1 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

1.1 แนวคิดเกี่ยวกับลิมิตและความต่อเนื่อง

ตัวอย่าง 1.1.1 ให้ $f(x) = \dfrac{x - x^2}{|x|}$, $x \neq 0$

$x < 0$	$f(x)$
-0.5	-1.5
-0.3	-1.3
-0.1	-1.1
-0.01	-1.01
-0.001	-1.001
-0.0001	-1.0001
$\vdots$	$\vdots$

$x > 0$	$f(x)$
0.5	0.5
0.3	0.7
0.1	0.9
0.01	0.99
0.001	0.999
0.0001	0.9999
$\vdots$	$\vdots$

สังเกตว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 0 จากทาง**ซ้าย** $x < 0$ ค่าของฟังก์ชัน f จะใกล้ -1
เรากล่าวว่า -1 เป็น**ลิมิตทางซ้ายของ** $f(x)$ **เมื่อ** x **เข้าใกล้** 0 เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

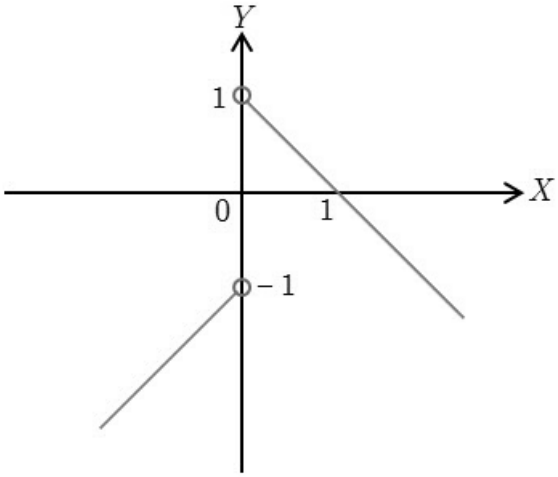
และ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 จากทาง**ขวา** $x > 0$ ค่าของฟังก์ชัน f จะใกล้ 1
เรากล่าวว่า 1 เป็น**ลิมิตทางขวาของ** $f(x)$ **เมื่อ** x **เข้าใกล้** 0 เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

จาก

$$f(x) = \frac{x - x^2}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{x - x^2}{-x} & \text{เมื่อ } x < 0 \\ \dfrac{x - x^2}{x} & \text{เมื่อ } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 + x & \text{เมื่อ } x < 0 \\ 1 - x & \text{เมื่อ } x > 0 \end{cases}$$

เขียนกราฟของ $y = f(x)$ ได้ดังนี้



เมื่อพิจารณาจากกราฟของ $y = f(x)$ พบว่า กราฟขาดตอนที่ $x = 0$ เรากล่าวว่า **ฟังก์ชัน** f **ไม่ต่อเนื่องที่** $x = 0$

สังเกตว่า 0 เป็นลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 จากทางซ้ายและทางขวา นั่นคือ

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

กรณีนี้เรากล่าวว่า 0 เป็น**ลิมิตของ** $f(x)$ **เมื่อ** x **เข้าใกล้** 1 เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0$$

ยิ่งกว่านั้น $f(1) = 0$ เรากล่าวว่า f **มีความต่อเนื่องที่** $x = 1$

ตัวอย่าง 1.1.2 ให้ $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$, $x \neq -2$

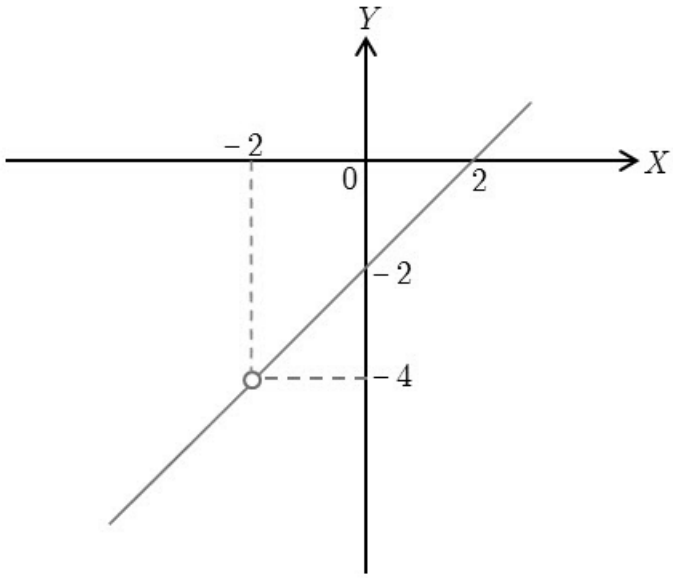
สังเกตว่า $g(-2)$ หาค่าไม่ได้ แต่ยังคงหาลิมิตของฟังก์ชัน $g(x)$ โดย

$$g(x) = \frac{x^2-4}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = x-2 \quad \text{เมื่อ } x \neq -2$$

จะได้ว่า

$$\lim_{x\to -2^-} g(x) = -4 = \lim_{x\to -2^+} g(x)$$

เขียนกราฟของ $y = g(x)$ ได้ดังนี้



พิจารณาค่าของ g เมื่อ x เข้าใกล้ -2 จะเห็นว่า

$$\lim_{x\to -2} g(x) = -4$$

แต่กราฟของ $g(x)$ ขาดตอนที่ $x = -2$ เนื่องจาก $g(2)$ หาค่าไม่ได้
เราสรุปว่า ฟังก์ชัน g **ไม่มีความต่อเนื่องที่** $x = -2$

โดยทั่วไป เราใช้สัญลักษณ์แทนความหมายของลิมิตต่างๆ ดังนี้

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

หมายความว่า L **เป็นลิมิตทางซ้าย (left-hand limit) ของ** $f(x)$ **เมื่อ** x **เข้าใกล้** a

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

หมายความว่า L **เป็นลิมิตทางขวา (right-hand limit) ของ** $f(x)$ **เมื่อ** x **เข้าใกล้** a

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

หมายความว่า L **เป็นลิมิต (limit or two-sided limit) ของ** $f(x)$ **เมื่อ** x **เข้าใกล้** a
นั่นคือ

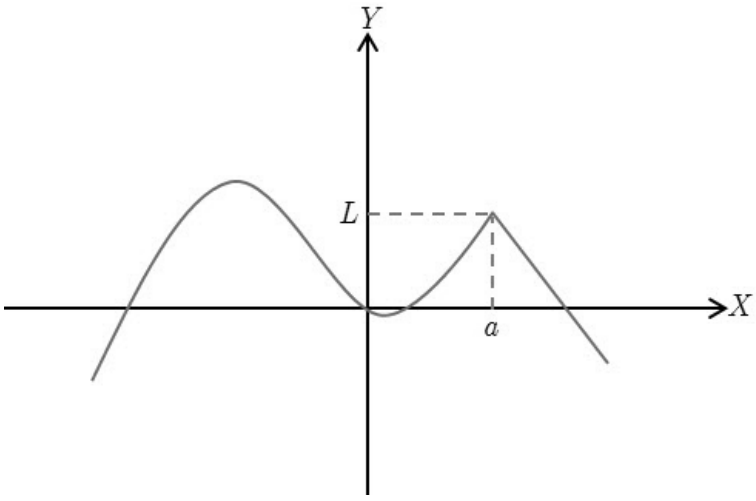
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

และเรากล่าวว่า f **มีความต่อเนื่อง (continuous) ที่** $x = a$ ก็ต่อเมื่อ

1. $f(a)$ มีค่า 2. $\lim_{x\to a} f(x)$ มีค่า และ 3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

กราฟของฟังก์ชันในลักษณะต่างๆ

(1) f มีความต่อเนื่องที่ $x = a$



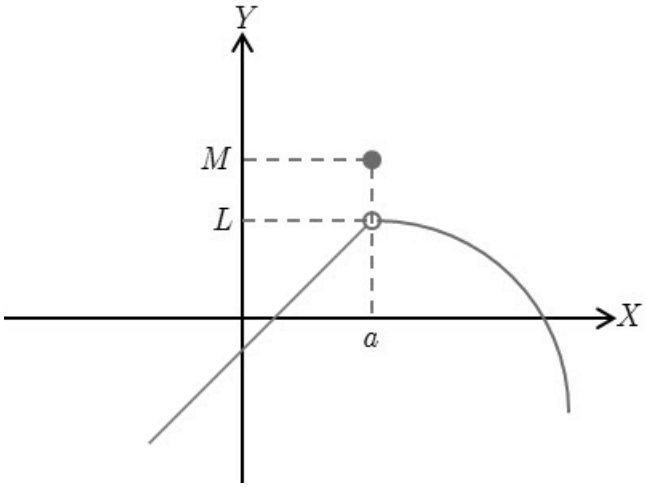
สังเกตว่า

$$f(a) = L \quad \text{และ} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

ดังนั้น

$$\lim_{x\to a} f(x) = L = f(a)$$

(2)



