่นคือ เราเปลี่ยนตัวแปรให้ความสัมพันธ์ $3x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_1x_2 = 14$ ไม่มีพจน์ผลคูณไขว้เป็น

$$2y_1^2 + 7y_2^2 = 14$$

ซึ่งให้กราฟเป็นวงรีสัมพัทธ์กับแกนพิกัด $y_1$ และ $y_2$ ดังรูป □




**ตัวอย่าง 4.5.4** จงเปลี่ยนตัวแปร $\vec{x} = P\vec{y}$ ซึ่งทำให้ความสัมพันธ์

$$x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 + 4\sqrt{5}x_1 + 3\sqrt{5}x_2 = 0$$

ไม่มีพจน์ผลคูณไขว้ พร้อมทั้งร่างกราฟของความสัมพันธ์นี้อย่างคร่าว ๆ

**วิธีทำ** ก่อนอื่นเราพิจารณารูปแบบกำลังสอง $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2$ ซึ่งมีเมทริกซ์เป็น $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}$
ดังนั้นเราจึงแปลงเมทริกซ์สมมาตร $A$ เป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากโดยคำนวณค่าเฉพาะของ $A$ จากสมการลักษณะเฉพาะของ $A$

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\2 & 4-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5) = 0$$

ดังนั้น $\lambda = 0, 5$
ต่อมา เราจะหาปริภูมิเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าเฉพาะแต่ละค่าดังนี้
$\lambda = 0$ ดำเนินการแถวลดรูป $A - 0I_2$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A - 0I_2 = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับ} \quad x_1 + 2x_2 = 0$$

ทำให้ได้ว่า $x_1 = -2x_2$ เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\text{Nul}\,(A - 0I_2) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\lambda = 5$ ดำเนินการแถวลดรูป $A - 5I_2$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A - 5I_2 = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับ} \quad x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0$$

ทำให้ได้ว่า $x_2 = 2x_1$ เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\text{Nul}\,(A - 5I_2) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

เพราะฉะนั้น เรามี $A = PDP^T$ โดยที่

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ และ } P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \text{ เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ}$$

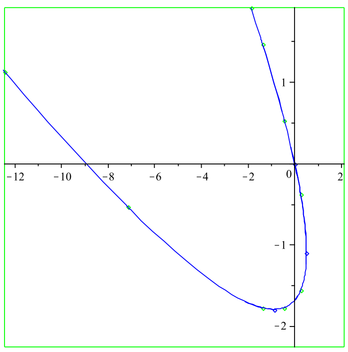
เพราะฉะนั้นถ้าเราแทนค่า $\vec{x} = P\vec{y}$ จะได้ว่า

$$Q(x_1, x_2) = \vec{x}^T A\vec{x} = (P\vec{y})^T A(P\vec{y}) = \vec{y}^T(P^T AP)\vec{y} = \vec{y}^T D\vec{y}$$

และเราสามารถเปลี่ยนตัวแปรให้ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ไม่มีพจน์ผลคูณไขว้เป็น

$$\begin{aligned} x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 + 4\sqrt{5}x_1 + 3\sqrt{5}x_2 &= \vec{x}^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 4\sqrt{5} & 3\sqrt{5} \end{bmatrix} \vec{x} \\ &= \vec{y}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \vec{y} + \begin{bmatrix} 4\sqrt{5} & 3\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \vec{y} \\ &= 5y_2^2 - 5y_1 + 10y_2 \end{aligned}$$

นั่นคือ $5y_2^2 - 5y_1 + 10y_2 = 0$ ซึ่งให้กราฟเป็นพาราโบลาสัมพัทธ์กับแกนพิกัด $y_1$ และ $y_2$ ดังรูป □




**ตัวอย่าง 4.5.5** จงเปลี่ยนตัวแปร $\vec{x} = P\vec{y}$ ซึ่งทำให้ความสัมพันธ์

$$2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 24x_1 + 12x_2 + 12x_3 - 12 = 0$$

ไม่มีพจน์ผลคูณไขว้

**วิธีทำ** พิจารณารูปแบบกำลังสอง $Q(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ ซึ่งมีเมทริกซ์เป็น $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ดังนั้นเราจึงแปลงเมทริกซ์สมมาตร $A$ เป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากโดยคำนวณค่าเฉพาะของ $A$

จากสมการลักษณะเฉพาะของ $A$

$$\det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 - 3(2-\lambda) - 2 = -\lambda(\lambda-3)^2 = 0$$

ดังนั้น $\lambda = 0, 3$

ต่อมา เราจะหาปริภูมิเฉพาะซึ่งสมนัยกับค่าเฉพาะแต่ละค่าดังนี้

$\lambda = 0$ ดำเนินการแถวลดรูป $A - 0I_3$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A - 0I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับ} \quad \begin{aligned} x_1 &= -x_3 \\ x_2 &= x_3 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\text{Nul}\,(A - 0I_2) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\lambda = 3$ ดำเนินการแถวลดรูป $A - 3I_3$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A - 3I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับ} \quad x_1 = x_2 + x_3$$

เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\text{Nul}\,(A - 3I_2) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

และมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\left\{ \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ แต่ฐานหลักนี้ไม่เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากจึงใช้กระบวนการกราม-ชมิดต์เพื่อหาฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับ $\text{Nul}\,(A - 3I_2)$ ดังนี้

$$\vec{v}_1 = \vec{x}_1 \quad \text{และ} \quad \vec{v}_2 = \vec{x}_2 - \hat{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งอาจเลือก } \vec{v}_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}\right\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับ $\mathrm{Nul}\,(A-3I_2)$

เพราะฉะนั้น เรามี $A = PDP^T$ โดยที่

$$D = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix} \text{ และ } P = \begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix} \text{ เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ}$$

เพราะฉะนั้นถ้าเราแทนค่า $\vec{x} = P\vec{y}$ จะได้ว่า

$$Q(x_1,x_2) = \vec{x}^T A\vec{x} = (P\vec{y})^T A(P\vec{y}) = \vec{y}^T(P^TAP)\vec{y} = \vec{y}^T D\vec{y}$$

และเราสามารถเปลี่ยนตัวแปรให้ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ไม่มีพจน์ผลคูณไขว้เป็น

$$\begin{aligned}
2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3+24x_1+12x_2+12x_3-12 \\
&= \vec{x}^T\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}\vec{x} + \begin{bmatrix}24&12&12\end{bmatrix}\vec{x} - \begin{bmatrix}12\end{bmatrix} \\
&= \vec{y}^T\begin{bmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}\vec{y} + \begin{bmatrix}24&12&12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\vec{y} - \begin{bmatrix}12\end{bmatrix} \\
&= 3y_2^2+3y_3^2+\frac{36}{\sqrt{2}}y_2+\frac{36}{\sqrt{6}}y_3-12
\end{aligned}$$

นั่นคือ $y_2^2+y_3^2+6\sqrt{2}y_2+2\sqrt{6}y_3-4=0$ □

เราเรียกรูปแบบกำลังสอง $Q$ ว่า

(ก) **เป็นบวกแน่นอน (positive definite) [เป็นบวกกึ่งแน่นอน (positive semidefinite)]** ถ้า $Q(\vec{x}) > 0$ สำหรับทุก ๆ $\vec{x} \neq \vec{0}$ [$Q(\vec{x}) \geq 0$ สำหรับทุก ๆ $\vec{x}$]

(ข) **เป็นลบแน่นอน (negative definite) [เป็นลบกึ่งแน่นอน (negative semidefinite)]** ถ้า $Q(\vec{x}) < 0$ สำหรับทุก ๆ $\vec{x} \neq \vec{0}$ [$Q(\vec{x}) \leq 0$ สำหรับทุก ๆ $\vec{x}$]

(ค) **ไม่แน่นอน (indefinite)** ถ้า $Q(\vec{x})$ มีค่าได้ทั้งบวกและลบ

ซึ่งเราสามารถตรวจสอบได้จากค่าเฉพาะของเมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสอง ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 4.5.2** *ให้ $A$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรไม่เอกฐาน เราได้ว่ารูปแบบกำลังสอง $\vec{x}^TA\vec{x}$*
*(ก) เป็นบวกแน่นอน ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ ค่าเฉพาะของ $A$ มีค่าเป็นบวก*
*(ข) เป็นลบแน่นอน ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ ค่าเฉพาะของ $A$ มีค่าเป็นลบ*
*(ค) ไม่แน่นอน ก็ต่อเมื่อ $A$ มีค่าเฉพาะเป็นบวกและเป็นลบ*

**ตัวอย่าง 4.5.6** จงพิจารณาว่ารูปแบบกำลังสอง $Q$ ต่อไปนี้เป็นบวกแน่นอน เป็นลบแน่นอน หรือไม่แน่นอน

(ก) $Q(x_1,x_2) = 3x_1^2+6x_2^2-4x_1x_2$ (ข) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3$

**วิธีทำ** (ก) เมทริกซ์สำหรับ $Q$ คือ $A = \begin{bmatrix}3&-2\\-2&3\end{bmatrix}$

ซึ่งโดยตัวอย่าง 4.5.3 $A$ มีค่าเฉพาะ $\lambda = 2, 7 > 0$ ดังนั้น $Q$ เป็นบวกแน่นอน

(ข) เมทริกซ์สำหรับ $Q$ คือ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ เพราะฉะนั้น สมการลักษณะเฉพาะของ $A$ คือ

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-5) = 0$$

ทำให้ได้ว่า $A$ มีค่าเฉพาะ $\lambda = -2, 2, 5$ ดังนั้น $Q$ ไม่แน่นอน □

**แบบฝึกหัด 4.5**

1. จงหาค่าของ $\vec{x}^T A\vec{x}$ สำหรับเมทริกซ์สมมาตร $A$ ต่อไปนี้
   (ก) $\begin{bmatrix} 5 & 0.5 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix}$ (ข) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. จงแสดงว่า $Q$ เป็นรูปแบบกำลังสอง พร้อมทั้งหาเมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสอง $Q$
   (ก) $Q(x_1, x_2) = -5x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2$ (ข) $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2$
   (ค) $Q(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2$ (ง) $Q(x_1, x_2) = x_1x_2$
   (จ) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3$
   (ฉ) $Q(x_1, x_2, x_3) = 9x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3$

3. จงพิจารณาว่ารูปแบบกำลังสอง $Q$ ในข้อ 2. เป็นบวกแน่นอน เป็นลบแน่นอน หรือไม่แน่นอน และจงเปลี่ยนตัวแปร $\vec{x} = P\vec{y}$ ซึ่งทำให้ $Q$ ไม่มีพจน์ผลคูณไขว้

4. ให้ $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2$ เป็นรูปแบบกำลังสอง จงเปลี่ยนตัวแปร $\vec{x} = P\vec{y}$ ซึ่งทำให้ $Q$ ไม่มีพจน์ผลคูณไขว้ พร้อมทั้งร่างกราฟของความสัมพันธ์ $3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 = 1$ อย่างคร่าวๆ

5. จงหาค่าของ $k$ ทั้งหมดที่ทำให้รูปแบบกำลังสองต่อไปนี้เป็นบวกแน่นอน
   (ก) $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + kx_2^2 - 4x_1x_2$
   (ข) $Q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + kx_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$
   (ค) $Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2kx_2x_3$

6. โดยอาศัยการคำนวณในแบบฝึกหัด 4.4 ข้อ 1. (ก)–(ฉ) จงเปลี่ยนตัวแปร $\vec{x} = P\vec{y}$ ซึ่งทำให้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้ ไม่มีพจน์ผลคูณไขว้ พร้อมทั้งร่างกราฟของความสัมพันธ์ในข้อ (ก)–(ง) อย่างคร่าวๆ
   (ก) $8x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2 + 2\sqrt{5}x_1 + 4\sqrt{5}x_2 + 4 = 0$
   (ข) $x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1 + 6\sqrt{2}x_2 - 10 = 0$
   (ค) $9x_1^2 + 16x_2^2 - 24x_1x_2 + 25x_1 + 50x_2 - 12 = 0$
   (ง) $3x_1^2 + 7x_2^2 - 3x_1x_2 + 2\sqrt{10}x_1 + 2 = 0$
   (จ) $2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 72 = 0$
   (ฉ) $2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 16$

## 4.6 การแยกค่าเอกฐาน (เพิ่มเติม)

ให้ $A$ เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ จะได้ว่า $A^TA$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรมิติ $n$ และสามารถแปลงเป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากได้ ให้ $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติฐานหนึ่งของ $\mathbb{R}^n$ ที่ประกอบด้วยเวกเตอร์เฉพาะของ $A^TA$ และ ให้ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ เป็นค่าเฉพาะที่สมนัยกับแต่ละเวกเตอร์เฉพาะของ $A^TA$ ส่งผลให้ สำหรับแต่ละ $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ เรา

ได้ว่า

$$\begin{aligned}\|A\vec{v}_i\|^2 &= (A\vec{v}_i)^T A\vec{v}_i = \vec{v}_i^T A^T A\vec{v}_i \\ &= \vec{v}_i^T(\lambda_i\vec{v}_i) \quad \text{เพราะว่า } \vec{v}_i \text{ เป็นเวกเตอร์เฉพาะของ } A^TA \\ &= \lambda_i \quad \text{เพราะว่า } \vec{v}_i \text{ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย}\end{aligned}$$

ค่าเฉพาะของ $A^TA$ เป็นจำนวนจริงที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 และ $\sqrt{\lambda_i}$ เป็นความยาวของเวกเตอร์ $A\vec{v}_i$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

สังเกตว่าเราอาจเรียงอันดับค่าเฉพาะของ $A^TA$ ได้เป็น

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$$

เราเรียก $\sqrt{\lambda_1} \geq \sqrt{\lambda_2} \cdots \geq \sqrt{\lambda_n} \geq 0$ ว่า**ค่าเอกฐาน (singular values) ของ** $A$ และกำหนดให้ $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

ต่อไปสมมติว่า $A$ มีค่าเอกฐานที่ต่างจาก 0 อยู่ $r$ ตัว นั่นคือ $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$ เพราะว่าเวกเตอร์ $\vec{v}_i$ และ $\lambda_j\vec{v}_j$ ตั้งฉากกันทุก $i \neq j$ จะได้ว่า

$$(A\vec{v}_i)^T(A\vec{v}_j) = \vec{v}_i^T A^T A\vec{v}_j = \vec{v}_i^T(\lambda_j\vec{v}_j) = 0$$

ดังนั้น $\mathcal{B} = \{A\vec{v}_1, \ldots, A\vec{v}_r\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉาก ส่งผลให้เซตนี้เป็นเซตอิสระเชิงเส้น ซึ่งเราจะแสดงได้ว่า $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักของ $\operatorname{Col} A$ โดยให้ $\vec{y}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $\operatorname{Col} A$ ดังนั้น จะมี $\vec{x}$ ใน $\mathbb{R}^n$ ที่ $\vec{y} = A\vec{x}$ เพราะว่า $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^n$ ทำให้ มี $c_1, \ldots, c_n$ ใน $\mathbb{R}$ ซึ่ง

$$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\vec{y} = A\vec{x} &= c_1A\vec{v}_1 + \cdots + c_rA\vec{v}_r + c_{r+1}A\vec{v}_{r+1} + \cdots + c_nA\vec{v}_n \\ &= c_1A\vec{v}_1 + \cdots + c_rA\vec{v}_r + \vec{0} + \cdots + \vec{0}\end{aligned}$$

นั่นคือ $\vec{y}$ อยู่ใน $\operatorname{Span}\mathcal{B}$ ทำให้ได้ว่า $\{A\vec{v}_1, \ldots, A\vec{v}_r\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับ $\operatorname{Col} A$ และ $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Col} A = r$

เราสรุปจากการพิสูจน์ข้างต้นเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

**ทฤษฎีบท 4.6.1** *ให้ $A$ เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ และ $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติฐานหนึ่งของ $\mathbb{R}^n$ ที่ประกอบด้วยเวกเตอร์เฉพาะของ $A^TA$ ซึ่งเรียงอันดับค่าเฉพาะที่สมนัยกับแต่ละเวกเตอร์เป็น $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ สมมติว่า $A$ มีค่าเอกฐานที่ต่างจาก 0 อยู่ $r$ ตัว จะได้ว่า $\{A\vec{v}_1, \ldots, A\vec{v}_r\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับ $\operatorname{Col} A$ และ $\operatorname{rank} A = r$*

**ตัวอย่าง 4.6.1** ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาค่าเอกฐานของ $A$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น

$$\det(A^TA - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - 2(1-\lambda)$$

ทำให้ได้สมการลักษณะเฉพาะของ $A^TA$ คือ $(1-\lambda)((1-\lambda)(2-\lambda)-2) = (1-\lambda)(\lambda-3)\lambda = 0$
จึงได้ว่าค่าเฉพาะของ $A^TA$ คือ $\lambda = 3, 1, 0$ เพราะฉะนั้น ค่าเอกฐานของ $A$ คือ $\sigma = \sqrt{3}, 1, 0$ ตามลำดับ □