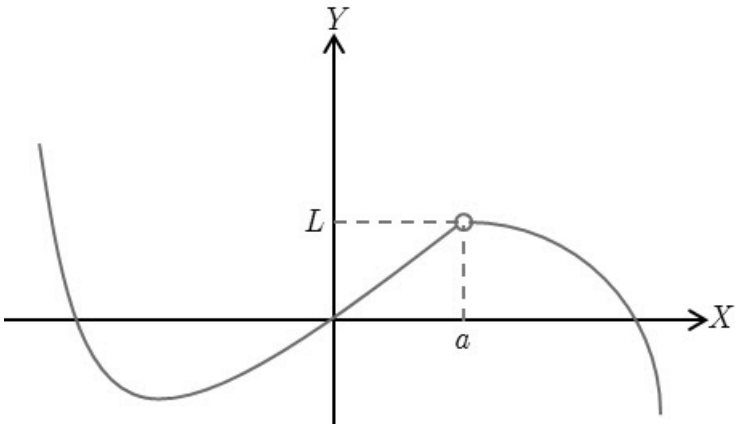
สังเกตว่า

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

ดังนั้น

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \text{แต่} \quad f(a) = M \neq L$$

(3)



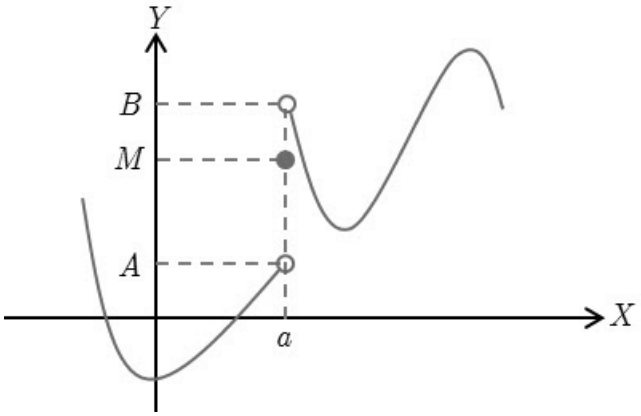
สังเกตว่า

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

ดังนั้น

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \text{แต่} \quad f(a) \text{ หาค่าไม่ได้}$$

(4)



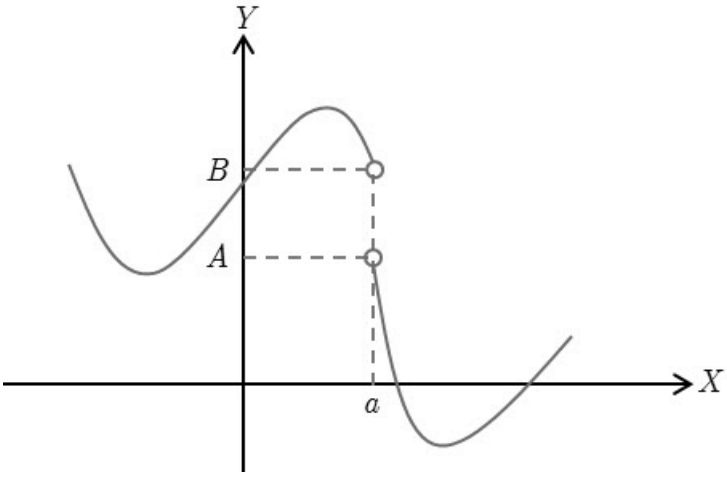
เราได้ว่า

$$f(a) = M, \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = A \qquad \text{และ} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = B$$

แต่ $A \neq B$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ ไม่มีค่า}$$

(5)



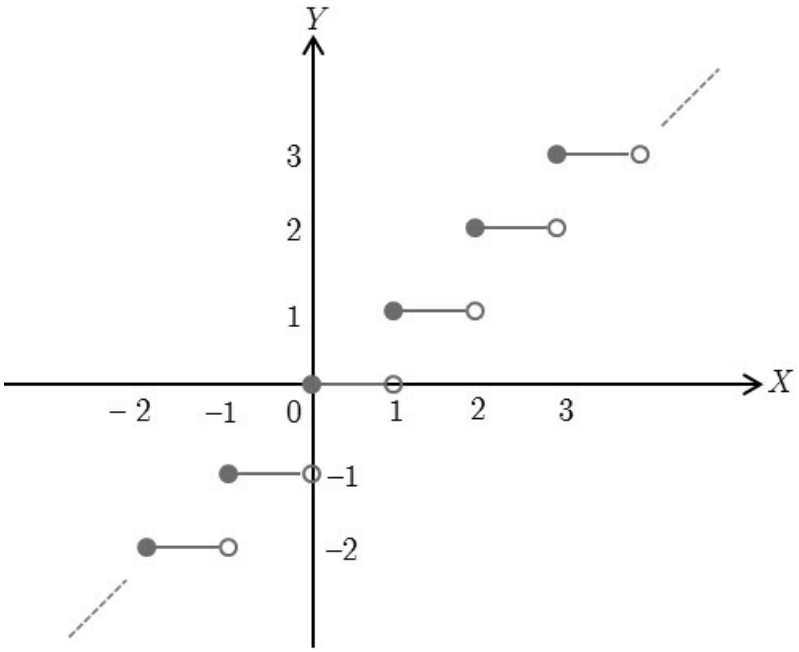
เราได้ว่า

$$f(a) \text{ ไม่มีค่า}, \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = A \qquad \text{และ} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = B$$

แต่ $A \neq B$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ ไม่มีค่า}$$

ตัวอย่าง 1.1.3 กำหนดให้ $f(x) = [x]$ โดยที่
$[x]$ คือจำนวนเต็มที่มากสุดซึ่งมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ x เช่น $[5] = 5, [\pi] = 3, [-\sqrt{3}] = -2$
เรียก ฟังก์ชันนี้ว่า**ฟังก์ชันจำนวนเต็มมากสุด (greatest integer function)**
จงเขียนกราฟของ $y = f(x)$ และพิจาราณาว่า f ไม่ต่อเนื่องที่จุดใดบ้าง

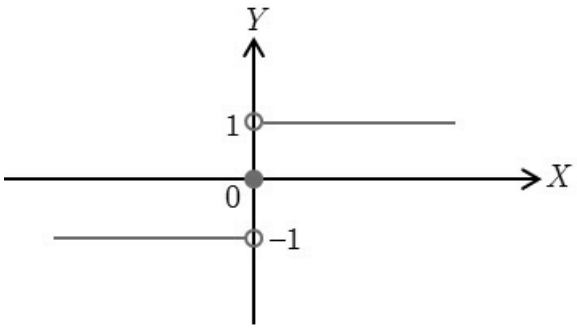


สังเกตว่า ถ้า a ไม่เป็นจำนวนเต็ม จะได้ $\lim_{x\to a}[x] = [a]$ และ
ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม จะได้

$$\lim_{x\to a^-}[x] = a - 1 \quad \text{และ} \quad \lim_{x\to a^+}[x] = a$$

ดังนั้น $\lim_{x\to a}[x]$ ไม่มีค่า เมื่อ a เป็นจำนวนเต็ม
เพราะฉะนั้น $f(x) = [x]$ ไม่ต่อเนื่องที่ทุกๆ จำนวนเต็ม
ทำให้ฟังก์ชันนี้เป็นตัวอย่างของฟังก์ชันที่มีจุดไม่ต่อเนื่องอนันต์จุด

ตัวอย่าง 1.1.4 กำหนดให้ $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \\ 1 & \text{เมื่อ } x > 0 \end{cases}$



และ

$$f(x) = x^2 \operatorname{sgn}(x)$$

จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ และพิจารณาว่า f มีความต่อเนื่องที่ $x = 0$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

หมายเหตุ สำหรับบางฟังก์ชัน เช่น

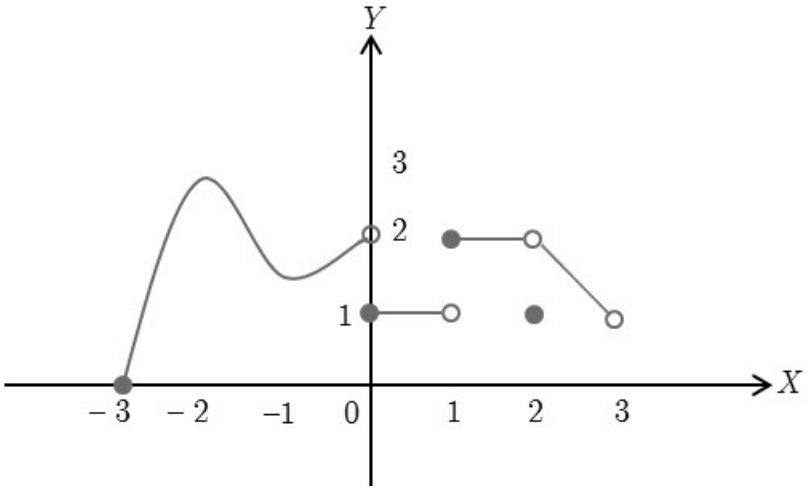
$$f(x) = \sqrt{x}$$

สังเกตว่า โดเมนของ f คือ $[0, \infty)$
เราจะนิยามให้

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}$$

และไม่กล่าวถึง $\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x}$ เนื่องจาก $\sqrt{x}$ ไม่เป็นจำนวนจริงเมื่อ $x < 0$

ตัวอย่าง 1.1.5 พิจารณากราฟ



โดเมนของ f คือ $[-3, 3)$
สังเกตว่า $\lim_{x\to -3^-} f(x)$ ไม่มีความหมาย แต่

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3^+} f(x) = 0 = f(-3)$$

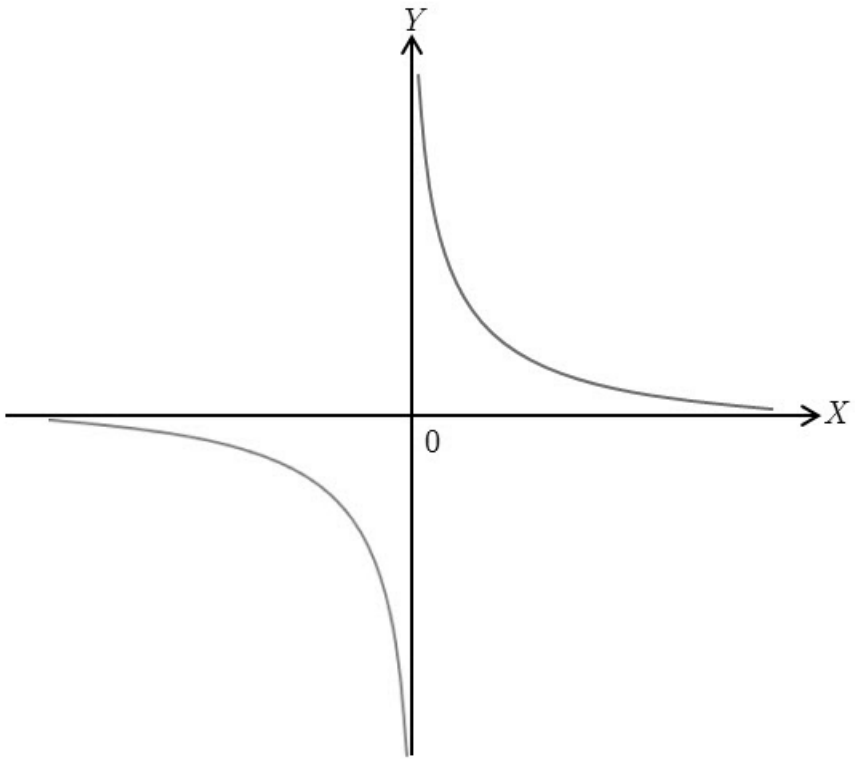
ดังนั้น f มีความต่อเนื่องที่ $x = -3$

$f(3)$ หาค่าไม่ได้ เพราะฉะนั้น f ไม่มีความต่อเนื่องที่ $x = 3$ แต่

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = 1$$

ตัวอย่าง 1.1.6 พิจารณากราฟของฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad \text{เมื่อ } x \neq 0$$



จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด ค่าของ $f(x)$ จะเข้าใกล้ 0
เรียกว่า **ลิมิตของ** $f(x)$ **เท่ากับ** 0 **เมื่อ** x **มีค่าลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด** เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด ค่าของ $f(x)$ จะเข้าใกล้ 0
เรียกว่า **ลิมิตของ** $f(x)$ **เท่ากับ** 0 **เมื่อ** x **มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด** เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

เพราะฉะนั้น เราสรุปได้ว่า

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{และ} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

1.2 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตและความต่อเนื่อง

ทฤษฎีบท 1.2.1 *ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่ง $\lim_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = M$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง หรือ แทนสัญลักษณ์ $+\infty$ หรือ $-\infty$ และ $L, M \in \mathbb{R}$ เราได้ว่า*

1. $\lim_{x\to a} c = c$ *เมื่อ c เป็นจำนวนจริงใดๆ*
2. $\lim_{x\to a}\big(f(x) \pm g(x)\big) = L \pm M$
3. $\lim_{x\to a} cf(x) = cL$ *เมื่อ c เป็นจำนวนจริงใดๆ*
4. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM$
5. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ *เมื่อ* $M \neq 0$
6. $\lim_{x\to a} f(x)^{m/n} = L^{m/n}$ *เมื่อ* $m, n \in \mathbb{N}$ *และ* $L^{m/n}$ *เป็นจำนวนจริง*

หมายเหตุ *กฎเหล่านี้เป็นจริงสำหรับลิมิตซ้ายและลิมิตขวาด้วย*

ดังนั้น จึงได้อีกว่า

ทฤษฎีบท 1.2.2 *ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งมีความต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง เราได้ว่า*

1. $f \pm g$, cf *และ* fg *เป็นฟังก์ชันซึ่งมีความต่อเนื่องที่* $x = a$
2. $\dfrac{f}{g}$ *เป็นฟังก์ชันซึ่งมีความต่อเนื่องที่* $x = a$ *เมื่อ* $g(a) \neq 0$

ทฤษฎีบท 1.2.3 1. *ฟังก์ชันพหุนาม $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีความต่อเนื่องที่ทุกจำนวนจริง $x = a$*
2. *ฟังก์ชันตรรกยะ $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ เมื่อ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม เป็นฟังก์ชันซึ่งมีความต่อเนื่องที่ทุกจำนวนจริง $x = a$ ซึ่ง $g(a) \neq 0$*
3. *ฟังก์ชัน $g(x) = x^{m/n}$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีความต่อเนื่องที่ทุกจำนวนจริง $x = a$ ในโดเมนของ g*

เช่น $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^2 + 2x - 3}$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีความต่อเนื่องที่ทุก $x \in \mathbb{R} - \{-3, 1\}$

ตัวอย่าง 1.2.1 (แทนค่า/จัดรูป) จงคำนวณค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 3}(x+2)\sin\dfrac{x\pi}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}(5+|x|-2x^2)$

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x-4}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2-x}$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^3}}$

7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2+1}{x^2+\sqrt{x^4-x}}$

8. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x} - x, \qquad \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x} + x$

9. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+3}$

10. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{2x-\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x}-2}$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1-\sqrt{2x-\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x}-2}$

ตัวอย่าง 1.2.2 [ลิมิตซ้าย/ขวา, ลิมิตไม่มีค่า]

1. ให้

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 10}{|x+2|} \quad \text{เมื่อ } x \neq -2$$

จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ (ถ้าลิมิตมีค่า)

2. ให้

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{เมื่อ } x > 1 \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{เมื่อ } x \leq 1 \end{cases}$$

จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีความต่อเนื่องที่ $x = 1$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