ให้ $A$ เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ **การแยกค่าเอกฐานของ $A$ (singular value decomposition of $A$, SVD)** คือการเขียน $A$ เป็นผลคูณในรูปแบบ $A = U\Sigma V^T$ โดยที่ $U$ มีมิติ $m \times m$ และ $V$ มีมิติ $n \times n$ เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ ($U^TU = I_m$ และ $V^TV = I_n$) และ $\Sigma$ เป็นเมทริกซ์มิติ $m \times n$ ในรูปแบบ

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D & \\ & \end{bmatrix}$$

ซึ่ง $D$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมมิติ $r \times r$ เมื่อ $r$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าไม่เกิน $m$ และ $n$ ที่สมาชิกทแยงมุมทุกตัวของ $D$ ไม่เท่ากับ 0 และตำแหน่งอื่น ๆ ใน $\Sigma$ มีค่าเป็น 0 (สังเกตว่า $r = \operatorname{rank} A$ เพราะว่า $U$ และ $V$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน)

สมมติว่าเรามีการแยกค่าเอกฐานของเมทริกซ์ $A$ เป็น

$$A = U\Sigma V^T$$

จะได้ว่า $A^T = V\Sigma^TU^T$ และ

$$A^TA = (V\Sigma^TU^T)(U\Sigma V^T) = V\Sigma^T\Sigma V^T \quad \text{เพราะว่า } U^TU = I_m$$

และ เมทริกซ์ $A^TA$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรมิติ $n \times n$ ดังนั้น เราหาเมทริกซ์ $V$ ได้จากการแปลงเมทริกซ์ $A^TA$ เป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉาก ซึ่งหลักของ $V$ จะเป็นเวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะต่าง ๆ ของ $A^TA$ ที่เรียงลำดับจากมากไปหาน้อย (เวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะ 0 จะอยู่ในบรรดาหลักทางขวามือสุดของเมทริกซ์ $V$) และ $D$ จะเป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิกทแยงมุมจากมุมบนซ้ายไปยังมุมล่างขวาเป็นค่าเอกฐานต่าง ๆ ที่เป็นบวกของ $A$ ที่เรียงลำดับจากมากไปน้อย และหา $U$ ได้จากความสัมพันธ์

$$AV = (U\Sigma V^T)V = U\Sigma \quad \text{เพราะว่า } V^TV = I_n$$

เพราะฉะนั้น เราสามารถหาการแยกค่าเอกฐานของเมทริกซ์ $A$ มิติใด ๆ ได้เสมอจากการแปลงเป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉากของ $A^TA$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์สมมาตร และสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

**ทฤษฎีบท 4.6.2** *สำหรับเมทริกซ์ $A$ ที่มีมิติ $m \times n$ และมีแรงค์เท่ากับ $r$ จะมีเมทริกซ์ $\Sigma$ มิติ $m \times n$ ในรูปแบบ*

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D & \\ & \end{bmatrix}$$

*ซึ่ง $D$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมมิติ $r \times r$ ที่มีสมาชิกทแยงมุมจากมุมบนซ้ายไปยังมุมล่างขวาเป็นค่าเอกฐาน $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ ของ $A$ และตำแหน่งอื่น ๆ ในเมทริกซ์ $\Sigma$ มีค่าเป็น 0 และ มีเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ $U$ มิติ $m \times m$ และเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติ $V$ มิติ $n \times n$ ซึ่งทำให้ $A = U\Sigma V^T$ ยิ่งกว่านั้น หลักของเมทริกซ์ $V$ จะเป็นเวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะต่าง ๆ ของ $A^TA$ ที่เรียงลำดับจากมากไปหาน้อย และเมทริกซ์ $U$ หาได้จากความสัมพันธ์ $AV = U\Sigma$*

**หมายเหตุ** ให้ $A$ เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ ซึ่งการแยกเอกฐานของ $A$ มี

$$U = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_m \end{bmatrix}_{m\times m},\ D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \end{bmatrix} \text{ และ } V = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n \end{bmatrix}_{n\times n}$$

เมื่อ $r = \operatorname{rank} A \leq \min\{m,n\}$ และ $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$

เนื่องจาก $r \leq m$ และ $AV = U\Sigma$ ทำให้เรามี $A\vec{v}_j = \sigma_j\vec{u}_j$ สำหรับทุก $j \in \{1,2,\dots,r\}$ จึงได้

$$\vec{u}_j = \frac{1}{\sigma_j}A\vec{v}_j \quad \text{สำหรับทุก } j \in \{1,2,\dots,r\}$$

เพราะว่า $AA^T = (U\Sigma V^T)(U\Sigma V^T)^T = U\Sigma\Sigma^T U^T$ ดังนั้นหลักของ $U$ จะเป็นเวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะต่าง ๆ ของ $AA^T$ ในกรณีที่ $r < m$ เราจึงหาเวกเตอร์ $\vec{u}_{r+1},\dots,\vec{u}_m$ ได้จากการหาฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับ $\operatorname{Nul} AA^T$ ซึ่งคือเวกเตอร์เฉพาะที่สมนัยกับค่าเฉพาะ 0 และฐานหลักนี้จะมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ

$$\operatorname{nullity} AA^T = m - \operatorname{rank} AA^T = m - \operatorname{rank} A^TA = m - \operatorname{rank} A = m - r$$

โดยทฤษฎีบท 4.6.1

**ตัวอย่าง 4.6.2** จงหาการแยกค่าเอกฐานของเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

**วิธีทำ** จากตัวอย่าง 4.6.1 เราได้ ค่าเฉพาะของ $A^TA$ เป็น $\lambda = 3,1,0$ และ ค่าเอกฐานของ $A$ เป็น $\sigma = \sqrt{3},1,0$ จึงได้โดยทฤษฎีบท 4.6.2 ว่า $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ต่อไป เราจะหาเมทริกซ์ $V$ โดยการหาเวกเตอร์เฉพาะของ $A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ที่สมนัยกับแต่ละค่าเฉพาะดังนี้

$\lambda = 3$ ดำเนินการแถวลดรูป $A^TA - 3I_3$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A^TA - 3I_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น} \quad \begin{array}{rcrcl} x_1 & - & x_3 & = & 0 \\ x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

ทำให้ได้ว่า $x_1 = x_3$ และ $x_2 = 2x_3$ เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\operatorname{Nul}(A^TA - 3I_3) = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติฐานหนึ่งเป็น $\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\lambda = 1$ ดำเนินการแถวลดรูป $A^TA - I_3$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A^TA - I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น $$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $x_1 = -x_3$ และ $x_2 = 0$ เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\text{Nul}\,(A^TA - I_3) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติฐานหนึ่งเป็น $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\lambda = 0$ ดำเนินการแถวลดรูป $A^TA - 0I_3 = A^TA$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น $$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $x_1 = x_3$ และ $x_2 = -x_3$ เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\text{Nul}\,(A^TA - 0I_3) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติฐานหนึ่งเป็น $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

จึงสรุปได้ว่า $V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

เพราะว่า

$$AV = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

จึงได้ว่า $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{6}} \\ \frac{3}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$ และ $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ เพราะฉะนั้น $U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

ทำให้เราได้การแยกเอกฐานของเมทริกซ์ $A$ คือ

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{3}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

ตามต้องการ $\square$

**ตัวอย่าง 4.6.3** จงหาการแยกค่าเอกฐานของเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

**วิธีทำ** เพราะว่า $A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

ดังนั้น

$$\det(A^TA - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

ทำให้สมการลักษณะเฉพาะของ $A^TA$ คือ $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0$
และได้ค่าเฉพาะของ $A^TA$ คือ $\lambda = 6, 1$ เพราะฉะนั้น ค่าเอกฐานของ $A$ คือ $\sigma = \sqrt{6}, 1$
จึงได้โดยทฤษฎีบท 4.6.2 ว่า $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ต่อไป เราจะหาเมทริกซ์ $V$ โดยการหาเวกเตอร์เฉพาะของ $A^TA$ ที่สมนัยกับแต่ละค่าเฉพาะดังนี้
$\lambda = 6$ ดำเนินการแถวลดรูป $A^TA - 6I_2$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A^TA - 6I_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น} \quad x_1 + 2x_2 = 0$$

ทำให้ได้ว่า $x_1 = -2x_2$ เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$
ดังนั้น $\mathrm{Nul}\,(A^TA - 6I_2) = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติฐานหนึ่งเป็น $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$
$\lambda = 1$ ดำเนินการแถวลดรูป $A^TA - I_2$ ให้มีรูปแบบขั้นบันไดลดรูปได้เป็น

$$A^TA - I_2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งสมนัยกับระบบเชิงเส้น} \quad -2x_1 + x_2 = 0$$

ทำให้ได้ว่า $x_2 = 2x_1$ เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
ดังนั้น $\mathrm{Nul}\,(A^TA - I_2) = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติฐานหนึ่งเป็น $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$
จึงสรุปได้ว่า $V = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
เพราะว่า $AV = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ดังนั้น $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$
เราจะหา $\vec{u}_3$ ได้โดยการหาฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติของ $\mathrm{Nul}\,(AA^T)$
เพราะว่า $AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ สมนัยกับระบบเชิงเส้น $\begin{matrix} x_1 & + & 2x_3 & = & 0 \\ x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{matrix}$

ทำให้ได้ว่า $x_1 = -2x_3$ และ $x_2 = x_3$ เพราะฉะนั้น $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\operatorname{Nul}(AA^T) = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ และมีฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติฐานหนึ่งเป็น $\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

เพราะฉะนั้น $\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $U = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

ทำให้เราได้การแยกเอกฐานของเมทริกซ์ $A$ คือ

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{6}\begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{30}} \\ \frac{-5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

ตามต้องการ $\square$

## บทประยุกต์ของการแยกค่าเอกฐาน

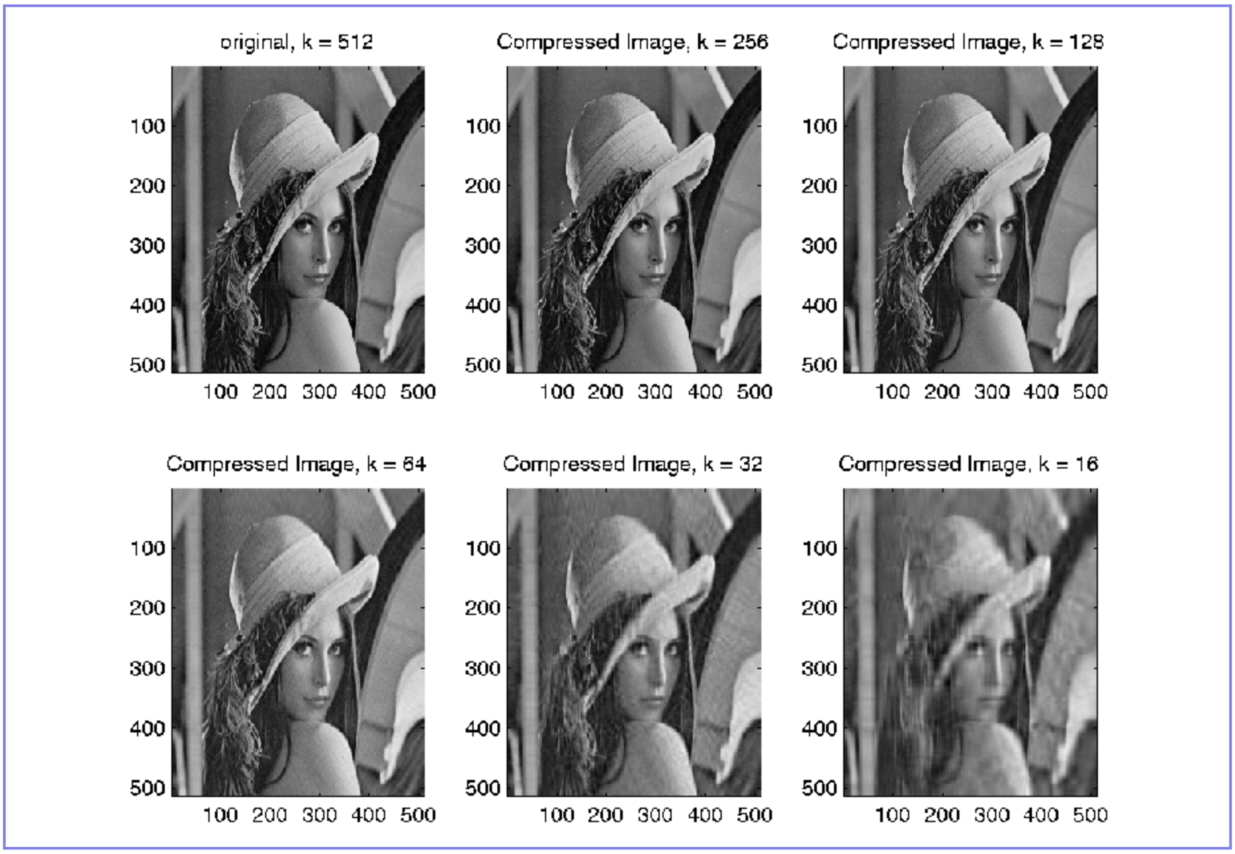
ให้ $A$ เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ สมมติว่า การแยกเอกฐานของ $A$ นั้นมี

$$U = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_m \end{bmatrix}_{m\times m},\ D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \end{bmatrix} \text{ และ } V = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n \end{bmatrix}_{n\times n}$$

เมื่อ $r = \operatorname{rank} A \leq \min\{m, n\}$ และ $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ จะได้ว่า

$$A = U\Sigma V^T = \sigma_1\vec{u}_1\vec{v}_1^T + \sigma_2\vec{u}_2\vec{v}_2^T + \cdots + \sigma_r\vec{u}_r\vec{v}_r^T$$

โดยที่ $\vec{u}_i\vec{v}_i^T$ เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ที่มีแรงก์เท่ากับ 1 สำหรับทุก $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ สังเกตว่าในกรณีที่ $m$ และ $n$ มีค่ามาก ๆ นั่นคือ $A$ มีมิติใหญ่ เช่น หากเรามีภาพขนาด $512 \times 512$ จุดภาพ (pixel) โดยแต่ละจุดภาพแทนข้อมูลสีด้วยตัวเลข เราอาจแปลงภาพนี้เป็นเมทริกซ์ $A$ มิติ $512 \times 512$ ที่มีสมาชิกแต่ละตำแหน่งเป็นตัวเลขข้อมูลสี ซึ่งเราต้องเก็บข้อมูลถึง $(512)^2$ ค่า แต่ถ้าเราหาการแยกเอกฐานของเมทริกซ์ $A$ ก่อน เราจะได้การประมาณค่าของเมทริกซ์ $A$ ในรูปแบบ $\sigma_1\vec{u}_1\vec{v}_1^T + \sigma_2\vec{u}_2\vec{v}_2^T + \cdots + \sigma_k\vec{u}_k\vec{v}_k^T$ เมื่อ $k \leq \operatorname{rank} A \leq 512$ โดยเราอาจเลือก $k = 128$ และเก็บข้อมูล $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{128}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{128}$ ซึ่งเท่ากับเราเก็บข้อมูลเพียง $128 + (256)(512)$ ค่า จึงทำให้มีประสิทธิภาพและประหยัดที่จัดเก็บกว่าหลายเท่า แต่คุณภาพของภาพอาจลดลงไปบ้าง เราเรียกการประมาณเมทริกซ์ $A$ เช่นนี้ว่า **การประมาณค่าแรงก์ $k$ ของ $A$ (rank $k$ approximation of $A$)**




การแยกค่าเอกฐานยังนำไปสู่**การลดมิติ (dimension reduction) ของข้อมูล** เช่น สมมติว่าเราเก็บข้อมูลคะแนนจากการสอบ 9 วิชาสามัญของนักเรียน 10000 คน ซึ่งอาจแทนข้อมูลในรูปของเมทริกซ์ $B$ มิติ $9 \times 10000$

$$B = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_{10000} \end{bmatrix}$$

ซึ่งข้อมูลจากนักเรียนแต่ละคนจะเป็นเวกเตอร์แนวตั้งที่มีขนาด $9 \times 1$ จึงไม่สามารถลงจุดดูการกระจายของคะแนนของนักเรียนได้เหมือนในหัวข้อ 4.3 ให้ $\vec{m}$ แทนเวกเตอร์แนวตั้งที่มีขนาด $9 \times 1$ โดยมีสมาชิกเป็นค่าเฉลี่ยของวิชาที่ 1 ถึง 9 ตามลำดับ ดังนั้น ถ้า

$$C = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 - \vec{m} & \vec{v}_2 - \vec{m} & \dots & \vec{v}_{10000} - \vec{m} \end{bmatrix}$$