3. ให้

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + x + x^2} & \text{เมื่อ } x > 0 \\ -2 + \dfrac{3}{|x-1|} & \text{เมื่อ } x \leq 0 \end{cases}$$

จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีความต่อเนื่องที่ $x = 0$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

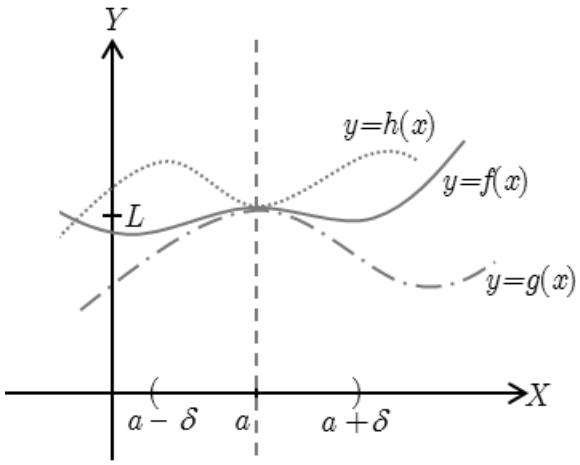
ทฤษฎีบท 1.2.4 *[Sandwich/Squeeze Theorem] ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \text{รอบๆ } a$$

และ $\lim_{x\to a} g(x) = L = \lim_{x\to a} h(x)$ *จะได้ว่า*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

หมายเหตุ *ทฤษฎีบทเป็นจริงสำหรับลิมิตซ้าย/ขวา และเมื่อ a แทนสัญลักษณ์ $\pm\infty$ ด้วยเช่นกัน*



ตัวอย่าง 1.2.3 [Sandwich/Squeeze Theorem]

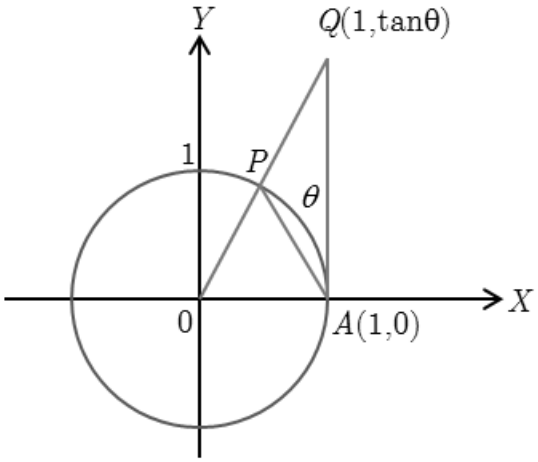
1. กำหนดให้

$$1 + \frac{x^2 + x}{2} \leq f(x) \leq 3x^2 - x$$

จงหา $\lim_{x\to 1} f(x)$

2. จงหา $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$

3. จงหา $\lim_{x\to \infty} \frac{\sin x}{x}$



จากรูปเราได้ว่า

$$\text{พื้นที่ } \Delta OAP \leq \text{พื้นที่ sector } OAP \leq \text{พื้นที่ } \Delta OAQ$$

นั่นคือ

$$\frac{1}{2}\sin\theta \quad \leq \quad \frac{1}{2}\theta \quad \leq \quad \frac{1}{2}\tan\theta$$

เมื่อ θ อยู่รอบๆ 0 จะได้ว่า

$$\cos\theta \quad \leq \quad \frac{\sin\theta}{\theta} \quad \leq \quad 1$$

เพราะว่า $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta = 1 = \lim\limits_{\theta\to 0} 1$ โดย Sandwich Theorem เราได้ว่า

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

ตัวอย่าง 1.2.4 จงหาค่าของ $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{1-\cos\theta}{\theta}$

สำหรับฟังก์ชัน f ซึ่ง $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ เราได้ว่า

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$$

ตัวอย่าง 1.2.5 จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x}$

2. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{0.01x}}$

3. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$

4. $\lim_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$

5. $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{1-\cos^2 y}{4y^2-y^3}$

6. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sin(x-3)}$

ตัวอย่าง 1.2.6 กำหนดให้

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{cx\sin x}{1-\cos x} & \text{เมื่อ } 0<x\leq 1\\[2ex] k+1 & \text{เมื่อ } x=0\\[2ex] \dfrac{1-\cos x\sin^2 x-\cos^2 x}{x^3} & \text{เมื่อ } x<0\end{cases}$$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีความต่อเนื่องที่ $x=0$ แล้ว จงหาค่าของ c และ k

ตัวอย่าง 1.2.7 กำหนดให้

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-3bx-c & \text{เมื่อ } x<1 \\ 2 & \text{เมื่อ } x=1 \\ \dfrac{(a-b)x^2+4}{cx^2+1} & \text{เมื่อ } x>1 \end{cases}$$

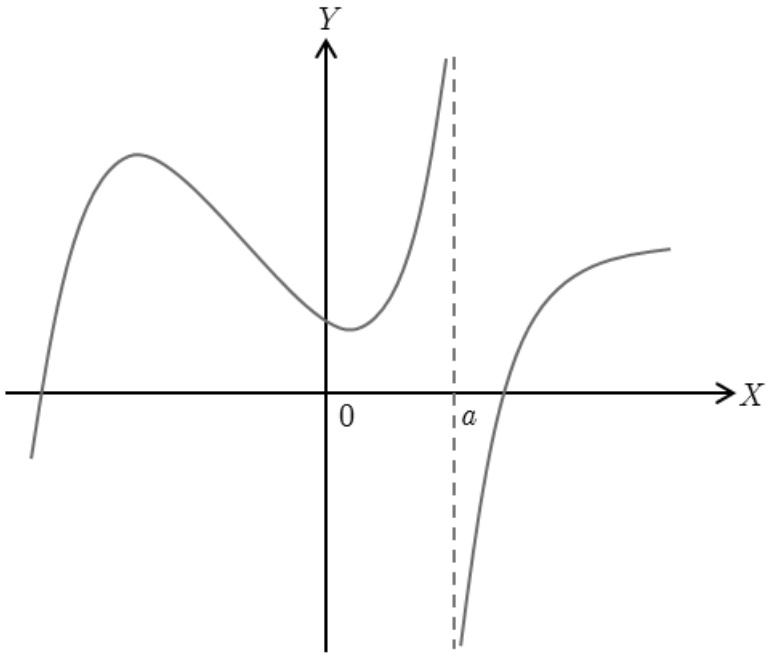
และ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ จงหาค่าของ a,b และ c ซึ่งทำให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีความต่อเนื่องที่ $x=1$

ตัวอย่าง 1.2.8 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{x-1}$

ตัวอย่าง 1.2.9 จงหา $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|+|x|-2}{\sin \pi x}$ (ถ้าลิมิตมีค่า)

ทำแบบฝึกหัด 1.2, 1.3 ในหนังสือแคลคูลัส ๑

1.3 ลิมิตค่าอนันต์



จากกราฟ เราได้ว่า
เมื่อ $x \to a^-$ ค่าของ $f(x)$ มีค่า**เพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต** เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$$

ในทำนองเดียวกัน เราได้ว่า

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

ดังนั้น $\lim_{x\to a} f(x)$ ไม่มีค่า
และเมื่อ $x \to +\infty$ หรือ $x \to -\infty$ เรายังเห็นได้จากกราฟนี้ด้วยว่า

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \quad \text{และ} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

หมายเหตุ สัญลักษณ์ $+\infty$ หรือ $-\infty$ ไม่ถือเป็นจำนวนจริง เราไม่นำ ∞ มาใช้คำนวณแบบพีชคณิตที่เราเคยใช้กันตามปกติ (เว้นแต่จะตกลงกันเป็นกรณีพิเศษ) แต่เราใช้ $+\infty$ ในความหมายว่า เป็นจำนวนที่มากจนไม่มีขอบเขตแต่ไม่มีค่าแน่นอน และ เราใช้ $-\infty$ ในความหมายว่า เป็นจำนวนที่น้อยจนไม่มีขอบเขตแต่ไม่มีค่าแน่นอน

ในการแสดงว่า $\lim\limits_{x\to\square} f(x) = +\infty$ หรือ $-\infty$ เราต้องตรวจสอบ

1. $\lim\limits_{x\to\square} \dfrac{1}{f(x)} = 0$
2. สำหรับ $x \to \square$ ในกรณีต่างๆ ดังนี้