จะได้

$$CC^T = \frac{1}{10000-1}[\mathrm{cov}(X_i, X_j)]_{9\times 9}$$

เป็นเมทริกซ์ซึ่งมีสมาชิกในตำแหน่งที่ $(i,j)$ เป็นความแปรปรวนร่วมเกี่ยวของวิชาที่ $i$ และ รายวิชาที่ $j$ (ซึ่งในที่นี้เราแทนด้วยตัวแปรสุ่ม $X_i$ และ $X_j$ ตามลำดับ) และสมาชิกทแยงมุมจากมุมบนซ้ายไปยังมุมล่างขวาจะเป็นความแปรปรวนของรายวิชาที่ 1 ถึง 9 ตามลำดับ ซึ่งการแยกเอกฐานของ $C$ จะออกมาในรูปแบบ

$$C = \sigma_1 \vec{u}_1 \vec{v}_1^T + \sigma_2 \vec{u}_2 \vec{v}_2^T + \cdots + \sigma_9 \vec{u}_9 \vec{v}_9^T$$

โดยที่ $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_9 \geq 0$ ทำให้เราอาจลดมิติของข้อมูลไปสนใจบนส่วนประกอบ $\vec{u}$ ที่มี $\sigma$ สูง กล่าวคือมีค่าความแปรปรวนสูงเพียง 2-3 ค่า เรียกว่า **ส่วนประกอบมุขสำคัญ (principal component, PC)** และฉายเวกเตอร์ในแต่ละหลักของ $C$ ไปบน PC ต่าง ๆ ที่เลือกมา โดยหาการฉายเชิงตั้งฉากบน $\mathrm{Span}\,\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ นั่นเอง ทำให้เราได้จุดข้อมูลในสามมิติตามแกนพิกัดในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ ซึ่งสามารถลงจุดและดูแนวโน้มของข้อมูลได้ เราเรียกการวิเคราะห์ข้อมูลแบบนี้ว่า **การวิเคราะห์ส่วนประกอบมุขสำคัญ (principal component analysis, PCA)**

## แบบฝึกหัด 4.6

1. จงหาการแยกค่าเอกฐานของเมทริกซ์ต่อไปนี้

   (ก) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ (ข) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ (ค) $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$

2. สมมติว่า $A$ มีมิติ $200 \times 500$ ถ้าเราประมาณค่าแรงก์ 100 ของ $A$ เราต้องจัดเก็บข้อมูลทั้งหมดกี่ค่า

3. สมมติว่า $A$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรมิติ $2 \times 2$ ที่มีเวกเตอร์เฉพาะเป็น $\vec{u}_1$ และ $\vec{u}_2$ สมนัยกับค่าเฉพาะ 3 และ $-2$ ตามลำดับ จงหาการแยกค่าเอกฐานของ $A$ (ตอบในรูปเมทริกซ์ติด $\vec{u}_1$ และ $\vec{u}_2$)

4. สมมติว่า $A$ มีการแยกค่าเอกฐานเป็น

$$A = \begin{bmatrix} .40 & -.78 & .47 \\ .37 & -.33 & -.87 \\ -.84 & -.52 & -.16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.10 & 0 & 0 \\ 0 & 3.10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .30 & -.51 & -.81 \\ .76 & .64 & -.12 \\ .58 & -.58 & .58 \end{bmatrix}$$

   (ก) จงหา $\operatorname{rank} A$
   (ข) จงหาฐานหลักของ $\operatorname{Col} A$ และฐานหลักของ $\operatorname{Nul} A$

**คำตอบแบบฝึกหัด 4.1** 1.($\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}=1, \|\vec{u}\|=\sqrt{5}, \|\vec{v}\|=\sqrt{13}$)/ $2\vec{u}+\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}$/เวกเตอร์หนึ่งหน่วยคือ $\pm\frac{1}{\sqrt{37}}\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}$;

2.เวกเตอร์ 3 หน่วยทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ คือ $\begin{bmatrix}-\frac{18}{7}\\ \frac{6}{7}\\ -\frac{9}{7}\end{bmatrix}$/$\|\vec{u}-\vec{x}\|=\sqrt{33}$;

3.$\vec{x}=\frac{2}{3}\vec{u}_1+\vec{u}_2+\frac{1}{3}\vec{u}_3$/$U=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{8}{\sqrt{105}}\\ \frac{4}{\sqrt{21}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{105}}\\ -\frac{1}{\sqrt{21}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{105}}\end{bmatrix}$/$U^{-1}=U^T$;

4.$\vec{x}=-\frac{4}{3}\vec{u}_1-\frac{1}{3}\vec{u}_2+\frac{1}{3}\vec{u}_3$/$U=\begin{bmatrix}-\frac{3}{\sqrt{18}} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{18}}\\ \frac{3}{\sqrt{18}} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{18}}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{\sqrt{18}}\end{bmatrix}$/$U^{-1}=U^T$

**คำตอบแบบฝึกหัด 4.2** 1.(ก)$H^{\perp}=\mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$, (ข)$H^{\perp}=\mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix}0\\-2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$;

2.$\vec{x}=\begin{bmatrix}0\\-2\\4\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10\\-6\\-2\\2\end{bmatrix}=\vec{y}+\vec{z}$; 3.$\vec{x}=\begin{bmatrix}2\\4\\2\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\1\\-5\\1\end{bmatrix}=\vec{y}+\vec{z}$; 4.(ก)$\vec{y}=-\frac{3}{2}\vec{u}_1-\frac{5}{2}\vec{u}_2$, (ข)$\vec{y}=\frac{7}{14}\vec{u}_1-\frac{15}{6}\vec{u}_2$;

5.(ก)$\hat{y}=\begin{bmatrix}6\\3\\0\end{bmatrix}$/$\vec{z}=\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}$, (ข)$\hat{y}=\begin{bmatrix}5\\1\\4\end{bmatrix}$/$\vec{z}=\begin{bmatrix}-4\\2\\1\end{bmatrix}$, (ค)$\hat{y}=\begin{bmatrix}\frac{34}{15}\\ \frac{58}{15}\\ \frac{2}{5}\\ \frac{28}{15}\end{bmatrix}$/$\vec{z}=\begin{bmatrix}\frac{26}{15}\\ -\frac{13}{15}\\ \frac{13}{5}\\ -\frac{13}{15}\end{bmatrix}$, (ง)$\hat{y}=\begin{bmatrix}5\\2\\3\\6\end{bmatrix}$/$\vec{z}=\begin{bmatrix}-2\\2\\2\\0\end{bmatrix}$;

6.$U^TU=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$/$UU^T=\begin{bmatrix}\frac{8}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{4}{9}\\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{5}{9}\end{bmatrix}$/ $\mathrm{proj}_H\vec{y}=(UU^T)\vec{y}=\begin{bmatrix}2\\4\\5\end{bmatrix}$;

7.(ก)$\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}\right\}$, (ข)$\left\{\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\5\\-3\end{bmatrix}\right\}$, (ค)$\left\{\begin{bmatrix}2\\-5\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\3\\3\end{bmatrix}\right\}$,

(ง)$\left\{\begin{bmatrix}1\\-4\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}$, (จ)$\left\{\begin{bmatrix}3\\-1\\2\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\6\\-3\\0\end{bmatrix}\right\}$, (ฉ)$\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\\-3\end{bmatrix}\right\}$;

8.(ก)ฐานหลักคือ $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$/ ฐานหลักเชิงตั้งฉากคือ $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}\right\}$,

(ข)ฐานหลักคือ $\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-2\\-4\\-8\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\6\\-3\\3\end{bmatrix}\right\}$/ฐานหลักเชิงตั้งฉากคือ $\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\3\\-1\\-1\end{bmatrix}\right\}$,

(ค)ฐานหลัก คือ$\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$/ฐานหลักเชิงตั้งฉากคือ $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\3\end{bmatrix}\right\}$;

9.(ก)$Q=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}\sqrt{5} & -2\sqrt{5}\\ 2\sqrt{5} & \sqrt{5}\end{bmatrix}$/$R=\begin{bmatrix}\sqrt{5} & \sqrt{5}\\ 0 & \sqrt{5}\end{bmatrix}$, (ข)$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$/$R=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 3\sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$,

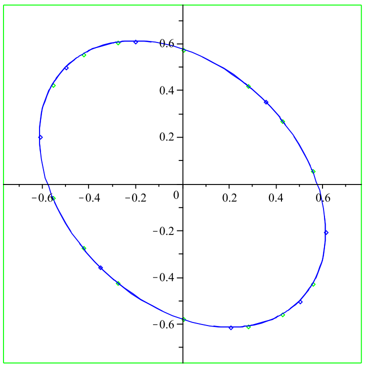
(ค)$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{8}{\sqrt{234}}\\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{\sqrt{234}}\\ \frac{2}{3} & \frac{7}{\sqrt{234}}\end{bmatrix}$/$R=\begin{bmatrix}3 & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt{26}}{3}\end{bmatrix}$, (ง)$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$/$R=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$,

(จ)$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$/$R=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$, (ฉ)$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$/$R=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

**คำตอบแบบฝึกหัด 4.3** 1.(ก)$\vec{y} = \frac{1}{2}\vec{u}_1 + \frac{3}{2}\vec{u}_2$, (ข)$\vec{y} = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_2$; 2. $2\sqrt{10}$;
3.(ก)$\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix}$, (ข)$\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{8}{7} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$, (ค)$\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{14}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$, (ง)$\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$;
4.(ก)$\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, (ข)$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, (ค)$\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{8}{7} \\ -\frac{13}{7} \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix}$, (ง)$\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;
5.(ก)$\vec{\beta} = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.7 \end{bmatrix}$, (ข)$\vec{\beta} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1.3 \end{bmatrix}$, (ค)$\vec{\beta} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{13}{5} \end{bmatrix}$, (ง)$\vec{\beta} = \begin{bmatrix} -0.9 \\ 2.6 \end{bmatrix}$

**คำตอบแบบฝึกหัด 4.4** 1.(ก)$\lambda = 4, 9/ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$, (ข)$\lambda = -1, 3/ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, (ค)$\lambda = 0, 25/ \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$,
(ง)$\lambda = \frac{5}{2}, \frac{15}{2}/ \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$, (จ)$\lambda = -6, -2, 6/ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$, (ฉ)$\lambda = 2, -1, -1/ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$,
(ช)$\lambda = 3, 3, 0/ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$, (ซ)$\lambda = -3, -50, 25/ \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$, (ฌ)$\lambda = 0, 0, 2/ \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,
(ญ)$\lambda = 0, 3, 3/ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$, (ฎ)$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$, (ฏ)$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$;
2.(ก)$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$, (ข)$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$,
(ค)$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$, (ง)$\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{15}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$;
3.$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} /D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;
4.$P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} \end{bmatrix} /D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; 5.$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} /\lambda = a \pm b$

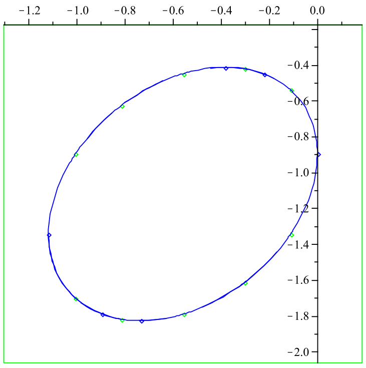
**คำตอบแบบฝึกหัด 4.5** 1.(ก)$5x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2$, (ข)$4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3$;
2.(ก)$\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, (ข)$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, (ค)$\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, (ง)$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$, (จ)$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, (ฉ)$\begin{bmatrix} 9 & -4 & 4 \\ -4 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \end{bmatrix}$;
3.(ก)ลบแน่นอน$\lambda = -1, -6/P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} / - y_1^2 - 6y_2^2$,
(ข)บวกแน่นอน$\lambda = 1, 5/P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} /y_1^2 + 5y_2^2$,
(ค)บวกแน่นอน$\lambda = 11, 1/P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} /11y_1^2 + y_2^2$,
(ง)ไม่แน่นอน$\lambda = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}/P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} /\frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2$,
(จ)บวกกึ่งแน่นอน$\lambda = 0, 1, 2/P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} /y_2^2 + 2y_3^2$,
(ฉ)บวกแน่นอน$\lambda = 3, 9, 15/P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} /3y_1^2 + 9y_2^2 + 15y_3^2$;



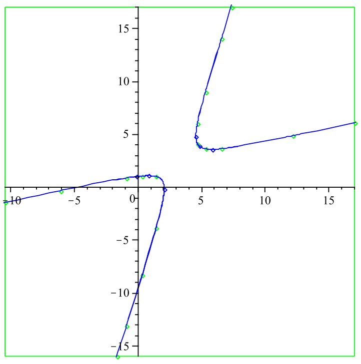
$4.\lambda = 2, 4/P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} / 2y_1^2 + 4y_2^2 = 1,$

5.(ก)$k > 4$,(ข)$k > 2$,(ค)$k^2 \leq 1$;

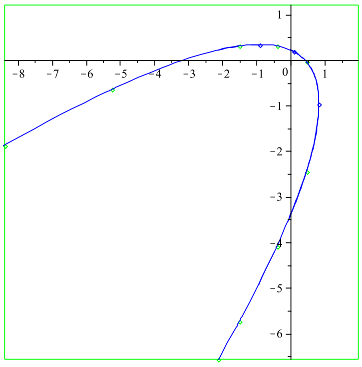
6.



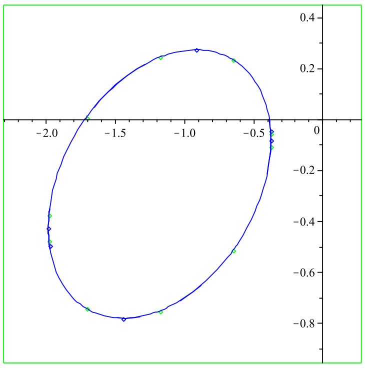
(ก)



(ข)



(ค)



(ง)

**คำตอบแบบฝึกหัด 4.6** 1. (ก) $U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$

(ข) $U = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{45} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$

(ค) $U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 4\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{5} \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix};$

2. $100 + (100)(200) + (100)(500)$; 3. $U = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, V = U^T$;

4.(ก) rank $A = 2$ (ข) ฐานหลักสำหรับ Col $A$ คือ $\left\{ \begin{bmatrix} .40 \\ .37 \\ -.84 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -.78 \\ -.33 \\ -.52 \end{bmatrix} \right\}$ และ ฐานหลักสำหรับ Nul $A$ คือ $\left\{ \begin{bmatrix} .58 \\ -.58 \\ .58 \end{bmatrix} \right\}$

# บทที่ 5

# แนวคิดเชิงนามธรรมของพีชคณิตเชิงเส้น

## 5.1 ปริภูมิเวกเตอร์และปริภูมิย่อย

### 5.1.1 ปริภูมิเวกเตอร์

ให้ $(F, +, \times)$ เป็นฟีลด์ เราเรียกสมาชิกของ $F$ ว่า**สเกลาร์ (scalar)** และ ให้ $V$ เป็นเซตพร้อมการดำเนินการ **การบวก (addition)** $\oplus$ เราเรียกสมาชิกของ $V$ ว่า**เวกเตอร์ (vector)** กำหนด $\odot$ เรียกว่า**การคูณโดยสเกลาร์ (scalar multiplication) บน** $V$ เราเรียก $(V, \oplus, \odot)$ ว่า**ปริภูมิเวกเตอร์ (vector space) เหนือฟีลด์** $F$ ถ้า

1. $V$ ภายใต้การดำเนินการการบวก $\oplus$ สอดคล้องสมบัติ:

   ($\oplus$1) $\vec{u} \oplus \vec{v} \in V$ สำหรับทุก ๆ $\vec{u}, \vec{v} \in V$

   ($\oplus$2) $(\vec{u} \oplus \vec{v}) \oplus \vec{w} = \vec{u} \oplus (\vec{v} \oplus \vec{w})$ สำหรับทุก ๆ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

   ($\oplus$3) มี $\vec{0}_V \in V$ ที่ทำให้ $\vec{u} \oplus \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} \oplus \vec{u}$ สำหรับทุก ๆ $\vec{u} \in V$
   เรียก $\vec{0}_V$ ว่า**เวกเตอร์ศูนย์ (zero vector)**

   ($\oplus$4) $\vec{u} \oplus \vec{v} = \vec{v} \oplus \vec{u}$ สำหรับทุก ๆ $\vec{u}, \vec{v} \in V$

   ($\oplus$5) สำหรับแต่ละ $\vec{u} \in V$ มี $\vec{u}' \in V$ ที่ทำให้ $\vec{u} \oplus \vec{u}' = \vec{0} = \vec{u}' \oplus \vec{u}$
   เรียก $\vec{u}'$ ว่า**ลบของเวกเตอร์ $\vec{u}$ (negative of $\vec{u}$)**

2. การคูณโดยสเกลาร์ $\odot$ สอดคล้องสมบัติ:

   ($\odot$1) $c \odot \vec{v} \in V$ สำหรับทุก ๆ $c \in F$ และ $\vec{u} \in F$

   ($\odot$2) $(c_1 + c_2) \odot \vec{v} = (c_1 \odot \vec{v}) \oplus (c_2 \odot \vec{v})$ สำหรับทุก ๆ $c_1, c_2 \in F$ และ $\vec{v} \in V$

   ($\odot$3) $(c_1 \times c_2) \odot \vec{v} = c_1 \odot (c_2 \odot \vec{v})$ สำหรับทุก ๆ $c_1, c_2 \in F$ และ $\vec{v} \in V$

   ($\odot$4) $c \odot (\vec{v}_1 \oplus \vec{v}_2) = (c \odot \vec{v}_1) \oplus (c \odot \vec{v}_2)$ สำหรับทุก ๆ $c \in F$ และ $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$

   ($\odot$5) $1 \odot \vec{v} = \vec{v}$ สำหรับทุก ๆ $\vec{v} \in V$

**ทฤษฎีบท 5.1.1** *ให้ $(V,\oplus,\odot)$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ จะได้ว่า*

1. *(การตัดออก (cancellation))* $\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V, \vec{u}\oplus\vec{w}=\vec{v}\oplus\vec{w}\Rightarrow \vec{u}=\vec{v}$
2. *สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{u},\vec{v}\in V$ จะมีเวกเตอร์ $\vec{x}\in V$ เพียงเวกเตอร์เดียวที่สอดคล้อง $\vec{x}\oplus\vec{u}=\vec{v}$ ดังนั้น เวกเตอร์ศูนย์ $\vec{0}_V$ และ ลบของเวกเตอร์ $\vec{u}$ จะมีเพียงเวกเตอร์เดียว เขียนแทนด้วย $-\vec{u}$*

**บทพิสูจน์** เราจะแสดงการตัดออกก่อน และนำไปใช้ในการพิสูจน์ส่วนที่เหลือ

1. ให้ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $V$ ซึ่ง $\vec{u}\oplus\vec{w}=\vec{v}\oplus\vec{w}$
   โดย $(\oplus 5)$ จะมีเวกเตอร์ $\vec{w}'$ ใน $V$ ซึ่ง $\vec{w}\oplus\vec{w}'=\vec{0}_V$
   จาก $(\vec{u}\oplus\vec{w})\oplus\vec{w}'=(\vec{v}\oplus\vec{w})\oplus\vec{w}'$ ซึ่งจัดรูปโดย $(\oplus 2)$ ได้เป็น $\vec{u}\oplus(\vec{w}\oplus\vec{w}')=\vec{v}\oplus(\vec{w}\oplus\vec{w}')$
   เพราะฉะนั้น $\vec{u}\oplus\vec{0}_V=\vec{v}\oplus\vec{0}_V$ และเราสรุปจาก $(\oplus 3)$ ได้ว่า $\vec{u}=\vec{v}$ ตามต้องการ
2. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $V$
   โดย $(\oplus 5)$ จะมีเวกเตอร์ $\vec{u}'$ ใน $V$ ซึ่ง $\vec{u}'\oplus\vec{u}=\vec{0}_V$
   เลือก $\vec{x}=\vec{v}\oplus\vec{u}'$ ดังนั้น โดย $(\oplus 1)$ $\vec{x}$ อยู่ใน $V$
   และโดย $(\oplus 2)$ และ $(\oplus 3)$ ได้ว่า $\vec{x}\oplus\vec{u}=(\vec{v}\oplus\vec{u}')\oplus\vec{u}=\vec{v}\oplus(\vec{u}'\oplus\vec{u})=\vec{v}\oplus\vec{0}_V=\vec{v}$
   ต่อไปจะแสดงว่ามี $\vec{x}$ เพียงเวกเตอร์เดียว สมมติว่า มี $\vec{x}'$ อีกเวกเตอร์หนึ่งใน $V$ ซึ่ง $\vec{x}'\oplus\vec{u}=\vec{v}$
   ดังนั้น $\vec{x}\oplus\vec{u}=\vec{x}'\oplus\vec{u}$ จึงสรุปได้จากการตัดออกว่า $\vec{x}=\vec{x}'$

สำหรับการมีเพียงตัวเดียวของ $\vec{0}_V$ และ $\vec{u}'$ เราได้จากสมการ $\vec{x}\oplus\vec{u}=\vec{u}$ และ $\vec{x}\oplus\vec{u}=\vec{0}_V$ ตามลำดับ □

**ทฤษฎีบท 5.1.2** *ให้ $(V,\oplus,\odot)$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$, $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ใน $V$ และ $c$ เป็นสเกลาร์ในฟีลด์ $F$ จะได้ว่า*

1. $0\odot\vec{u}=\vec{0}_V$
2. $(-1)\odot\vec{u}=-\vec{u}$
3. $c\odot\vec{0}_V=\vec{0}_V$
4. $(-c)\odot\vec{u}=-(c\odot\vec{u})=c\odot(-\vec{u})$
5. *ถ้า* $c\odot\vec{u}=\vec{0}_V$ *แล้ว* $c=0$ *หรือ* $\vec{u}=\vec{0}$

**บทพิสูจน์** ให้ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $V$ และ $c$ เป็นสเกลาร์ใด ๆ ในฟีลด์ $F$

1. จาก $(+3)$ ได้ว่า $0+0=0$ ดังนั้น $(0+0)\odot\vec{u}=0\odot\vec{u}$
   จึงจัดรูปโดย $(\odot 2)$ และ $(\oplus 3)$ ได้เป็น $(0\odot\vec{u})\oplus(0\odot\vec{u})=\vec{0}_V\oplus(0\odot\vec{u})$
   เพราะฉะนั้น โดยการตัดออก จะได้ $0\odot\vec{u}=\vec{0}_V$
2. เราจะแสดงว่า $(-1)\cdot\vec{u}$ เป็นลบของเวกเตอร์ $\vec{u}$
   และจะสรุปจากการที่ทราบแล้วว่าลบของเวกเตอร์ $\vec{u}$ มีเพียงเวกเตอร์เดียวว่า $(-1)\odot\vec{u}=-\vec{u}$
   โดย $(\oplus 5)$ และ $(\odot 2)$ จะได้ $\vec{u}\oplus((-1)\odot\vec{u})=(1\odot\vec{u})\oplus((-1)\odot\vec{u})=(1+(-1))\odot\vec{u}=0\odot\vec{u}=\vec{0}_V$
3. จาก $(\oplus 3)$ ได้ว่า $\vec{0}_V\oplus\vec{0}_V=\vec{0}_V$ ดังนั้น $c\odot(\vec{0}_V\oplus\vec{0}_V)=c\odot\vec{0}_V$
   จึงจัดรูปโดย $(\odot 4)$ และ $(\oplus 3)$ ได้เป็น $(c\odot\vec{0}_V)\oplus(c\odot\vec{0}_V)=\vec{0}_V\oplus(c\odot\vec{0}_V)$
   เพราะฉะนั้น โดยการตัดออก จะได้ $c\odot\vec{0}_V=\vec{0}_V$
4. ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด โดยแสดงว่า $(c\odot\vec{u})\oplus((-c)\odot\vec{u})=\vec{0}_V$ และ $(c\odot\vec{u})\oplus(c\odot(-\vec{u}))=\vec{0}_V$
5. สมมติว่า $c\odot\vec{u}=\vec{0}_V$ และ $c\neq 0$ เราจะแสดงว่า $\vec{u}=\vec{0}$
   โดย $(\times 5)$ จะมี $a\in F$ ซึ่ง $a\times c=1$
   เราจัดรูป $a\odot(c\odot\vec{u})=a\odot\vec{0}_V$ โดย $(\odot 3)$ และข้อ 1. ได้เป็น $(a\times c)\odot\vec{u}=\vec{0}$
   เพราะฉะนั้น $\vec{u}=\vec{0}$

จากข้อ 2. เรายังได้ด้วยว่าหากต้องการ 'ลบของเวกเตอร์ $\vec{u}$' เราเพียงแค่นำ $-1$ ไป $\odot$ กับเวกเตอร์ $\vec{u}$ $\square$

หากไม่สับสนระหว่างการบวกบน $F$ และ บน $V$ เรานิยมเขียนแทน $\oplus$ บน $V$ ด้วย $+$ และ เรานิยมเขียนแทน $c \odot \vec{v}$ ด้วย $c\vec{v}$

ในหัวข้อ 1.2 เราได้นิยามเมทริกซ์บน $\mathbb{R}$ ซึ่งจากการนิยามดังกล่าว เราสามารถนิยามเมทริกซ์เหนือฟีลด์ $F$ พร้อมทั้งการบวกและการคูณโดยสเกลาร์ได้โดยแทนที่ $\mathbb{R}$ ด้วย $F$

ให้ $m$ และ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวก เราเขียนแทนเซตของเมทริกซ์บน $F$ มิติ $m \times n$ ทั้งหมดด้วย $M_{m,n}(F)$ และให้ $M_n(F) = M_{n,n}(F)$ ซึ่งเราเรียกสมาชิกในเซตนี้ว่าเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n$ และเราเขียนแทนเซตของเวกเตอร์หลักบน $F$ มิติ $m \times 1$ ทั้งหมดด้วย $F^m$ ยิ่งกว่านั้น ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเมทริกซ์เหนือฟีลด์ของจำนวนจริงที่เราได้ศึกษาไปในบทที่ 1 และ 2 ยังคงเป็นจริงเมื่อแทนที่ฟีลด์ของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ ด้วยฟีลด์ $F$ ใด ๆ

**ตัวอย่าง 5.1.1** [ตัวอย่างของปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$]

1. ให้ $m$ และ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวก เราได้ว่า $M_{m,n}(F)$ ภายใต้การบวก และ การคูณโดยสเกลาร์ที่นิยามข้างต้นเป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ ดังนั้น $M_n(F)$ และ $F^m$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ ด้วย

2. ให้ $F^{\mathbb{N}}$ แทนเซตของลำดับของสมาชิกใน $F$ ทั้งหมด นั่นคือ

$$F^{\mathbb{N}} = \{(a_n) : a_n \in F \text{ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ } n\}$$

กำหนดการบวกและการคูณด้วยสมาชิกของ $F$ โดยสำหรับลำดับ $(a_n)$ และ $(b_n)$ ใน $F^{\mathbb{N}}$ และ $c \in F$ เราให้

$$(a_n) + (b_n) := (c_n) \quad \text{และ} \quad c\,(a_n) := (d_n)$$

โดยที่

$$c_n = a_n + b_n \quad \text{และ} \quad d_n = c\,a_n \quad \text{สำหรับทุก ๆ } n \in \mathbb{N}$$

จะได้ว่า $F^{\mathbb{N}}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ เรียกว่า**ปริภูมิลำดับ (sequence space)**

3. ให้ $S$ เป็นเซตใด ๆ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง และ ให้ $F^S$ แทนเซตของฟังก์ชันทั้งหมดจากเซต $S$ ไปยังฟีลด์ $F$ นั่นคือ

$$F^S = \{f \mid f : S \to F\}$$

กำหนดการบวกและการคูณด้วยสมาชิกของ $F$ โดยสำหรับฟังก์ชัน $f$ และ $g$ ใน $F^S$ และ $c \in F$ เราให้

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{และ} \quad (c\,f)(x) = cf(x) \quad \text{สำหรับทุก ๆ } x \in S$$

จะได้ว่า $F^S$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ เรียกว่า**ปริภูมิฟังก์ชัน (function space)**

4. ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์และ $F_n[x]$ แทนเซตของพหุนาม (polynomial) ดีกรีไม่เกิน $n$ ที่มีสัมประสิทธิ์อยู่ในฟีลด์ $F$ และมีตัวไม่กำหนด (indeterminate) เป็น $x$ นั่นคือ

$$F_n[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n : a_i \in F \text{ สำหรับทุก ๆ } i \in \{0,1,2,\ldots,n\}\}$$

กำหนดการบวกและการคูณด้วยสมาชิกของ $F$ โดยสำหรับพหุนาม $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ และ $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$ ใน $F_n[x]$ และ $c \in F$ เราให้

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \cdots + (a_n+b_n)x^n \\ \text{และ}\ \ c(p(x)) &= (ca_0) + (ca_1)x + (ca_2)x^2 + \cdots + (ca_n)x^n \end{aligned}$$

จะได้ว่า $F_n[x]$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ สังเกตว่า เรามี $F_{n-1}[x] \subset F_n[x]$ ทุก ๆ จำนวนเต็มบวก $n$

5. ให้ $F[x]$ แทนเซตของพหุนามทั้งหมดที่มีสัมประสิทธิ์อยู่ในฟีลด์ $F$ และมีตัวไม่กำหนดเป็น $x$ นั่นคือ

$$F[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n : n \geq 0 \text{ และ } a_i \in F \text{ สำหรับทุก ๆ } i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}\}$$

จะได้ว่า $F[x] = \bigcup\limits_{n \geq 0} F_n[x]$ และใช้การบวกและการคูณด้วยสมาชิกของ $F$ บน $F_n[x]$ เราได้ว่า $F[x]$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ เรียกว่า**ปริภูมิพหุนาม (polynomial space) เหนือฟีลด์** $F$

6. พิจารณาเซตของจำนวนเชิงซ้อน $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R} \text{ และ } i^2 = -1\}$ ภายใต้การดำเนินการบวก และ คูณด้วยจำนวนจริงที่กำหนดโดย

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \text{ และ } e(a + bi) = ea + ebi \quad \text{สำหรับทุก ๆ } a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$$

จะได้ว่า $\mathbb{C}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ของจำนวนจริง $\mathbb{R}$

**ตัวอย่าง 5.1.2** ให้ $V = \mathbb{R}^2$ จงพิจารณาว่าการกำหนดการบวกและการคูณด้วยจำนวนจริงบน $V$ ดังต่อไปนี้ทำให้ $V$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ของจำนวนจริงหรือไม่ เพราะเหตุใด
(ก) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2y_2)$ และ $c(x_1, x_2) = (cx_1, x_2)$
สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$ และ $c \in \mathbb{R}$
(ข) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ และ $c(x_1, x_2) = (cx_2, cx_1)$
สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$ และ $c \in \mathbb{R}$

**ลองทำ 5.1.1** ให้ $V = \mathbb{R}^2$ กำหนดการบวกและการคูณด้วยจำนวนจริงบน $V$ โดย

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
$$c(x_1, x_2) = (cx_1, \frac{x_2}{c}) \text{ ถ้า } c \neq 0 \text{ และ } 0(x_1, x_2) = (0, 0)$$

สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$ และ $c \in \mathbb{R}$
จงพิจารณาว่า $V$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $\mathbb{R}$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

### 5.1.2 ปริภูมิย่อย

ให้ $V$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ และ $W$ เป็นเซตย่อยของ $V$ เรากล่าวว่า $W$ เป็น **ปริภูมิย่อย (subspace) ของ** $V$ ก็ต่อเมื่อ $W$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ ภายใต้การบวกและการคูณโดยสเกลาร์เดียวกับ $V$

**ทฤษฎีบท 5.1.3** *ให้ $V$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ และ $W$ เป็นเซตย่อยของ $V$ เราได้ว่า $W$ เป็นปริภูมิย่อยของ $V$ ก็ต่อเมื่อ*
*ก. $\vec{0}_V \in W$ และ ข. $\vec{v} + \vec{w} \in W$ สำหรับทุก ๆ $\vec{v}, \vec{w} \in W$ และ ค. $c\vec{v} \in W$ สำหรับทุก ๆ $\vec{v} \in W$ และ $c \in F$*

**บทพิสูจน์** สมมติว่า $W$ เป็นปริภูมิย่อยของ $V$
ดังนั้น $W$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ ภายใต้การบวกและการคูณโดยสเกลาร์เดียวกับ $V$
ทำให้ได้ ก., ข. และ ค. โดย $(\oplus 3)$, $(\oplus 1)$ และ $(\odot 1)$ ตามลำดับ
ในทางกลับกัน สมมติว่า ก., ข. และ ค. เป็นจริง เราจะแสดงว่า $W$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ ภายใต้การบวกและ

การคูณโดยสเกลาร์เดียวกับ $V$ นั่นคือ เราต้องแสดงว่า ($\oplus$1) – ($\oplus$5) และ ($\odot$1) – ($\odot$5) เป็นจริง
สังเกตก่อนว่าสมมติฐาน ข. และ ค. ทำให้ ($\oplus$1) และ ($\odot$1) เป็นจริง ตามลำดับ
เนื่องจาก $W$ เป็นเซตย่อยของ $V$ ดังนั้น ($\oplus$2), ($\oplus$4) และ ($\odot$2) – ($\odot$5) เป็นจริง และ โดย ก. จะได้ ($\oplus$3) เป็นจริง
ท้ายสุดเราจะแสดงว่า ($\oplus$5) เป็นจริง โดยให้ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $W$
เนื่องจาก $-1$ อยู่ใน $F$ เราจึงได้โดย ค. ว่า $(-1)\vec{v}$ อยู่ใน $W$
โดยทฤษฎีบท 5.1.2 $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$ เพราะฉะนั้น $-\vec{v}$ อยู่ใน $W$ □

**หมายเหตุ** โดยทฤษฎีบทข้างต้น จะได้ว่าในการแสดงว่าเซตย่อย $W$ เป็นปริภูมิย่อยของ $V$ นั้น เราจะแสดงว่าเวกเตอร์ศูนย์ของ $V$ อยู่ใน $W$ และแสดงว่าการบวกเวกเตอร์และการคูณโดยสเกลาร์บน $W$ มีสมบัติปิด นั่นคือ เราตรวจสอบเพียงสมบัติ ($\oplus$3), ($\oplus$1) และ ($\odot$1) บน $W$ เท่านั้น