$x \to \square$	ความหมาย	ช่วงที่พิจารณา (เมื่อ $\delta > 0$ ค่าน้อยๆ)
$x \to -\infty$	เมื่อ x มีค่าน้อยๆ	$x < -10^6$
$x \to a^-$	เมื่อ x มีค่าใกล้ a และ $x < a$	$a - \delta < x < a$
$x \to a^+$	เมื่อ x มีค่าใกล้ a และ $x > a$	$a < x < a + \delta$
$x \to a$	เมื่อ x มีค่ารอบๆ a และ $x \neq a$	$a - \delta < x < a + \delta, x \neq a$
$x \to -\infty$	เมื่อ x มีค่ามากๆ	$x > 10^6$

เราได้ว่า

ถ้าค่าของ $f(x) > 0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to\square} f(x) = +\infty$

ถ้าค่าของ $f(x) < 0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to\square} f(x) = -\infty$

ตัวอย่าง 1.3.1 $[+\infty$ หรือ $-\infty]$ จงพิจารณาลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2+\sqrt{x}}{x^2-1}$

2. $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\cos x}{(x-6)^2}$

3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2+|x|-x^2}{\sqrt{1-4x-x^3}}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1-\cos\dfrac{1}{x+1}}$

5. $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{2^x}{\ln x}$

6. $\lim\limits_{x\to 2554} \dfrac{1}{(x-2554)^{2554}}$

7. $\lim\limits_{x\to 2555} \dfrac{1}{(x-2555)^{2555}}$

ทำแบบฝึกหัด 1.4 ในหนังสือแคลคูลัส ๑

1.4 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (เพิ่มเติม)

เรากล่าวว่าฟังก์ชัน f **มีความต่อเนื่องทางซ้ายที่** $x=a$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$
เรากล่าวว่าฟังก์ชัน f **มีความต่อเนื่องทางขวาที่** $x=a$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ และ
เรากล่าวว่าฟังก์ชัน f **มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด** $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ

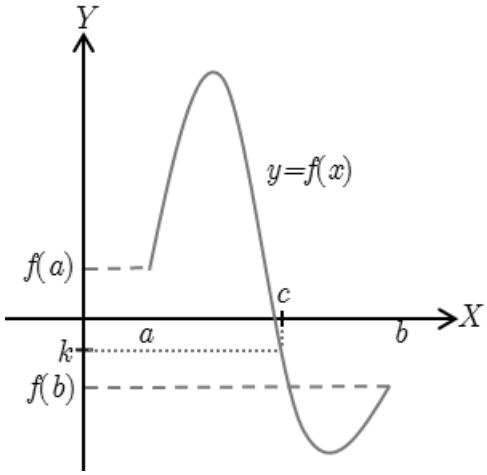
1. f มีความต่อเนื่องที่ทุกจุดบนช่วง (a,b)
2. f มีความต่อเนื่องทางซ้ายที่ $x=b$
3. f มีความต่อเนื่องทางขวาที่ $x=a$

ตัวอย่าง 1.4.1 กำหนดให้

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-3|-2}{x+1} & \text{เมื่อ } 1\le x<3\\[2ex] x^2-3x-\dfrac{1}{2} & \text{เมื่อ } x\ge 3\end{cases}$$

จงพิจารณาว่า f มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[1,3]$ หรือไม่

ทฤษฎีบท 1.4.1 *[ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง (Intermediate Value Theorem)]*
ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และ k อยู่ระหว่าง $f(a)$ และ $f(b)$ จะได้ว่า มี $c \in (a,b)$ ซึ่ง $f(c)=k$



ตัวอย่าง 1.4.2 จงตรวจสอบว่า

$$f(x) = x^4 + x^3 - x - 5$$

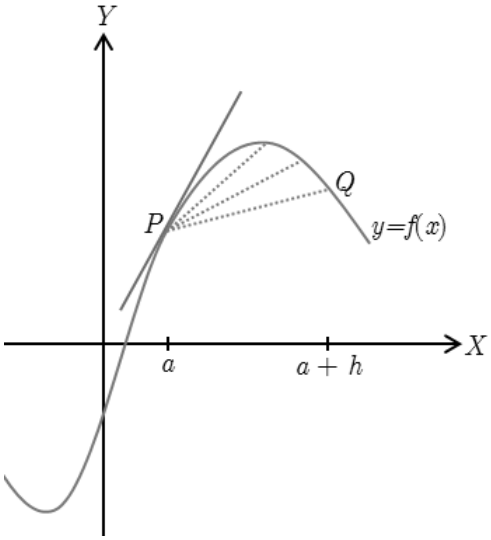
มีรากบนช่วง $[-1,4]$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

ทำแบบฝึกหัด 1.5 ในหนังสือแคลคูลัส ๑

2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

2.1 ความหมายอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$



เส้นตรงที่ผ่านจุด $P(a, f(a))$ และ $Q(a+h, f(a+h))$ มีความชัน คือ

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ถ้าเปลี่ยนค่า h ให้น้อยลงจนใกล้ 0 จุด Q จะมีการเปลี่ยนตำแหน่ง ตามค่า h เข้าใกล้จุด P มากขึ้น จนมีลักษณะเป็นเส้นสัมผัส (tangent line) ของเส้นโค้ง ณ จุด P โดยความชันของเส้นสัมผัสนี้มีค่าเท่ากับ

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \text{เมื่อลิมิตมีค่า}$$

ซึ่งเรียกว่า**อนุพันธ์ (derivative) ของฟังก์ชัน** f **ที่จุด** $x = a$ เขียนแทนด้วย

$$f'(a), \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \qquad \text{หรือ} \qquad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$$

ถ้าเราให้ $x = a + h$ จะได้ $h = x - a$ จะเห็นว่า $h \to 0$ ก็ต่อเมื่อ $x \to a$
ดังนั้น เรามี

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{เมื่อลิมิตมีค่า}$$

เรานิยาม**อนุพันธ์ทางซ้ายของ** f เป็น

$$f'(a^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

และ**อนุพันธ์ทางขวาของ** f เป็น

$$f'(a^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

โดยเราได้ว่า

$$f'(a) \text{ มีค่า} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad f'(a^-) \text{ และ } f'(a^+) \text{ มีค่า และ } f'(a^-) = f'(a^+)$$

ตัวอย่าง 2.1.1 กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \le 1 \\ 3-x^3, & x > 1 \end{cases}$$

จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง f ที่จุด $x = 1$

ตัวอย่าง 2.1.2 กำหนด $f(x) = (x-2)^{1/3}$
จงพิจารณาว่า f มีอนุพันธ์ที่ $x = 2$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

เราเรียกเส้นตรง $x = a$ ว่า**เส้นสัมผัสในแนวดิ่ง (vertical tangent line) ของ** f
ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x\to a} \left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| = +\infty$

ตัวอย่าง 2.1.3 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x}$ เมื่อ $x \geq 0$
จงหา $f'(a)$ เมื่อ $a > 0$ และพิจารณาว่า f มีอนุพันธ์ที่ $x = 0$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

ตัวอย่าง 2.1.4 ให้ $f(x) = |x|$ จงพิจารณาว่า f มีอนุพันธ์ที่ $x = 0$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

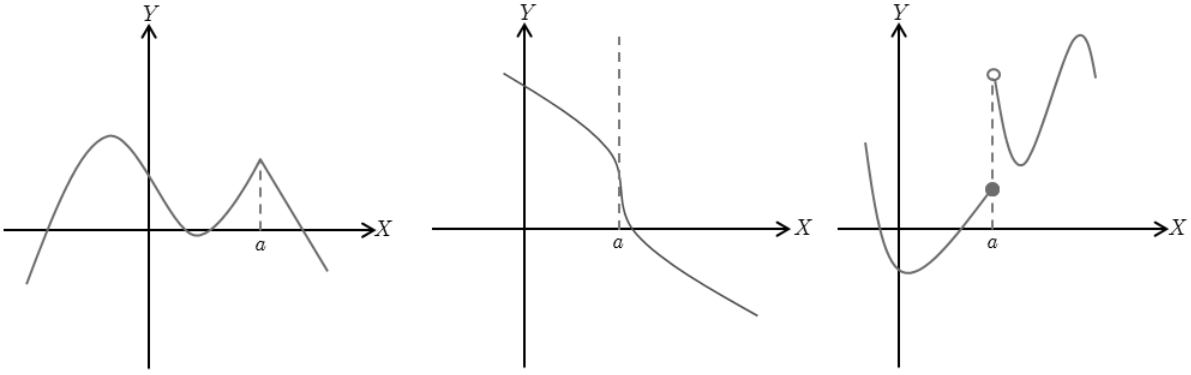
หมายเหตุ ฟังก์ชัน $f(x) = |x|$ มีความต่อเนื่องที่ $x = 0$ แต่ f ไม่มีอนุพันธ์ที่ $x = 0$