**ลองทำ 5.1.2** ให้ $V$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ และ $W$ เป็นเซตย่อยของ $V$ จงแสดงว่า $W$ เป็นปริภูมิย่อยของ $V$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{0}_V \in W$ และ $\vec{v} + c\vec{w} \in W$ สำหรับทุก ๆ $\vec{v}, \vec{w} \in W$ และ $c \in F$

**ตัวอย่าง 5.1.3**

1. สำหรับปริภูมิเวกเตอร์ $V$ ใด ๆ เหนือฟีลด์ $F$ เราได้ว่า $\{\vec{0}_V\}$ และ $V$ เป็นปริภูมิย่อยของ $V$ เรียกว่า**ปริภูมิย่อยชัด (trivial subspace)**

2. ให้ $n$ จำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ เราได้โดยบทนิยามว่า $F_n[x]$ เป็นปริภูมิย่อยของ $F[x]$

3. ให้ $\alpha \in F$ และ $V_\alpha = \{(x_1, x_2) : x_1 = \alpha x_2\}$ จะได้ว่า $V_\alpha$ เป็นปริภูมิย่อยของ $F^2$

   **บทพิสูจน์** เราจะแสดงว่า $V_\alpha$ เป็นปริภูมิย่อยของ $F^2$ โดยทฤษฎีบท 5.1.3
   สังเกตว่า $0 = \alpha 0$ ดังนั้น เวกเตอร์ $(0, 0)$ อยู่ใน $V_\alpha$
   ให้ $(x_1, x_2)$ และ $(y_1, y_2)$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $V_\alpha$ และ $c$ เป็นสเกลาร์ใด ๆ ใน $F$
   ดังนั้น $x_1 = \alpha x_2$ และ $y_1 = \alpha y_2$
   ส่งผลให้ $x_1 + x_2 = \alpha y_1 + \alpha y_2 = \alpha(y_1 + y_2)$ และ $cx_1 = c(\alpha x_2) = (c\alpha)x_2 = (\alpha c)x_2 = \alpha(cx_2)$
   เพราะฉะนั้น $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ และ $(cx_1, cx_2)$ อยู่ใน $W$
   จึงสรุปได้ว่า $(x_1, x_2) + (y_1, y_2)$ และ $c(x_1, x_2)$ อยู่ใน $W$ ตามต้องการ □

4. $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ และ } a + d = b + c \right\}$ เป็นปริภูมิย่อยของ $M_2(\mathbb{R})$ เหนือฟีลด์ $\mathbb{R}$

   **บทพิสูจน์** สังเกตว่า $0 + 0 = 0 + 0$ ดังนั้น $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ อยู่ใน $W$
   ให้ $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ใด ๆ ใน $W$ และ $r$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ
   ดังนั้น $a_1 + d_1 = b_1 + c_1$ และ $a_2 + d_2 = b_2 + c_2$
   ส่งผลให้ $(a_1 + d_1) + (a_2 + d_2) = (b_1 + c_1) + (b_2 + c_2)$ และ $r(a_1 + d_1) = r(b_1 + c_1)$
   ซึ่งจัดรูปได้เป็น $(a_1 + a_2) + (d_1 + d_2) = (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2)$ และ $ra_1 + rd_1 = rb_1 + rc_1$ ตามลำดับ
   เพราะฉะนั้น $\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} ra_1 & rb_1 \\ rc_1 & rd_1 \end{bmatrix}$ อยู่ใน $W$
   จึงสรุปได้ว่า $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ และ $r\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ อยู่ใน $W$ ตามต้องการ □

5. $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 = 0\}$ ไม่เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^2$ เพราะว่า เวกเตอร์ $(1, 0)$ และ $(0, 1)$ อยู่ใน $W$ แต่เวกเตอร์ $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$ ไม่อยู่ใน $W$

6. $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}\}$ ไม่เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
เพราะว่า $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันที่อยู่ใน $W$ แต่ฟังก์ชัน $(-f)(x) = -(f(x)) = -x^2$ ไม่อยู่ใน $W$

**ลองทำ 5.1.3** 1. ให้ $W_1 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a + b = c + d\right\}$ และ
$W_2 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : ad - bc = 0\right\}$
จงพิจารณาว่า $W_1$ และ $W_2$ เป็นปริภูมิย่อยของ $M_2(\mathbb{R})$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

2. ให้ $W = \{A \in M_n(F) : A$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร$\}$
จงพิจารณาว่า $W$ เป็นปริภูมิย่อยของ $M_n(F)$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

3. ให้ $W_1 = \{p(x) \in F[x] : p(1) = 0\}$ และ $W_2 = \{p(x) \in F[x] : p(0) = 1\}$ จะได้ว่า
จงแสดงว่า $W_1$ เป็นปริภูมิย่อยของ $F[x]$ แต่ $W_2$ ไม่เป็นปริภูมิย่อยของ $F[x]$

4. ให้ $W_1 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : x + 2$ หาร $p(x)$ ลงตัว$\}$ และ
$W_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] :$ สมการ $p(x) = 0$ มีรากซ้ำกันสองราก$\}$
จงพิจารณาว่า $W_1$ และ $W_2$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}[x]$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

**ลองทำ 5.1.4 (ใช้แคลคูลัส)** 1. ให้ $C^0(-\infty, \infty) = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(-\infty, \infty)\}$
จงแสดงว่า $C^0(-\infty, \infty)$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

2. ให้ $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f'' = f\}$ จงแสดงว่า $W$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

3. ให้ $\ell^{\infty}(\mathbb{R}) = \{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (a_n)$ เป็นลำดับลู่เข้า$\}$ จงแสดงว่า $\ell^{\infty}(\mathbb{R})$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

4. ให้ $C^1(-\infty, \infty)$ แทนเซตของฟังก์ชันค่าจริงซึ่งอนุพันธ์มีความต่อเนื่องบน $(-\infty, \infty)$
จงแสดงว่า $C^1(-\infty, \infty)$ เป็นปริภูมิย่อยของ $C^0(-\infty, \infty)$

5. ให้ $S = \left\{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0\right\}$ จงแสดงว่า $S$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

ให้ $V$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ สำหรับเวกเตอร์ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ ใน $V$ และสเกลาร์ $c_1, c_2, \ldots, c_p$ ใน $F$ เราเรียกเวกเตอร์

$$\vec{y} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_p\vec{v}_p$$

ว่า**การรวมเชิงเส้น (linear combination)** $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ **ด้วยน้ำหนัก (weight)** $c_1, c_2, \ldots, c_p$

ให้ $S$ เป็นเซตย่อยของ $V$ ที่ไม่ใช่เซตว่าง เราเรียกเซตของการรวมเชิงเส้นทั้งหมดของเวกเตอร์ในเซต $S$ ว่า**เซตย่อยของ $V$ ที่แผ่ทั่วโดย $S$ (subset of $V$ spanned by $S$)** เขียนแทนด้วย Span $S$ นั่นคือ

$$\text{Span } S := \{c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_p\vec{v}_p \in V : c_1, c_2, \ldots, c_p \in F, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p \in S\}$$

เพื่อความสะดวก เรากำหนด $\text{Span } \emptyset = \{\vec{0}\}$

สังเกตว่า $\vec{0} \in \text{Span } S$, $S \subseteq \text{Span } S$, $\text{Span } \{\vec{0}\} = \{\vec{0}\}$ และเราได้สมบัติคล้ายคลึงกับทฤษฎีบท 2.2.1 ว่า

**ทฤษฎีบท 5.1.4** *ให้ $S$ เป็นเซตย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ $V$ เหนือฟีลด์ $F$ จะได้ว่า* Span $S$ *เป็นปริภูมิย่อยของ $V$ เรียกว่า***ปริภูมิย่อยของ $V$ ที่แผ่ทั่วโดย $S$ (subspace of $V$ spanned by $S$)**

ถ้า Span $S = V$ เรากล่าวว่า $S$ **แผ่ทั่ว (span)** $V$ และถ้ามี $S$ เป็นเซตจำกัดซึ่ง Span $S = V$ เรากล่าวว่า $V$ **มีมิติจำกัด (finite dimensional)**

**ตัวอย่าง 5.1.4** จงพิจารณาว่าพหุนามต่อไปนี้อยู่ในปริภูมิย่อย

$$W = \operatorname{Span}\{x^3 - 2x^2 - 5x - 3, 3x^3 - 5x^2 - 4x - 9\}$$

ของ $\mathbb{R}[x]$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
(ก) $2x^3 - 2x^2 + 12x - 6$ (ข) $3x^3 - 2x^2 + 7x + 8$

**ตัวอย่าง 5.1.5** จงแสดงว่า
(ก) $\operatorname{Span}\{x^2 + 3x - 2, 2x^2 + 5x - 3, -x^2 - 4x + 4\} = \mathbb{R}_2[x]$
(ข) $\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\right\} = M_2(\mathbb{R})$

**ลองทำ 5.1.5**

1. ให้ $W = \operatorname{Span}\{1 + x, 2 + x^2\}$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}_2[x]$ จงพิจารณาว่า $1$ และ $1 - x + x^2$ อยู่ใน $W$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
2. จงแสดงว่า $\operatorname{Span}\{1 - x, 1 + x, x^2\} = \mathbb{R}_2[x]$
3. ให้ $V$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ จงแสดงว่า
   (ก) ถ้า $S_1 \subseteq S_2$ แล้ว $\operatorname{Span} S_1 \subseteq \operatorname{Span} S_2$ (ข) $V = \operatorname{Span} V$

เราเรียกเซตย่อย $S$ ของ $V$ ว่า**อิสระเชิงเส้น (linearly independent)** ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ ใน $S$ และสเกลาร์ $c_1, c_2, \ldots, c_p$ ในฟีลด์ $F$ ถ้า

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_p\vec{v}_p = \vec{0}_V$$

แล้ว $c_1 = c_2 = \cdots = c_p = 0$ ดังนั้นเซตย่อย $S$ ของ $V$ **ไม่อิสระเชิงเส้น (linearly dependent)** ก็ต่อเมื่อ มีเวกเตอร์ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ ใน $S$ และสเกลาร์ $c_1, c_2, \ldots, c_p$ ในฟีลด์ $F$ ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันซึ่งทำให้ $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_p\vec{v}_p = \vec{0}_V$

**ตัวอย่าง 5.1.6** จงพิจารณาว่าเซตต่อไปนี้เป็นเซตอิสระเชิงเส้น หรือไม่ เพราะเหตุใด
(ก) $\{x^2 + 3x - 2, 2x^2 + 5x - 3, -x^2 - 4x + 4\}$ ใน $\mathbb{R}_2[x]$
(ข) $\{e^x, \sin x\}$ ใน $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
(ค) $\{1, \sin^2 x, \cos 2x\}$ ใน $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
(ง) $\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\right\}$ ใน $M_2(\mathbb{R})$

**ลองทำ 5.1.6**

1. ให้ $V$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ และ $\vec{v}, \vec{w} \in V$ จงแสดงว่า ถ้า $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้นแล้ว $\{\vec{v} - \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น
2. ให้ $a, b \in \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่า $\{e^{ax}, e^{bx}\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ $a \neq b$
3. ให้ $F$ เป็นฟีลด์ และ $S = \{(a, b), (c, d)\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ใน $F^2$ จงแสดงว่า $S$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ $ad - bc \neq 0$
4. (ก) ถ้า $\vec{0}_V \in S$ แล้ว จงแสดงว่า $S$ ไม่เป็นเซตอสิระเชิงเส้น
   (ข) จงแสดงว่า $\{\vec{u}\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} \neq \vec{0}_V$

### 5.1.3 ฐานหลักและมิติ

**ฐานหลัก (basis)** สำหรับปริภูมิย่อย $W$ ของปริภูมิเวกเตอร์ $V$ เหนือฟีลด์ $F$ คือเซตย่อย $\mathcal{B}$ ของ $W$ ซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นและแผ่ทั่ว $W$ นั่นคือ $\mathcal{B} \subseteq W$ เป็นอิสระเชิงเส้นและ $\operatorname{Span} \mathcal{B} = W$

**ข้อสังเกต** เนื่องจาก Span $\emptyset = \{\vec{0}\}$ และ $\emptyset$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น ดังนั้น $\emptyset$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\{\vec{0}\}$

**บทตั้ง 5.1.5** *ให้ $V$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ และ $S$ เป็นเซตย่อยของ $V$*

1. *ถ้า $\vec{u}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ เป็นเวกเตอร์ที่แตกต่างกันใน $S$ ซึ่งมีสเกลาร์ $c_1, \ldots, c_n$ ใน $F$ ที่ทำให้ $\vec{u} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n$ แล้ว $\operatorname{Span} S = \operatorname{Span}(S \setminus \{\vec{u}\})$*
2. *ถ้า $S$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น และ $\vec{u} \notin \operatorname{Span} S$ แล้ว $S \cup \{\vec{u}\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น*

**บทพิสูจน์** 1. เพราะว่า $S \setminus \{\vec{u}\} \subseteq S$ ดังนั้น $\operatorname{Span}(S \setminus \{\vec{u}\}) \subseteq \operatorname{Span} S$
ในทางกลับกัน เราให้ $\vec{x}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน Span $S$
ดังนั้น จะมีเวกเตอร์ $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m$ ที่แตกต่างกันใน $S$ และสเกลาร์ $d_1, d_2, \ldots, d_m$ ใน $F$ ซึ่ง

$$\vec{x} = d_1\vec{w}_1 + d_2\vec{w}_2 + \cdots + d_m\vec{w}_m$$

หากเวกเตอร์ $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ ทุกเวกเตอร์ต่างจาก $\vec{u}$ เราก็สรุปได้ทันทีว่า $\vec{x}$ อยู่ใน $\operatorname{Span}(S \setminus \{\vec{u}\})$
เพราะฉะนั้น เราจะสมมติว่ามี $i$ ที่เวกเตอร์ $\vec{w}_i = \vec{u}$ โดยไม่เสียนัยเราอาจให้ $i = 1$ และเขียน

$$\vec{x} = d_1\vec{u} + d_2\vec{w}_2 + \cdots + d_m\vec{w}_m$$

เพราะว่า $\vec{u} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\vec{x} &= d_1(c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n) + d_2\vec{w}_2 + \cdots + d_m\vec{w}_m \\ &= d_1c_1\vec{v}_1 + \cdots + d_1c_n\vec{v}_n + d_2\vec{w}_2 + \cdots + d_m\vec{w}_m\end{aligned}$$

และ $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m$ เป็นเวกเตอร์ที่ต่างจาก $\vec{u}$ จึงสรุปในกรณีนี้ได้ว่า $\vec{x} \in \operatorname{Span}(S \setminus \{\vec{u}\})$ เช่นกัน

2. ในการพิสูจน์ว่า $S \cup \{\vec{u}\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น เราจะใช้บทนิยามโดยเริ่มจากให้ $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $S$ และสมมติว่ามีสเกลาร์ $c, c_1, \ldots, c_n$ ใน $F$ ซึ่ง

$$c\vec{u} + c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}_V$$

และจะแสดงว่า $c = c_1 = \cdots = c_n = 0$
โดยอาศัยการพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง เราจะสมมติก่อนว่า $c \neq 0$ ดังนั้น $-c \neq 0$ และ $(-c)^{-1} \in F$ ทำให้เรามี

$$\vec{u} = (-c)^{-1}(c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n) = (-c)^{-1}c_1\vec{v}_1 + \cdots + (-c)^{-1}c_n\vec{v}_n$$

ส่งผลให้ $\vec{u}$ อยู่ใน Span $S$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง เราจึงสรุปได้ว่า $c = 0$ และ ดังนั้น

$$c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}_V$$

เพราะว่า $S$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น เพราะฉะนั้น $c_1 = \cdots = c_n = 0$ ตามต้องการ □

ในการสร้างฐานหลักสำหรับปริภูมิเวกเตอร์ $V$ เหนือฟีลด์ $F$ เราอาจใช้บทตั้ง 5.1.5 ได้ 2 กรณีดังนี้

1. ในกรณีที่ $V$ มีมิติจำกัด สมมติว่ามีเซตย่อย $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ ของ $V$ ที่แผ่ทั่ว $V$

   ถ้า $S$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น จะได้ $S$ เป็นฐานหลักสำหรับ $V$

หาก $S$ ไม่เป็นเซตอิสระเชิงเส้น จะมี $\vec{v}_i$ (เราอาจสลับอันดับของเวกเตอร์ใน $S$ และสมมติว่า $i = m$) ซึ่ง

$$\vec{v}_m = c_1\vec{v}_1 + \ldots c_{m-1}\vec{v}_{m-1}$$

และได้จากบทตั้ง 5.1.5 1. ว่า $\mathrm{Span}\ S = \mathrm{Span}\,(S \setminus \{\vec{v}_m\})$ และถ้า $S \setminus \{\vec{v}_m\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น เราก็จะสรุปได้ว่า $S \setminus \{\vec{v}_m\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $V$ หาก $S \setminus \{\vec{v}_m\}$ ไม่เป็นเซตอิสระเชิงเส้น เราก็ทำการลดทอนจำนวนเวกเตอร์ใน $S$ เช่นนี้ซ้ำไปเรื่อย ๆ จนได้เซตย่อย $\mathcal{B}$ ของ $S$ ที่เป็นฐานหลักสำหรับ $V$ ตามต้องการ

2. ในกรณีทั่วไปนั้น เราจะพิจารณาเซต $\mathscr{L} = \{L \subseteq V : L$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น$\}$ ซึ่งเซตนี้มีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งเซตคือ $\emptyset$ เรากำหนดอันดับบางส่วนบน $\mathscr{L}$ โดย $\subseteq$ และเราจะแสดงว่าโซ่ทุก ๆ โซ่ใน $\mathscr{L}$ มีขอบเขตบนที่อยู่ใน $\mathscr{L}$

   ให้ $\mathscr{C}$ เป็นโซ่ใด ๆ ใน $\mathscr{L}$ นั่นคือ $\mathscr{C}$ เป็นเซตย่อยของ $\mathscr{L}$ ซึ่งทุก $C, D$ ใน $\mathscr{C}$ จะได้ว่า $C \subseteq D$ หรือ $D \subseteq C$

   เราจะแสดงว่า $\bigcup\mathscr{C} = \bigcup\{C : C \in \mathscr{C}\}$ เป็นขอบเขตบนของ $\mathscr{C}$ ที่อยู่ใน $\mathscr{L}$
   สังเกตว่า $C \subseteq \bigcup\mathscr{C}$ สำหรับทุกเซตย่อย $C$ ใน $\mathscr{C}$ เพราะฉะนั้น $\bigcup\mathscr{C}$ เป็นขอบเขตบนของ $\mathscr{C}$
   ให้ $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $\bigcup\mathscr{C}$ และ $c_1, \ldots, c_n$ เป็นสเกลาร์ใด ๆ ใน $F$ ซึ่ง $c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}_V$
   ดังนั้นมีเซตอิสระเชิงเส้น $L_1, \ldots, L_n$ ใน $\mathscr{C}$ ซึ่ง $\vec{v}_i$ อยู่ใน $L_i$ สำหรับทุก ๆ $i \in \{1, \ldots, n\}$
   เพราะว่า $\mathscr{C}$ เป็นโซ่ เราจึงอาจเรียงอันดับ $L_1, \ldots, L_n$ เป็น $L_1 \subseteq \ldots \subseteq L_n$
   ส่งผลให้ $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ เป็นเวกเตอร์ใน $L_n$ ซึ่งเป็นเซตอิสระเชิงเส้น เพราะฉะนั้น $c_1 = \cdots = c_n = 0$
   เราจึงสรุปได้ว่า $\bigcup\mathscr{C}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น นั่นคือ $\bigcup\mathscr{C}$ อยู่ใน $\mathscr{L}$

   จากบทตั้งซอร์นที่กล่าวว่า "หากเซตอันดับบางส่วน $P$ มีสมบัติว่าโซ่ทุกโซ่ใน $P$ มีขอบเขตบนน้อยสุดใน $P$ จะได้ว่า $P$ มีสมาชิกที่ใหญ่สุด" ทำให้เราสรุปจากการพิสูจน์ข้างต้นได้ว่า มีเซต $\mathcal{B}$ ใน $\mathscr{L}$ ซึ่งใหญ่สุดเทียบกับอันดับ $\subseteq$ นั่นคือ มีเซตย่อย $\mathcal{B}$ ของ $V$ ซึ่งเป็นเซตอิสระเชิงเส้นที่ใหญ่สุด

   เราจะแสดงว่า $\mathcal{B}$ แผ่ทั่ว $V$ โดยอาศัยการพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง ให้ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ใน $V$ ซึ่งไม่อยู่ใน $\mathrm{Span}\ \mathcal{B}$ จึงได้โดยบทตั้ง 5.1.5 2. ว่า $\mathcal{B} \cup \{\vec{u}\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น ซึ่งขัดแย้งกับ $\mathcal{B}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้นที่ใหญ่สุด เพราะฉะนั้น $\mathcal{B}$ แผ่ทั่ว $V$

   เพราะว่า $\mathcal{B}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้นซึ่งแผ่ทั่ว $V$ จึงสรุปได้ว่า $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $V$ ตามต้องการ

**ทฤษฎีบท 5.1.6** *ทุก ๆ ปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์จะมีฐานหลักอย่างน้อยหนึ่งฐานเสมอ*

**ข้อสังเกต** จากการสร้างฐานหลักสำหรับปริภูมิเวกเตอร์ที่กล่าวมาข้างต้นนั้น เราอาจกล่าวได้ว่าฐานหลักสำหรับปริภูมิเวกเตอร์คือเซตย่อยของ $V$ ที่ใหญ่สุดซึ่งอิสระเชิงเส้น และหากปริภูมิเวกเตอร์มีมิติจำกัด เราแสดงการมีจริงของฐานหลักได้โดยไม่ต้องอาศัยบทตั้งซอร์น

**ทฤษฎีบท 5.1.7** *ให้ $V$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ และ $A$ เป็นเซตย่อยของ $V$ ที่อิสระเชิงเส้น*
*จะได้ว่ามีฐานหลัก $\mathcal{B}$ สำหรับ $V$ ซึ่ง $A \subseteq \mathcal{B}$*
*นั่นคือ เราสามารถขยายเซตย่อยใด ๆ ของ $V$ ซึ่งเป็นเซตอิสระเชิงเส้นให้เป็นฐานหลักสำหรับ $V$ ได้เสมอ*

**บทพิสูจน์** ให้ $\mathscr{A} = \{L \subseteq V : A \subseteq L$ และ $L$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น$\}$ ซึ่งเซตนี้มีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งเซตคือ $A$ และ เรากำหนดอันดับบางส่วนบน $\mathscr{L}$ โดย $\subseteq$ และแสดงตามการพิสูจน์ทฤษฎีบท 5.1.6 $\square$

**บทตั้ง 5.1.8** *ถ้า $n > m$ แล้วระบบเชิงเส้นเอกพันธุ์ในตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เหนือฟีลด์ $F$*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \tag{5.1.1}$$

*มีผลเฉลยไม่ชัด*

**บทพิสูจน์** เพราะว่า $n > m$ ดังนั้นระบบเชิงเส้นนี้มีตัวแปรเสรีอย่างน้อยหนึ่งตัว
ส่งผลให้ระบบเชิงเส้นนี้มีผลเฉลยไม่ชัดตามต้องการ $\square$

**บทตั้ง 5.1.9** *ให้ $V$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$*
*ให้ $G$ เป็นเซตย่อยของ $V$ ที่แผ่ทั่ว $V$ และ $L$ เป็นเซตย่อยของ $V$ ที่อิสระเชิงเส้น*
*ถ้า $G = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ และ $L = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ จะได้ว่า $n \leq m$*

**บทพิสูจน์** เพราะว่า $G$ แผ่ทั่ว $V$ ดังนั้น แต่ละ $\vec{w}_j$ ใน $L$ จะมี $a_{1j}, \ldots, a_{mj}$ ใน $F$ ซึ่ง

$$\vec{w}_j = a_{1j}\vec{v}_1 + \cdots + a_{mj}\vec{v}_m \text{ ทุก } j \in \{1, \ldots, n\}$$

สมมติว่า $n > m$ จึงได้โดยบทตั้ง 5.1.8 ว่ามี $(c_1, \ldots, c_n)$ ใน $F^n$ ซึ่งไม่เท่ากับ $\vec{0}_n$ ที่เป็นผลเฉลยของ (5.1.1)
ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} c_1\vec{w}_1 + \cdots + c_n\vec{w}_n &= \sum_{j=1}^{n} c_j\vec{w}_j = \sum_{j=1}^{n} c_j(a_{1j}\vec{v}_1 + \cdots + a_{mj}\vec{v}_m) \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}c_j)\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{m} 0\vec{v}_i = \vec{0}_V \end{aligned}$$

และส่งผลให้ $L$ เป็นเซตซึ่งไม่อิสระเชิงเส้น ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง เพราะฉะนั้น $n \leq m$ $\square$

**ทฤษฎีบท 5.1.10** *ให้ $V$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ ซึ่งมีมิติจำกัด จะได้ว่าฐานหลักสองฐานใด ๆ สำหรับ $V$ มีจำนวนเวกเตอร์เท่ากัน*

**บทพิสูจน์** ให้ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ และ $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $V$
ดังนั้น $\mathcal{B}$ และ $\mathcal{B}'$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น และ แผ่ทั่ว $V$
จึงได้โดยบทตั้ง 5.1.9 ว่า $n \leq m$ และ $m \leq n$ เพราะฉะนั้น $m = n$ $\square$

ปริภูมิเวกเตอร์ $V$ ที่มีมิติจำกัด อาจมีฐานหลักที่แตกต่างกันมากกว่าหนึ่งฐาน แต่จากทฤษฎีบท 5.1.10 จะได้ว่าฐานหลักทุกฐานหลักสำหรับปริภูมิเวกเตอร์ $V$ ซึ่งมีมิติจำกัดจะมีจำนวนเวกเตอร์เท่ากัน และ เรียกจำนวนเวกเตอร์ของฐานหลักสำหรับ $V$ ว่า**มิติ (dimension) ของ** $V$ เขียนแทนด้วย $\dim V$

**ตัวอย่าง 5.1.7** 1. เพราะว่า $\emptyset$ เป็นฐานหลักสำหรับปริภูมิย่อย $\{\vec{0}_V\}$ เพราะฉะนั้น $\dim\{\vec{0}_V\} = |\emptyset| = 0$

2. สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, \ldots, m$ และ $n = 1, 2, \ldots, n$ ให้ $E_{ij}$ แทน $m \times n$ เมทริกซ์ซึ่งสมาชิกที่อยู่ในแถวที่ $i$ และหลักที่ $j$ มีค่าเป็น 1 และสมาชิกตัวอื่นๆ มีค่าเป็น 0 จะได้ว่า $\mathcal{B} = \{E_{ij} : i = 1, 2, \ldots, m$ และ $j = 1, 2, \ldots, n\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $M_{m,n}(F)$ เรียกว่า**ฐานหลักมาตรฐาน (standard basis) สำหรับ** $M_{m,n}(F)$ เพราะฉะนั้น $\dim M_{m,n}(F) = mn$

   ในกรณีที่ $n = 1$ ให้ $\vec{e}_i = E_{i1}$ สำหรับทุก ๆ $i = 1, 2, \ldots, m$ ดังนั้น $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m\}$ เป็นฐานหลักมาตรฐานสำหรับ $F^m$

3. $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $F_n[x]$ เรียกว่า**ฐานหลักมาตรฐานสำหรับ** $F_n[x]$ เพราะฉะนั้น $\dim F_n[x] = n + 1$

4. $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $F[x]$ เรียกว่า**ฐานหลักมาตรฐานสำหรับ** $F[x]$ เพราะฉะนั้น $F[x]$ ไม่มีมิติจำกัด

5. $\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\right\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $M_2(\mathbb{R})$

6. จาก $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$
   เราอาจพิจารณา $\mathbb{C}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ ซึ่งมีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\{1, i\}$

**ตัวอย่าง 5.1.8** จงแสดงว่า $W = \left\{\begin{bmatrix}a+b & b\\a-2c & 0\end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$ เป็นปริภูมิย่อยของ $M_2(\mathbb{R})$ พร้อมทั้งหาฐานหลักและมิติของ $W$

**ลองทำ 5.1.7** 1. จงแสดงว่า $\{2, 1+x, x^3, x^4+x^2+2, 3x^4+x\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $\mathbb{R}_4[x]$

2. จงพิจารณาว่าเซตต่อไปนี้เป็นฐานหลักสำหรับ $M_2(\mathbb{R})$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
   (ก) $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ (ข) $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\right\}$

**ทฤษฎีบท 5.1.11** *ให้ $V$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ ที่มีมิติจำกัด ถ้า $W$ เป็นปริภูมิย่อยของ $V$ ซึ่ง $W \neq V$ แล้ว $\dim W < \dim V$*

**บทพิสูจน์** ให้ $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $W$ โดยทฤษฎีบท 5.1.7 เราสามารถขยาย $\mathcal{B}$ ให้เป็นฐานหลัก $\mathcal{C}$ สำหรับ $V$ ดังนั้น $\dim W \leq \dim V$ โดยอาศัยการพิสูจน์โดยแย้งสลับที่เราสมมติว่า $\dim W = \dim V$ และจะแสดงว่า $W = V$ เพราะว่า $\dim W = \dim V$ ดังนั้น $|\mathcal{B}| = |\mathcal{C}|$ ทำให้ได้ว่า $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ ส่งผลให้ $W = \operatorname{Span} \mathcal{B} = \operatorname{Span} \mathcal{C} = V$ □

ให้ $A$ และ $B$ เป็นเซตย่อยใด ๆ ที่ไม่ใช่เซตว่างของปริภูมิเวกเตอร์ $V$ เหนือฟีลด์ $F$
เรานิยาม

$$A + B = \{\vec{a} + \vec{b} : \vec{a} \in A \text{ และ } \vec{b} \in B\}$$

**ทฤษฎีบท 5.1.12** *ให้ $W_1$ และ $W_2$ เป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ $V$ เหนือฟีลด์ $F$ เราได้ว่า $W_1 + W_2$ และ $W_1 \cap W_2$ เป็นปริภูมิย่อยของ $V$ และ $W_1 \times W_2$ เป็นปริภูมิย่อยของ $V \times V$*

**ตัวอย่าง 5.1.9** กำหนดให้

$$W_1 = \{(x_1 - x_2, x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \text{ และ } W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 = x_3\}$$

เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$ จงหาฐานหลักและมิติของ $W_1 + W_2$ และ $W_1 \cap W_2$

**ทฤษฎีบท 5.1.13** *ถ้า $W_1$ และ $W_2$ เป็นปริภูมิย่อยที่มีมิติจำกัดของปริภูมิเวกเตอร์ $V$ เหนือฟีลด์ $F$ แล้ว $W_1 + W_2$ เป็นปริภูมิย่อยของ $V$ ที่มีมิติจำกัด และ*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

**บทพิสูจน์** (บทพิสูจน์คร่าว ๆ) สมมติว่า $W_1$ และ $W_2$ มีมิติจำกัด
โดยการขยายฐานหลัก $\mathcal{B}$ ของ $W_1 \cap W_2$ ไปเป็นฐานหลัก $\mathcal{B}_1$ สำหรับ $W_1$ และไปเป็นฐานหลัก $\mathcal{B}_2$ ของ $W_2$ เราจะแสดงได้ว่า $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ จะเป็นฐานหลักฐานหนึ่งของ $W_1 + W_2$ และ $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$
เพราะว่า $|\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2| = |\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2| - |\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2|$ จึงได้สูตรสำหรับมิติของ $W_1 + W_2$ ตามต้องการ $\square$

**ลองทำ 5.1.8** กำหนดให้

$$W_1 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a - b = c - d\right\}$$

$$\text{และ} \quad W_2 = \left\{\begin{bmatrix} a-b & b+c \\ a & b-c \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$$

(ก) จงแสดงว่า $W_1$ และ $W_2$ เป็นปริภูมิย่อยของ $M_2(\mathbb{R})$
(ข) จงหาฐานหลักและมิติของ $W_1$ และ $W_2$
(ค) จงหาฐานหลักและมิติของ $W_1 + W_2$ และ $W_1 \cap W_2$

## 5.2 การแปลงเชิงเส้น

ให้ $V$ และ $W$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ เราเรียกฟังก์ชัน $T : V \to W$ ว่า**การแปลงเชิงเส้น (linear transformation)** ถ้าสำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v} \in V$ และสเกลาร์ $c \in F$ เราได้ว่า

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) \quad \text{และ} \quad T(c\vec{u}) = cT(\vec{u})$$

**ข้อสังเกต** 1. $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก $V$ ไป $W$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v} \in V$ และสเกลาร์ $c, d \in F$ จะได้ว่า $T(c\vec{u} + d\vec{v}) = cT(\vec{u}) + dT(\vec{v})$

2. ถ้า $T : V \to W$ เป็นการแปลงเชิงเส้น แล้ว

$$T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \text{ และ } T(-\vec{v}) = -T(\vec{v}) \text{ สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ } \vec{v} \in V$$

**ตัวอย่าง 5.2.1** 1. ให้ $T : F^n \to F^{n-1}$ กำหนดโดย

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

จะได้ว่า $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้น

2. ให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ $T : F_{n-1}[x] \to F^n$ กำหนดโดย
$$T(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$$
สำหรับทุก ๆ $a_i \in F$ จะได้ว่า $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้น

3. ให้ $T : F[x] \to F$ กำหนดโดย $T(p(x)) = p(1)$ สำหรับทุก ๆ พหุนาม $p(x) \in F[x]$ จะได้ว่า $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้น

4. ให้ $T : M_{m,n}(F) \to M_{n,m}(F)$ กำหนดโดย $T(A) = A^T$ สำหรับทุก ๆ $m \times n$ เมทริกซ์ $A$ จะได้ว่า $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้น