สังเกตว่า ถ้า f มีอนุพันธ์ที่ $x = a$ นั่นคือ $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ หาค่าได้ แล้ว

$$\lim_{x\to a}[f(x) - f(a)] = \lim_{x\to a} \frac{[f(x) - f(a)](x - a)}{x - a} = f'(a)0 = 0$$

ดังนั้น $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ นั่นคือ f มีความต่อเนื่องที่ $x = a$ เราจึงสรุปได้ว่า

ทฤษฎีบท 2.1.1 *ถ้า $f'(a)$ มีค่าแล้ว f มีความต่อเนื่องที่ $x = a$*



รูปด้านบนแสดงตัวอย่างกราฟของฟังก์ชันที่ไม่มีอนุพันธ์ที่ $x = a$

เรากล่าวว่า f **มีอนุพันธ์บน** (a,b) ถ้า f มีอนุพันธ์ที่ทุก ๆ จุดบน (a,b) และ f **มีอนุพันธ์บน** $[a,b]$ ถ้า f มีอนุพันธ์บน (a,b) และ $f'(a^+)$ และ $f'(b^-)$ หาค่าได้

ตัวอย่าง 2.1.5 ให้

$$f(x)=\begin{cases} 2-\sqrt{x^2+4}, & \text{เมื่อ } x<0 \\ x^3-x^2, & \text{เมื่อ } 0\le x<2 \\ x^2-10, & \text{เมื่อ } x\ge 2 \end{cases}$$

1. จงพิจารณาว่า f มีอนุพันธ์ที่ $x=0$ หรือไม่
2. จงพิจารณาว่า f มีอนุพันธ์บนช่วง $(1,3)$ หรือไม่

ตัวอย่าง 2.1.6 ให้

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{เมื่อ } x \leq 1 \\ x^3 - 2ax + b, & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$$

จงหาค่า a, b ที่ทำให้ $f'(1)$ มีค่า

ทำแบบฝึกหัด 2.1 ข้อ 1–3 ในหนังสือแคลคูลัส ๑

2.2 กฎการหาอนุพันธ์

เรามีกฎช่วยในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.2.1 *ให้ u และ v เป็นฟังก์ชันของ x และ c เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า*

1. $\dfrac{dc}{dx} = 0$
2. $\dfrac{dx^r}{dx} = rx^{r-1}$ *เมื่อ* r *เป็นจำนวนจริง*
3. $\dfrac{d}{dx}(cu) = c\dfrac{du}{dx}$
4. $\dfrac{d}{dx}(u \pm v) = \dfrac{du}{dx} \pm \dfrac{dv}{dx}$
5. $\dfrac{d}{dx}(uv) = u \cdot \dfrac{dv}{dx} + v \cdot \dfrac{du}{dx}$
6. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \cdot \dfrac{du}{dx} - u \cdot \dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

ตัวอย่าง 2.2.1 $\dfrac{d}{dx}5 =$_____ $\dfrac{d}{dx}\pi =$_____ $\dfrac{d}{dx}(-\sqrt{3}) =$_____

ตัวอย่าง 2.2.2 $\dfrac{d}{dx}x^2 =$_____ $\dfrac{d}{dx}\sqrt{x} =$_____ $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{x^3} =$_____

ตัวอย่าง 2.2.3 $\dfrac{d}{dx}(-2x^3) =$_____ $\dfrac{d}{dx}6\sqrt[3]{x} =$_____ $\dfrac{d}{dx}\dfrac{4}{x^2} =$_____

ทฤษฎีบท 2.2.2 *[กฎลูกโซ่ (Chain Rule)] ถ้า g มีอนุพันธ์ที่ a และ f มีอนุพันธ์ที่ $g(a)$ แล้ว $(f \circ g)$ มีอนุพันธ์ที่ a และ*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

ถ้า $f(x) = x^r$ จะได้ว่า $f'(x) = rx^{r-1}$ และ $(f \circ g)(x) = [g(x)]^r$ จึงได้โดยกฎลูกโซ่ว่า

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^r = r[g(x)]^{r-1}g'(x)$$

ตัวอย่าง 2.2.4 จงหา

1. $\dfrac{d}{dx}(2x-1)(2x+1)$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{d}{dx}(2x-1)\cdot\dfrac{d}{dx}(2x+1)$

2. $\dfrac{d}{dx}\dfrac{x^3+1}{x^2}$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{\dfrac{d}{dx}(x^3+1)}{\dfrac{d}{dx}(x^2)}$

ตัวอย่าง 2.2.5 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x)=(x^2+3x)(1-x^4)$

2. $f(x) = \dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{3+x}}$ ที่ $x = 1$

3. $y = F\left(x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ ที่จุด $x = 1$ เมื่อ $F'(0) = 2$

4. $f(x) = (\pi + g(x))^8$ ที่จุด $x = 2$ เมื่อ $g(2) = 3$ และ $g'(2) = -4$

ตัวอย่าง 2.2.6 จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \sqrt{6 - \sqrt{4 - x + x^2}}$ ที่จุด $x = 0$

ตัวอย่าง 2.2.7 กำหนดให้ $f(2) = 3$, $g(2) = 4$, $f'(2) = -2$ และ $g'(2) = 7$
จงหา $h'(2)$ เมื่อ

(ก) $h(x) = f(x)g(x)$ (ข) $h(x) = \dfrac{g(x)}{1 + f(x)}$

ตัวอย่าง 2.2.8 ถ้า $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$ โดยที่ $f(1) = 7$ และ $f'(1) = 4$ จงหา $h'(1)$

ตัวอย่าง 2.2.9 ถ้า $F(x) = f(xf(xf(x)))$
โดยที่ $f(1) = 2, f(2) = 3, f'(1) = 4, f'(2) = 5$ และ $f'(3) = 6$ จงหา $F'(1)$

ตัวอย่าง 2.2.10 ให้ $y = F(2 + G(1 + x^2))$ และ $x = \dfrac{1+t}{1-t}$
จงหา $\dfrac{dy}{dt}$ เมื่อ $t = 0$ ถ้า $G(2) = -1, G'(2) = 3$ และ $F'(1) = 1$

2.3 อนุพันธ์อันดับสูง

ให้ $y = f(x)$ เราเห็นมาแล้วว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f'(x)$ ยังคงเป็นฟังก์ชัน ดังนั้น เราสามารถหาอนุพันธ์ของ $f'(x)$ ได้ เรียกว่า**อนุพันธ์อันดับที่สอง (second derivative) ของ** f เขียนแทนด้วย $f''(x)$ หรือ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

โดยทั่วไป เราเรียก $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^ny}{dx^n} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$

ว่า**อนุพันธ์อันดับที่** n **ของ** y **เทียบกับ** x

ตัวอย่าง 2.3.1 จงหาอนุพันธ์อันดับที่ n สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก n ของ

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 1$$

ตัวอย่าง 2.3.2 ให้ $f(x) = \dfrac{1}{2-3x}$ จงหา $f^{(n)}(x)$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n

ตัวอย่าง 2.3.3 ให้

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x + x^2, & x \leq 1 \\ \\ x^3 + 2x, & x > 1 \end{cases}$$