5. ให้ $T : \ell^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย $T((a_n)) = \lim_{n\to\infty} a_n$ จะได้ว่า $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้น

6. ให้ $C^1(-\infty,\infty)$ แทนเซตของฟังก์ชันค่าจริงซึ่งอนุพันธ์มีความต่อเนื่องบน $(-\infty,\infty)$ กำหนด $D : C^1(-\infty,\infty) \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ โดย $D(f) = f'$ สำหรับทุก ๆ ฟังก์ชัน $f \in C^1(-\infty,\infty)$ จะได้ว่า $D$ เป็นการแปลงเชิงเส้น

7. ให้ $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย $T(A) = \det A$ สำหรับทุก ๆ $2 \times 2$ เมทริกซ์ $A$ จะได้ว่า $T$ ไม่เป็นการแปลงเชิงเส้น

8. ให้ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย $T(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$ สำหรับทุก ๆ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ จะได้ว่า $T$ ไม่เป็นการแปลงเชิงเส้น

**ลองทำ 5.2.1** 1. ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก $M_2(\mathbb{R})$ ไปยัง $\mathbb{R}$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
(ก) $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\right) = a + c - 2d$ (ข) $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\right) = a^2 + c^2$

2. ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นการแปลงเชิงเส้นบน $F_2[x]$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
(ก) $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2$
(ข) $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + 1) + (a_1 + 1)x + (a_2 + 1)x^2$

3. ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นการแปลงเชิงเส้นบน $C^0(-\infty,\infty)$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
(ก) $T(f(x)) = 1 + f(x)$ (ข) $T(f(x)) = f(f(x))$ (ค) $T(f(x)) = f(x-1)$

4. สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เหนือฟีลด์ $F$ เราเรียกผลบวกของสมาชิกทแยงมุม $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ ว่า**รอย (trace) ของเมทริกซ์** $A$ เขียนแทนด้วย $\operatorname{tr} A$ จงแสดงว่า ฟังก์ชัน $T : M_n(F) \to F$ กำหนดโดย $T(A) = \operatorname{tr} A$ เป็นการแปลงเชิงเส้น

5. ให้ $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากของปริภูมิย่อย $H$ ของ $\mathbb{R}^n$ จงแสดงว่าฟังก์ชัน $T : \mathbb{R}^n \to H$ ซึ่งกำหนดโดย $T(\vec{x}) = \operatorname{proj}_H(\vec{x})$ สำหรับทุก ๆ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ เป็นการแปลงเชิงเส้น

**ทฤษฎีบท 5.2.1** *ให้ $V$ และ $W$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ และ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $V$ จะได้ว่า สำหรับฟังก์ชัน $t$ ใด ๆ จาก $\mathcal{B}$ ไปยัง $W$ จะมีการแปลงเชิงเส้น $T : V \to W$ เพียงการแปลงเชิงเส้นเดียว ซึ่ง $T(\vec{v}_i) = t(\vec{v}_i)$ สำหรับทุก ๆ $i = 1, 2, \ldots, n$*

ดังนั้น ในการนิยามการแปลงเชิงเส้น $T$ จาก $V$ ไปยัง $W$ จึงเพียงพอที่จะกำหนดค่าของ $T$ บนทุก ๆ เวกเตอร์ในฐานหลักสำหรับ $V$ เท่านั้น

**ตัวอย่าง 5.2.2** จงหาสูตรของการแปลงเชิงเส้น $T$ ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขที่กำหนดให้

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_4[x]$ โดยที่ $T(1,0,0) = 1+x, T(1,1,1) = 2+x^3$ และ $T(0,1,0) = x^4 + 3x + 1$

2. $T : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_3[x]$ โดยที่ $T(2) = 4x^3$ และ $T(1+i) = 1+x$

3. $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{C}$ โดยที่ $T(1) = 2i, T(1+x) = 1+i$ และ $T(1-x^2) = 2-i$

**ตัวอย่าง 5.2.3** ให้ $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}[x]$ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่ง $T(x+1) = x, T(x-1) = 1$ และ $T(x^2) = -x^2$ จงหา $T(2+3x-x^2)$

**ลองทำ 5.2.2**

1. จงหาสูตรของการแปลงเชิงเส้น $T$ ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขที่กำหนดให้
   (ก) $T : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_2[x]$ โดยที่ $T(1-i) = 2x^2$ และ $T(1+i) = 1+x$
   (ข) $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ โดยที่ $T(1) = (2,1), T(1-x) = (0,1)$ และ $T(x+x^2) = (1,0)$

2. ให้ $T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}^3$ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่ง $T(2-x) = (1,-1,1)$ และ $T(1+x) = (0,1,0)$ จงหา $T(-1+2x)$

3. ให้ $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $\mathbb{R}^2$ และ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ซึ่ง $T(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{v}$ และ $T(2\vec{v}-\vec{w}) = 2\vec{v}$ จงหา $T(\vec{v})$ และ $T(\vec{w})$

**ทฤษฎีบท 5.2.2** *ให้ $V$ และ $W$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ และ $\mathcal{L}(V,W)$ แทนเซตของการแปลงเชิงเส้นทั้งหมดจาก $V$ ไป $W$ นั่นคือ*

$$\mathcal{L}(V,W) = \{T \mid T : V \to W \text{ เป็นการแปลงเชิงเส้น}\}$$

*เรากำหนดการบวกและการคูณด้วยสมาชิกของ $F$ โดยสำหรับการแปลงเชิงเส้น $S$ และ $T$ ใน $\mathcal{L}(V,W)$ และ $c \in F$ เราให้*

$$(S+T)(\vec{v}) = S(\vec{v}) + T(\vec{v}) \quad \text{และ} \quad (c\,S)(\vec{v}) = cS(\vec{v}) \quad \text{สำหรับทุก ๆ } \vec{v} \in V$$

*จะได้ว่า $\mathcal{L}(V,W)$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ เรียกว่า***ปริภูมิเชิงเส้น (linear space)**

ให้ $V$ และ $W$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ และ $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก $V$ ไปยัง $W$ **เคอร์เนล (kernel)** ของการแปลงเชิงเส้น $T$ เขียนแทนด้วย $\ker T$ คือเซต

$$\{\ker T = \vec{v} \in V : T(\vec{v}) = \vec{0}_W\}$$

และ **เรนจ์ (range) ของ** $T$ คือเซต

$$\operatorname{range} T = \{\vec{w} \in W : \text{ มี } \vec{v} \in V \text{ ซึ่ง } T(\vec{v}) = \vec{w}\} = \{T(\vec{v}) \in W : \vec{v} \in V\}$$

ซึ่งเราได้ว่า

**ทฤษฎีบท 5.2.3** *ให้ $V$ และ $W$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ และให้ $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้น จาก $V$ ไปยัง $W$ เราได้ว่า $\ker T$ เป็นปริภูมิย่อยของ $V$ และ $\operatorname{range} T$ เป็นปริภูมิย่อยของ $W$*

**บทพิสูจน์** ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด $\square$

ให้ $T$ เป็นฟังก์ชันจากเซต $V$ ไปเซต $W$ เรากล่าวว่า $T$ เป็น **ฟังก์ชันทั่วถึง (onto)** $W$ ก็ต่อเมื่อ $\operatorname{range} T = W$ และเรากล่าวว่า $T$ **มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one)** หรือเขียนสั้น ๆ เป็น “$T$ 1-1” ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละเวกเตอร์ $\vec{x}$ และ $\vec{y}$ ใน $V$ ถ้า $T(\vec{x}) = T(\vec{y})$ แล้ว $\vec{x} = \vec{y}$

ให้ $V$ และ $W$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์มิติจำกัดเหนือฟีลด์ $F$ และ $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก $V$ ไปยัง $W$ เราเรียกมิติของเคอร์นัลของ $T$ ว่า**ศูนยภาพ (nullity) ของ** $T$ เขียนแทนด้วย $\operatorname{nullity} T$ และ เรียกมิติของเรนจ์ของ $T$ ว่า**แรงก์ (rank) ของ** $T$ เขียนแทนด้วย $\operatorname{rank} T$

ดังนั้นเราจึงได้จากทฤษฎีบท 5.2.3 และทฤษฎีบท 5.1.11 ว่า

**บทแทรก 5.2.4** *ให้ $V$ และ $W$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ โดยที่ $W$ มีมิติจำกัด และให้ $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก $V$ ไปยัง $W$ จะได้ว่า $T$ มีสมบัติทั่วถึง ก็ต่อเมื่อ $\operatorname{rank} T = \dim W$*

**ตัวอย่าง 5.2.4** จงหาเคอร์เนลและเรนจ์ของการแปลงเชิงเส้นในตัวอย่าง 5.2.1

**ตัวอย่าง 5.2.5** ให้ $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ เป็นการแปลงเชิงเส้น ซึ่งกำหนดโดย

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b, b + c, 0)$$

จงหาฐานหลักสำหรับเคอร์เนลของ $T$ และฐานหลักสำหรับเรนจ์ของ $T$ พร้อมทั้งบอก $\operatorname{nullity} T$ และ $\operatorname{rank} T$

**ลองทำ 5.2.3** สำหรับฟังก์ชัน $T$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{C}$ กำหนดโดย $T(a + bx + cx^2) = (a + b) + (a + c)i$
2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_3[x]$ กำหนดโดย $T(a, b, c) = ax^3 + (b - c)$
3. $T : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^4$ กำหนดโดย $T(a + bi) = (a, b, a + b, a - b)$

(ก) จงแสดงว่า $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้น

(ข) จงหาฐานหลักสำหรับเคอร์เนลของ $T$ และฐานหลักสำหรับเรนจ์ของ $T$ พร้อมทั้งบอก $\operatorname{nullity} T$ และ $\operatorname{rank} T$

(ค) จงพิจารณาว่า $T$ มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง หรือ มีสมบัติทั่วถึง หรือไม่ เพราะเหตุใด

ให้ $V$ และ $W$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ และ $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก $V$ ไปยัง $W$ เราได้ว่า สำหรับเวกเตอร์ $\vec{v}$ ใน $V$ และ $\vec{x}$ ใน $\ker T$ จะได้

$$T(\vec{v} + \vec{x}) = T(\vec{v}) + T(\vec{x}) = T(\vec{v}) + \vec{0}_W = T(\vec{v})$$

นั่นคือ

$$T(\{\vec{v}\} + \ker T) = \{T(\vec{v})\} \text{ สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ } \vec{v} \text{ ใน } V$$

เพราะว่า $\vec{0}_V$ อยู่ใน $\ker T$ ดังนั้น $|\ker T| \geq 1$ และ ($|\ker T| = 1$ ก็ต่อเมื่อ $\ker T = \{\vec{0}_V\}$) ทำให้เราได้ว่า

**ทฤษฎีบท 5.2.5** *ให้ $V$ และ $W$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ ถ้า $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก $V$ ไปยัง $W$ แล้ว $T$ มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ $\ker T = \{\vec{0}_V\}$*

สังเกตต่อว่า หาก $V$ มีมิติจำกัด และ $\ker T$ มีฐานหลักฐานหนึ่งเป็น $\mathcal{B} = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ เราอาจขยาย $\mathcal{B}$ ไปเป็นฐานหลัก $\mathcal{C} = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_\ell\}$ สำหรับ $V$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
\operatorname{range} T &= \{T(\vec{v}) : \vec{v} \in V\} \\
&= \{T(c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_k\vec{x}_k + d_1\vec{v}_1 + \cdots + d_\ell\vec{v}_\ell) : c_1, \ldots, c_k, d_1, \ldots, d_\ell \in F\} \\
&= \{c_1T(\vec{x}_1) + \cdots + c_kT(\vec{x}_k) + d_1T(\vec{v}_1) + \cdots + d_\ell T(\vec{v}_\ell) : c_1, \ldots, c_k, d_1, \ldots, d_\ell \in F\}
\end{aligned}$$

และเวกเตอร์ $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ อยู่ใน $\ker T$ ดังนั้น

$$\operatorname{range} T = \{d_1 T(\vec{v}_1) + \cdots + d_\ell T(\vec{v}_\ell) : d_1, \ldots, d_\ell \in F\} = \operatorname{Span}\{T(\vec{v}_1), \ldots, T(\vec{v}_\ell)\}$$

เราจะแสดงว่า $\{T(\vec{v}_1), \ldots, T(\vec{v}_\ell)\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น โดยให้ $d_1, \ldots, d_\ell$ เป็นสเกลาร์ใด ๆ ใน $F$ ซึ่ง

$$d_1 T(\vec{v}_1) + \cdots + d_\ell T(\vec{v}_\ell) = \vec{0}_W$$

ดังนั้น

$$T(d_1\vec{v}_1 + \cdots + d_\ell \vec{v}_\ell) = \vec{0}_W$$

ส่งผลให้ $d_1\vec{v}_1 + \cdots + d_\ell\vec{v}_\ell$ อยู่ใน $\ker T$
เนื่องจาก $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ แผ่ทั่ว $\ker T$ จึงมี $b_1, \ldots, b_k$ เป็นสเกลาร์ใน $F$ ซึ่งทำให้

$$d_1\vec{v}_1 + \cdots + d_\ell\vec{v}_\ell = b_1\vec{x}_1 + \cdots + b_k\vec{v}_k$$

และจัดรูปได้เป็น

$$d_1\vec{v}_1 + \cdots + d_\ell\vec{v}_\ell - b_1\vec{x}_1 - \cdots - b_k\vec{v}_k = \vec{0}_V$$

เพราะว่า $\mathcal{C}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น จึงได้ว่า $d_1 = \cdots = d_\ell = b_1 = \cdots = b_k = 0$
เพราะฉะนั้น $\{T(\vec{v}_1), \ldots, T(\vec{v}_\ell)\}$ จะเป็นฐานหลักสำหรับ $\operatorname{range} T$ ทำให้เราสรุปได้ว่า

$$\dim V = k + \ell = \dim\ker T + \dim\operatorname{range} T = \operatorname{nullity} T + \operatorname{rank} T$$

**ทฤษฎีบท 5.2.6** *ให้ $V$ และ $W$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ และให้ $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก $V$ ไปยัง $W$ ถ้า $V$ มีมิติจำกัด แล้วจะได้ว่า* $\dim V = \operatorname{nullity} T + \operatorname{rank} T$

ให้ $V$ และ $W$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ เรากล่าวว่า $V$ **สมสัณฐานกับ (isomorphic to)** $W$ ถ้ามีการแปลงเชิงเส้น $T : V \to W$ ซึ่งมีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง เขียนแทนด้วย $V \cong W$

**ลองทำ 5.2.4** จงแสดงว่าฟังก์ชัน $T$ ต่อไปนี้เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่งมีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง
(ก) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ กำหนดโดย $T(x, y) = x - iy$
(ข) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[x]$ กำหนดโดย $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + c) + (b + d)x + cx^2 + dx^3$

ให้ $V$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ และ $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $V$ นั่นคือ เซต $\mathcal{B}$ แผ่ทั่ว $V$ และ $\mathcal{B}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น ทำให้สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{x} \in V$ จะมี $c_1, c_2, \ldots, c_n \in F$ เพียงชุดเดียวที่ $\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \cdots + c_n\vec{b}_n$ เราเรียกเวกเตอร์

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in F^n$$

ว่า**เวกเตอร์พิกัดของ $\vec{x}$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$ (coordinate vector of $\vec{x}$ relative to $\mathcal{B}$)** และเรียก $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ว่า**พิกัดที่ $i$ ของ $\vec{x}$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$ ($i^{\text{th}}$-coordinates of $\vec{x}$ relative to $\mathcal{B}$)**

สร้างฟังก์ชัน $T : V \to F^n$ โดย

$$T : \vec{x} = [\vec{x}]_{\mathcal{B}} \text{ สำหรับทุก ๆ } \vec{x} \text{ ใน } V$$

เราแสดงได้โดยตรงว่า $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้นที่มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง เพราะฉะนั้น $V$ จึงสมสัณฐานกับ $F^n$

**บทแทรก 5.2.7** *ให้ $V$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ ซึ่งมีมิติ $n$ เราได้ว่า $V \cong F^n$ ดังนั้น ทุก ๆ ปริภูมิเวกเตอร์ซึ่งมีมิติเท่ากันจะสมสัณฐานกัน*

จากบทแทรก 5.2.7 ทำให้ได้ว่าในการศึกษาปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ ซึ่งมีมิติจำกัด เราเพียงพอที่จะศึกษาปริภูมิยุคลิดเหนือฟีลด์ $F$ โดยอาศัยเมทริกซ์ ซึ่งได้กล่าวไว้แล้วในทุก ๆ บทก่อนหน้านี้

**ตัวอย่าง 5.2.6** จงแสดงว่า $\mathcal{B} = \{2 - x, 1 - x, x^2\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $\mathbb{R}_2[x]$ และหาเวกเตอร์พิกัดของ $3x^2 + 2x - 5$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$