จงหา $f'(x)$ และ $f''(x)$

ทำแบบฝึกหัด 2.1–2.3 ในหนังสือแคลคูลัส ๑

2.4 การหาอนุพันธ์โดยปริยาย

พิจารณาการหา $\frac{dy}{dx}$ จากความสัมพันธ์ $x^2 + y^4 = 1$

จากการหาอนุพันธ์ข้างต้น เรามอง y เป็นฟังก์ชันของ x
เรียกการหาอนุพันธ์ในลักษณะนี้ว่า**การหาอนุพันธ์โดยปริยาย (implicit differentiation)**
สังเกตว่า เนื่องจาก y เป็นฟังก์ชันของ x เราได้

$$\frac{d}{dx}(y^3) = \qquad\qquad \frac{d}{dx}(f(y)) =$$

$$\frac{d}{dx}(x^3y) =$$

ตัวอย่าง 2.4.1 เส้นโค้งมีสมการ

$$3y\sqrt{x} - \frac{y^2}{x} = 2$$

จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(1, 2)$

ตัวอย่าง 2.4.2 จงหา y'' จาก

$$x^2 - 2xy - y^2 = 9$$

ในพจน์ของ x, y และ y'

ถ้า f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ และ $y = f^{-1}(x)$ จะได้ว่า

$$f(y) = x$$

โดยการหาอนุพันธ์โดยปริยายเทียบกับ x เราได้

$$\frac{d}{dx}f(y) = \frac{dx}{dx}$$
$$f'(y)\frac{dy}{dx} = 1$$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f^{-1}(x)) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

ตัวอย่าง 2.4.3 ให้ $y = x^2 + \frac{4}{x}$, $x = \sqrt{t^2 + t + 2}$ และ $z = \frac{1}{(2 - 3t^2)^{1/3}}$ จงหา $\frac{dy}{dz}$ ที่ $t = 1$

ตัวอย่าง 2.4.4 จงหา $\frac{dy}{dx}$ และ $\frac{d^2y}{dx^2}$ เมื่อ $x = t - t^2$ และ $y = t - t^3$

2.5 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและตรีโกณมิติผกผัน

เราได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sin x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(\sin x\cos h+\cos x\sin h)-\sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\cos x\sin h}{h}-\frac{\sin x(1-\cos h)}{h}\right]\\ &= \cos x\end{aligned}$$

จาก $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2}-x)$ ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}(\cos x) =$$

เราแสดงได้โดยง่ายว่า

- $\frac{d}{dx}(\tan x) =$

- $\frac{d}{dx}(\sec x) =$

- $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) =$

- $\frac{d}{dx}(\cot x) =$

ตัวอย่าง 2.5.1 จงหา y' เมื่อ

1. $y = (\cos 3x)(\tan x^2)$

2. $y = \sqrt[4]{1 + \sec(x^3)}$

3. $\sin(xy) = 1 + y\cos x$

ให้ $y = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$ เราได้

$$\sin y = x \qquad \text{เมื่อ } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

ดังนั้น

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2}$$

และ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sin y) &= \frac{dx}{dx} \\ \cos y \frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

ในทำนองเดียวกัน เราแสดงได้ว่า

$$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

ให้ $y = \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$ เราได้

$$\tan y = x \quad \text{เมื่อ } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

ดังนั้น

$$\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

และ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\tan y) &= \frac{dx}{dx} \\ \sec^2 y \frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

ในทำนองเดียวกัน เราแสดงได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\operatorname{arccot} x &= -\frac{1}{1+x^2} && \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R} \\ \frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x &= \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} && \text{เมื่อ } |x| > 1 \\ \frac{d}{dx}\operatorname{arccosec} x &= -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} && \text{เมื่อ } |x| > 1 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.5.2 จงหาอนุพันธ์ของ

1. $y = x^3 \arcsin(2+x)$

2. $\dfrac{x}{2} + \arctan(y^2) = \operatorname{arcsec}(3x+2)$ ที่จุด $(0, \sqrt[4]{3})$

ทำแบบฝึกหัด 2.4–2.5 ในหนังสือแคลคูลัส ๑

2.6 ค่าเชิงอนุพันธ์

ให้ $y = f(x)$ จาก $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
สังเกตว่า

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{เมื่อ } \Delta x \text{ มีค่าใกล้ } 0$$

นั่นคือ

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x \quad \text{เมื่อ } \Delta x \text{ มีค่าใกล้ } 0 \tag{2.6.1}$$

เราเรียก $f'(x)\Delta x$ ว่า **ค่าเชิงอนุพันธ์ (differential) ของ** f เขียนแทนด้วย df หรือ dy
ในบางครั้งเราเขียน Δx (ส่วนเปลี่ยนของ x) เป็น dx ดังนั้น

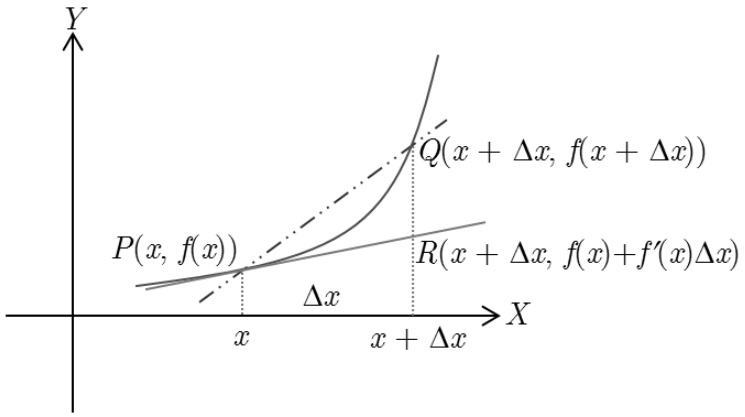
$$dy = df = f'(x)dx$$

ตัวอย่าง 2.6.1 จงหา

1. $d(x^2 + \sin(2x-1)) =$

2. $d\arccos(\sqrt[3]{x}) =$

ตัวอย่าง 2.6.2 จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์หา dy
เมื่อกำหนดให้ $y = 2x - \sqrt{x}$ และ x เพิ่มจาก 4 ถึง 4.02



จาก (2.6.1) เมื่อ Δx มีค่าใกล้ 0 เราได้

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

ซึ่งเราสามารถนำมาใช้ประมาณค่าได้ดังนี้

ตัวอย่าง 2.6.3 จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์หาค่าโดยประมาณของ

1. $(31.98)^{2/5}$

2. $f(0.92)$ เมื่อ $f(x) = \dfrac{2x}{1+\sqrt{x}}$

ตัวอย่าง 2.6.4 ชามรูปครึ่งทรงกลมรัศมี 10 นิ้ว ถูกเติมน้ำสูง x นิ้ว มีปริมาตรของน้ำในชามกำหนดโดย

$$V = \frac{\pi}{3}(30x^2 - x^3) \quad \text{ลูกบาศก์นิ้ว}$$

จงหาค่าประมาณของค่าผิดพลาดที่มากสุดในการคำนวณปริมาตรน้ำในชาม ขณะที่น้ำในชามสูง 5 นิ้ว โดยที่การวัดความสูงมีความผิดพลาดไม่เกิน $\frac{1}{16}$ นิ้ว

ค่าผิดพลาดโดยประมาณของ f

สำหรับฟังก์ชัน $y = f(x)$ ให้ $y_0 = f(x_0)$ แสดงว่า y_0 เป็นค่าที่แท้จริงของ f ที่ $x = x_0$ ถ้าให้ $x = x_0 + dx$ จะได้ค่าประมาณของ $f(x_0 + dx)$ คือ $y_0 + dy$ ซึ่งค่าผิดพลาดที่เกิดจากการประมาณค่าคือ dy

ค่าผิดพลาดสัมพัทธ์ของ y เมื่อ x ผิดพลาดไป dx คือ $\frac{\Delta y}{y_0}$ ซึ่งประมาณได้จาก $\frac{dy}{y}$ เมื่อ $y = y_0$ และ $dy = f'(x_0)dx$ นั่นคือ

$$\text{ค่าผิดพลาดสัมพัทธ์ของ } y = \frac{dy}{y} = \frac{f'(x_0)dx}{y_0}$$

และ

$$\text{ร้อยละของค่าผิดพลาดสัมพัทธ์ของ } y = \frac{dy}{y} \times 100$$

ตัวอย่าง 2.6.5 ความต้านทานของเส้นลวดกำหนดโดย $R = \frac{1}{d^2}$ โอห์ม เมื่อ d แทนความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของเส้นลวด จงประมาณค่าความผิดพลาด และ ความผิดพลาดสัมพัทธ์ในการวัดความต้านทานของเส้นลวด เมื่อ $d = 0.1$ เซนติเมตร และเส้นผ่านศูนย์กลางวัดด้วยความผิดพลาดมีขอบเขตไม่เกินร้อยละ 1