**ลองทำ 5.2.5** จงแสดงว่า $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 2i)\}$ เป็นฐานหลักฐานหนึ่งสำหรับ $\mathbb{C}^4$ และหาเวกเตอร์พิกัดของ $(2, -16, 3, -i)$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$

ให้ $V$ และ $W$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $F$ และ ให้ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $V$ และ $\mathcal{C} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $W$ กำหนด $T : V \to W$ เป็นการแปลงเชิงเส้น

เราเรียก $m \times n$ เมทริกซ์ซึ่งมีหลักที่ $j$ เป็นเวกเตอร์พิกัด $[T(\vec{v}_j)]_{\mathcal{C}}$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{C}$ สำหรับทุก ๆ $j = 1, 2, \ldots, n$ ว่า**เมทริกซ์สำหรับ $T$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$ และ $\mathcal{C}$ (matrix for $T$ relative to the bases $\mathcal{B}$ and $\mathcal{C}$)** เขียนแทนด้วย $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ นั่นคือ

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} [T(\vec{v}_1)]_{\mathcal{C}} & [T(\vec{v}_2)]_{\mathcal{C}} & \ldots & [T(\vec{v}_n)]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$$

สังเกตว่า สำหรับแต่ละ เวกเตอร์ $\vec{x} \in V$ เราได้ว่า $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n$ ดังนั้น $T(\vec{x}) = c_1T(\vec{v}_1) + c_2T(\vec{v}_2) + \cdots + c_nT(\vec{v}_n)$ เพราะฉะนั้น $[T(\vec{x})]_{\mathcal{C}} = c_1[T(\vec{v}_1)]_{\mathcal{C}} + c_2[T(\vec{v}_2)]_{\mathcal{C}} + \cdots + c_n[T(\vec{v}_n)]_{\mathcal{C}}$ นั่นคือ

$$[T(\vec{x})]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$$

สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{x} \in V$ ในกรณีที่ $T : V \to V$ เป็นการแปลงเชิงเส้น และ $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ เราเขียนแทน $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ ด้วย $[T]_{\mathcal{B}}$ และเรียกว่า**เมทริกซ์สำหรับ $T$ สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$ (matrix for $T$ relative to the basis $\mathcal{B}$)**

**ทฤษฎีบท 5.2.8** *ให้ $V$ และ $W$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์ซึ่งมีมิติจำกัดเหนือฟีลด์ $F$, $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $V$ และ $\mathcal{C}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $W$ โดยที่ $|\mathcal{B}| = n$ และ $|\mathcal{C}| = m$ กำหนด $\varphi : \mathcal{L}(V, W) \to M_{m,n}(F)$ โดย*

$$\varphi : T \mapsto [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

*สำหรับทุก ๆ การแปลงเชิงเส้น $T \in \mathcal{L}(V, W)$ จะได้ว่า $\varphi$ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่งมีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง ดังนั้น $\mathcal{L}(V, W) \cong M_{m,n}(F)$ นั่นคือ เราสามารถแทนทุก ๆ การแปลงเชิงเส้นจาก $V$ ไปยัง $W$ ด้วยเมทริกซ์เหนือฟีลด์ $F$ มิติ $m \times n$*

**ตัวอย่าง 5.2.7** ให้ $T : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_2[x]$ กำหนดโดย

$$T(a + bi) = a + (a - b)x + bx^2 \quad \text{สำหรับทุก ๆ } a, b \in \mathbb{R}$$

และให้ $\mathcal{B} = \{1, i\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{C}$ และ $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}_2[x]$
จงแสดงว่า $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้นและจงหา $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$

**ตัวอย่าง 5.2.8** ให้ $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ กำหนดโดย

$$T(p(x)) = p(x+1) \quad \text{สำหรับทุก ๆ } p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$$

และให้ $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ และ $\mathcal{B}' = \{2, 1+x, -2x^2\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}_2[x]$
จงแสดงว่า $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้นและจงหา $[T]_{\mathcal{B}}$, $[T]_{\mathcal{B}'}$ และ $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$

**ลองทำ 5.2.6**

1. ให้ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ กำหนดโดย $T(x_1, x_2) = x_2 - x_1 i$ สำหรับทุก ๆ $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ และให้ $\mathcal{B} = \{(1,0), (0,1)\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}^2$ และ $\mathcal{C} = \{1, i\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{C}$ จงแสดงว่า $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้นและจงหา $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$
2. ให้ $T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ กำหนดโดย $T(p(x)) = x^2 p(x)$ สำหรับทุก ๆ $p(x) \in \mathbb{R}_1[x]$, $\mathcal{B} = \{1+x, x\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}_1[x]$ และ $\mathcal{C} = \{1+x, x, x^2-1, x^3\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $\mathbb{R}_3[x]$ จงแสดงว่า $T$ เป็นการแปลงเชิงเส้นและจงหา $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$
3. ให้ $\mathcal{B} = \{\sin t, \cos t\}$ และ $\mathcal{B}' = \{\sin t + \cos t, \sin t - \cos t\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $H = \operatorname{Span} \mathcal{B} = \operatorname{Span} \mathcal{B}'$ ซึ่งปริภูมิย่อยของ $C^1(-\infty, \infty)$ และ $D : H \to H$ กำหนดโดย $D(f) = f'$ สำหรับทุก ๆ $f \in H$ จงหา $[D]_{\mathcal{B}}$, $[D]_{\mathcal{B}'}$ และ $[D]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$

## 5.3 ปริภูมิผลคูณภายใน

ให้ $V$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ $\mathbb{R}$ เรากล่าวว่า $V$ เป็น**ปริภูมิผลคูณภายใน (inner product space)** ถ้ามี $\langle \cdot, \cdot \rangle$ เป็นฟังก์ชันจาก $V \times V$ ไปยัง $\mathbb{R}$ เรียกว่า**ผลคูณภายใน (inner product) สำหรับ** $V$ ซึ่งสอดคล้อง

IN1 $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$ สำหรับทุก ๆ $\vec{u} \in V$ และ $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} = \vec{0}$

IN2 $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ สำหรับทุก ๆ $\vec{v}, \vec{w} \in V$

IN3 $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ สำหรับทุก ๆ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

IN4 $\langle c\vec{v}, \vec{w} \rangle = c\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ สำหรับทุก ๆ $\vec{v}, \vec{w} \in V$ และ $c \in F$

**ตัวอย่าง 5.3.1** [ตัวอย่างของปริภูมิผลคูณภายใน]

1. ให้ $V = \mathbb{R}^n$ สำหรับจำนวนจริงบวก $a_1, a_2, \ldots, a_n$ และสำหรับเวกเตอร์ $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ และ $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ใน $\mathbb{R}^n$ เรากำหนด
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i v_i$$
จะได้ว่า $\langle \cdot, \cdot \rangle$ เป็นผลคูณภายในสำหรับ $\mathbb{R}^n$
2. ให้ $V = C^0[a, b]$ เป็นเซตของฟังก์ชันค่าจริงที่ต่อเนื่องบน $[a, b]$ ทั้งหมด ซึ่งเซตนี้เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ และสำหรับฟังก์ชันต่อเนื่อง $f$ และ $g$ ใน $C^0[a, b]$ เรากำหนด
$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$$

จะได้ว่า $\langle \cdot, \cdot \rangle$ เป็นผลคูณภายในสำหรับ $C^0[a, b]$

**ตัวอย่าง 5.3.2** จงพิจารณาว่าการกำหนดต่อไปนี้เป็นผลคูณภายในบน $\mathbb{R}^3$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

(ก) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 - x_2y_2 + 2x_3y_3$

(ข) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$

**ลองทำ 5.3.1** จงพิจารณาว่าการกำหนด

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(1)q(1)$$

สำหรับทุก ๆ $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ เป็นผลคูณภายในบน $\mathbb{R}[x]$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

เรามีสมบัติเบื้องต้นของผลคูณภายในซึ่งสามารถพิสูจน์ได้โดยตรงจากบทนิยามดังนี้

**ทฤษฎีบท 5.3.1** *ให้ $V$ เป็นปริภูมิผลคูณภายในเหนือฟีลด์ $\mathbb{R}$ สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ใน $V$ และ $c \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า*

$$\langle \vec{u}, \vec{0}_V \rangle = 0 \quad \text{และ} \quad \langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \quad \text{และ} \quad \langle \vec{v}, c\vec{w} \rangle = c\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

**ข้อสังเกต** สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{y}$ ใน $V$ และสเกลาร์ $a, b, c, d$ ใน $\mathbb{R}$ เราได้จากผลข้างต้นด้วยว่า

$$\langle a\vec{u} + b\vec{v}, c\vec{w} + d\vec{y} \rangle = ac\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + ad\langle \vec{u}, \vec{y} \rangle + bc\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + bd\langle \vec{v}, \vec{y} \rangle$$

ให้ $V$ เป็นปริภูมิผลคูณภายในเหนือฟีลด์ $\mathbb{R}$
เรากำหนด **ความยาว (length) หรือ นอร์ม (norm)** ของเวกเตอร์ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\|\vec{v}\|$ โดย

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$$

และเราเรียกเวกเตอร์ที่มีนอร์มเท่ากับ 1 ว่า**เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector)**

**ตัวอย่าง 5.3.3** ให้ $\vec{x} = (2, 1, 1)$ และ $\vec{y} = (-1, 0, 1)$ โดยการใช้ผลคูณภายในกำหนดโดย

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 \text{ สำหรับทุก ๆ } (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

จงหา $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$, $\|\vec{x}\|$, $\|\vec{y}\|$ และ $\|\vec{x} + \vec{y}\|$

**ลองทำ 5.3.2** ให้ $f(x) = \sin x$ และ $g(x) = \cos x$ โดยการใช้ผลคูณภายในบน $C^0[0, \pi]$ จงหา $\langle f, g \rangle$, $\|f\|$, $\|g\|$ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางเดียวกับ $(f + g)$

**ทฤษฎีบท 5.3.2** *ให้ $V$ เป็นปริภูมิผลคูณภายในเหนือฟีลด์ $\mathbb{R}$ สำหรับแต่ละเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ใน $V$ และ $c \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า*

1. $\|\vec{u}\| \geq 0$ *และ* $\|\vec{u}\| = 0$ *ก็ต่อเมื่อ* $\vec{u} = \vec{0}$
2. $\|c\vec{u}\| = |c|\|\vec{u}\|$
3. $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ *เรียกว่า***อสมการโคชี-ชวาร์ซ (Cauchy-Schwarz inequality)**
4. $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ *เรียกว่า***อสมการอิงรูปสามเหลี่ยม (triangle inequality)**

**บทพิสูจน์** 1. ได้โดยตรงจากบทนิยาม

2. เป็นผลมาจาก $\|c\vec{u}\|^2 = \langle c\vec{u}, c\vec{u}\rangle = c^2\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle = c^2\|\vec{u}\|^2$

3. ถ้า $\vec{u} = \vec{0}_V$ จะได้ทันทีว่าอสมการเป็นจริง สมมติว่า $\vec{u} \neq \vec{0}_V$ และพิจารณา

$$\begin{aligned} 0 \leq \left\langle \vec{v} - \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}, \vec{v} - \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} \right\rangle &= \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle - \left\langle \vec{v}, \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} \right\rangle - \left\langle \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}, \vec{v} \right\rangle + \left\langle \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}, \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} \right\rangle \\ &= \|\vec{v}\|^2 - \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|^2}\langle \vec{v}, \vec{u}\rangle - \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|^2}\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \frac{(\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle)^2}{\|\vec{u}\|^4}\|\vec{u}\|^2 \end{aligned}$$

เพราะว่า $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle \vec{v}, \vec{u}\rangle$ เราจึงจัดรูปอสมการข้างบนได้เป็น

$$0 \leq \|\vec{v}\|^2 - 2\frac{(\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle)^2}{\|\vec{u}\|^2} + \frac{(\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle)^2}{\|\vec{u}\|^2} = \|\vec{v}\|^2 - \frac{(\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle)^2}{\|\vec{u}\|^2}$$

จึงได้ว่า $(\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle)^2 \leq \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$ และดังนั้น $|\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

4. พิจารณา

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}\rangle = \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle + \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \langle \vec{v}, \vec{u}\rangle + \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle$$

เพราะว่า $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle \vec{v}, \vec{u}\rangle$ จึงได้ว่า

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \|\vec{v}\|^2$$

แต่จากโดยอสมการโคชี-ชวาร์ซ เรามี $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ ส่งผลให้

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$$

เพราะฉะนั้น $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ ตามต้องการ □

ให้ $V$ เป็นปริภูมิผลคูณภายในเหนือฟีลด์ $F$ เรากล่าวว่าเวกเตอร์ $\vec{u}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 0$ และเราเรียกเซตของเวกเตอร์ $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ ใน $\mathbb{R}^n$ ว่า**เซตเชิงตั้งฉาก (orthogonal set)** ถ้าเวกเตอร์ที่แตกต่างกันแต่ละคู่ใน $S$ ตั้งฉากกัน นั่นคือ $\langle \vec{u}_i, \vec{u}_j\rangle = 0$ สำหรับทุก $i \neq j$ เมื่อ $i, j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ และเราเรียกเซตเชิงตั้งฉากของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยว่า**เซตเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal set)**

**ทฤษฎีบท 5.3.3** *ให้ $V$ เป็นปริภูมิผลคูณภายในเหนือฟีลด์ $\mathbb{R}$ และ $S$ เป็นเซตย่อยของ $V$ ซึ่งประกอบด้วยเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์และ $S$ เป็นเซตเชิงตั้งฉาก จะได้ว่า $S$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น*

ในทำนองเดียวกับที่ได้ศึกษาไว้แล้วในหัวข้อ 4.2 เราอาจสร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากสำหรับปริภูมิย่อยของปริภูมิผลคูณภายในจากกระบวนการกราม-ชมิดต์ (ทฤษฎีบท 4.2.3) ซึ่งเขียนในรูปแบบของผลคูณภายในได้เป็น

**ทฤษฎีบท 5.3.4** [กระบวนการกราม-ชมิดต์ (The Gram-Schmidt Process)] *ให้ $V$ เป็นปริภูมิผลคูณภายในเหนือฟีลด์ $\mathbb{R}$ และ $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ เป็นเซตย่อยซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นของ $V$ กำหนด*

$$\vec{v}_1 = \vec{x}_1 \quad \text{และ} \quad \vec{v}_k = \vec{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \vec{x}_k, \vec{v}_i\rangle}{\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i\rangle}\vec{v}_i$$

*อย่างเวียนเกิดสำหรับ $k = 2, \ldots, p$ จะได้ว่า $S' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์และ* $\text{Span } S = \text{Span } S'$

**บทแทรก 5.3.5** *ให้ $V$ เป็นปริภูมิผลคูณภายในเหนือฟีลด์ $\mathbb{R}$ ที่มีมิติจำกัด จะได้ว่า $V$ มีฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ*

**ตัวอย่าง 5.3.4** กำหนดผลคูณภายในบน $\mathbb{R}^3$ โดย

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3 \text{ สำหรับทุก ๆ } \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \text{ และ } \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \text{ ใน } \mathbb{R}^3$$

จงใช้กระบวนการกราม-ชมิดต์สร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับ $H = \text{Span}\,\{(1,1,1),(1,1,0)\}$

**ตัวอย่าง 5.3.5** ให้ $W = \text{Span}\,\{1-x, 1+x, \sqrt{x}\}$ เป็นปริภูมิย่อยของ $C^0[0,1]$ จงใช้กระบวนการกราม-ชมิดต์สร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับ $W$ โดยใช้ผลคูณภายในจากตัวอย่าง 5.3.1

**ลองทำ 5.3.3** จงแสดงว่าการกำหนด

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1v_1 - 2u_1v_2 - 2u_2v_1 + 5u_2v_2 + u_2v_3 + u_3v_2 + 4u_3v_3$$

สำหรับทุก ๆ $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ และ $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ใน $\mathbb{R}^3$ เป็นผลคูณภายในบน $\mathbb{R}^3$ และจงใช้กระบวนการกราม-ชมิดต์สร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติจากฐานหลักมาตรฐานสำหรับ $\mathbb{R}^3$

**ลองทำ 5.3.4** จงแสดงว่าการกำหนด

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\pi} \sin x f(x)g(x)\,dx$$

สำหรับทุก ๆ $f, g \in C^0[0,\pi]$ เป็นผลคูณภายในบน $C^0[0,\pi]$ และจงใช้กระบวนการกราม-ชมิดต์สร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับปริภูมิย่อย $W = \text{Span}\,\{\sin x, 1, \cos 3x\}$

# บรรณานุกรม


1. Howard Anton, *Elementary Linear Algebra*, 8th ed, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2000.
2. Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, Lawrence E. Spence, *Linear Algebra*, 4th edn, Prentice Hall, New York, 2002.
3. David C. Lay, *Linear Algebra and its Applications*, 3rd edn, Addison Wesley Longman, 2006.
4. W. Keith Nicholson, *Linear Algebra with Applications*, 7th edn, Mc-Graw Hill, 2013.
5. Gilbert Strang, *Linear Algebra and its Applications*, 4th edn, Brooks Cole, 2006.

# ดรรชนี