ทำแบบฝึกหัด 2.6 ในหนังสือแคลคูลัส ๑

3 ปริพันธ์ของฟังก์ชัน

3.1 ปฏิยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

ตัวอย่าง 3.1.1 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว

(ก) $\begin{cases} f(x) = x^3 \\ f(x) = x^3 + \pi \\ f(x) = x^3 - 5 \\ f(x) = x^3 + C \end{cases}$

(ข) $\begin{cases} f(x) = \sin x \\ f(x) = \sin x + 4 \\ f(x) = \sin x - \sqrt{3} \\ f(x) = \sin x + C \end{cases}$

เราเรียก F ว่า **ปฏิยานุพันธ์ (antiderivative) ของ** f ถ้า $F' = f$

ดังนั้น $x^2 + 1, x^2 - \sqrt{3}, x^2 + C$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $2x$
และ $\sin x - \pi, \sin x + 5, \sin x + C$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $\cos x$

สังเกตว่า ถ้า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f แล้ว $F(x) + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว จะเป็นปฏิยานุพันธ์ของ f ด้วย

ตัวอย่าง 3.1.2 จงหาปฏิยานุพันธ์ของ

1. $f(x) = 2x$

2. $f(x) = \sec^2 x$

3. $f(x) = 6$

4. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

เราเขียน

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

เรียกว่า **ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต (indefinite integral) ของ** f

ทฤษฎีบท 3.1.1 *[กฎเบื้องต้นของปริพันธ์ไม่จำกัดเขต] เมื่อ k เป็นค่าคงตัว เราได้ว่า*

1. $\int k\,dx = kx + C$
2. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
3. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
4. $\int x^r\,dx = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + C$ *เมื่อ* $r \neq -1$
5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
7. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
8. $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + C$
9. $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
10. $\int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x + C$
11. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$
12. $\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$
13. $\int \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arcsec} x + C$

ตัวอย่าง 3.1.3 จงหาปริพันธ์

1. $\int x^3 + 2\sin x \, dx$

2. $\int \dfrac{x^2 \cos x + (x^2-1)^2}{x^2} \, dx$

3. $\int \dfrac{x - 3\sqrt{x} + 2}{1 - \sqrt{x}} \, dx$

4. $\int \cot^2 x \cos x \, dx$

5. $\int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx$

6. $\int (\tan x - \sec x)^2\, dx$

7. $\int \frac{1-x^2}{1+x^2}\, dx$

เราทราบมาแล้วว่า ถ้า $F(x) = \int f(x)\,dx$ แล้ว $F'(x) = f(x)$
ดังนั้น ถ้าเราทราบ $f'(x)$ เราสามารถหา $f(x)$ ได้โดย

$$f(x) = \int f'(x)\,dx$$

ตัวอย่าง 3.1.4 จงหาฟังก์ชัน $f(x)$ ถ้า

1. $f'(x) = 8x + \sin x$ และ $f(\pi/2) = 2\pi$.

2. $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^3}$ และ $f(1) = 2$.

3. $f'(x) = \sec x \tan x - \dfrac{1}{1+x^2}$ และ $f(0) = 3$.

4. $f''(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}}$, $f(4) = 20$ และ $f'(4) = 7$.

3.2 การหาปริพันธ์โดยแทนค่าด้วยตัวแปร

การหาปริพันธ์โดยการแทนค่าตัวแปร (integration by substitution) มีลักษณะคล้ายกับการย้อนกลับของกฎลูกโซ่ ซึ่งเราจะทำการแทนค่าตัวแปรที่เหมาะสมและจัดรูปฟังก์ชันที่กำหนดให้จนได้ฟังก์ชันในตัวแปรใหม่ที่สามารถหาปริพันธ์ได้โดยง่าย

ตัวอย่าง 3.2.1 จงหาค่าเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $d(x^2 + x) =$

2. $d \sin x =$

3. $d \cos 2x =$

4. $d \tan(x^3) =$

5. $d \arcsin(\sqrt{x}) =$

6. $d \sec^2(1 - x) =$

ตัวอย่าง 3.2.2 จงเขียนในรูปแบบ differential

1. $3x^2\, dx =$

2. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, dx =$

3. $\sec x \tan x\, dx =$

4. $\dfrac{1}{1 + x^2}\, dx =$

5. $-\operatorname{cosec}^2 x\, dx =$

ตัวอย่าง 3.2.3 จงหาปริพันธ์

1. $\int (4x-3)^{24}\,dx$

2. $\int x\sin\left(x^2+1\right)dx$

3. $\int \dfrac{1}{x^2+4x+8}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$

5. $\displaystyle\int \sec^4 x\,dx$

6. $\displaystyle\int \sec^2 x \tan^3 x\,dx$

จาก $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$ จะได้ว่า

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \text{และ} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

7. $\displaystyle\int \frac{\cos^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

8. $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$

เราอาจใช้เอกลักษณ์

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]$$
$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$
$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

เพื่อหาปริพันธ์

9. $\int \sin 2x \cos 5x \, dx$

10. $\int \sin x(\sin 3x + \cos x) \, dx$

11. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

12. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}}\,dx$

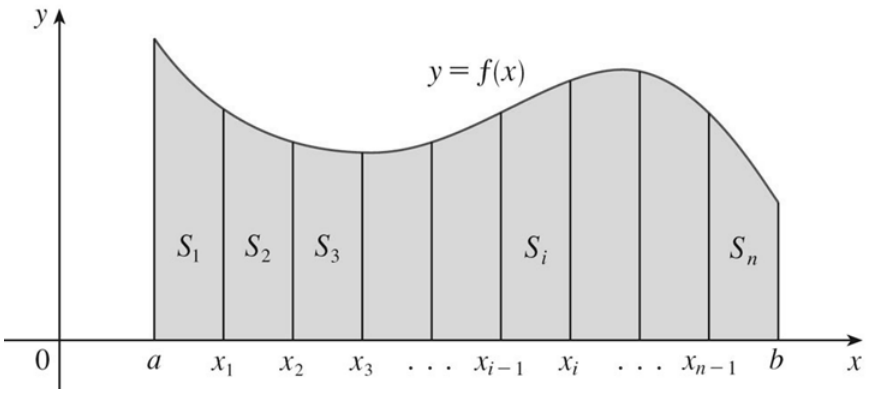
13. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

ทำแบบฝึกหัด 3.1 ในหนังสือแคลคูลัส ๑

3.3 การคำนวณพื้นที่โดยใช้ลิมิตผลบวกและปริพันธ์จำกัดเขต

พิจารณาการหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่อยู่ใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ บน $[a, b]$ และเหนือแกน X ดังรูป



1. แบ่ง $[a, b]$ ออกเป็นช่วงย่อย

   $$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

   โดยที่

   $$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

2. เลือกจุด x_k^* จากแต่ละช่วงย่อย $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$

3. คำนวณพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในแต่ละช่วงย่อยจากความสูง $f(x_k^*)$ และความกว้าง $x_k - x_{k-1}$ ซึ่งเท่ากับ $f(x_k^*)(x_k - x_{k-1})$

4. นำพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในขั้นที่ 3 มารวมกัน จะได้ผลบวกเป็น

   $$S_n^* = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)(x_k - x_{k-1})$$

   ซึ่งเราเรียกว่า**ผลบวกรีมันน์ (Riemann sum)** และเราได้พื้นที่

   $$A = \lim_{n \to \infty} S_n^*$$

หมายเหตุ โดยปกติ นิยมแบ่งออกเป็นช่วงย่อยที่มีความกว้างเท่ากัน
ดังนั้น ความกว้างของแต่ละช่วงย่อยมีค่าเท่ากับ $\dfrac{b-a}{n}$ และเลือก $x_k^* = x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$
เพราะฉะนั้น

$$S_n^* = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \frac{(b-a)}{n} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

ซึ่งการเลือก x_k^* ไม่มีผลต่อค่าของ A เมื่อ $n \to \infty$

ถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n^*$ มีค่า จะเรียกค่าของลิมิตนี้ว่า**ปริพันธ์จำกัดเขต (definite integral) ของ f บนช่วง** $[a,b]$ เขียนแทนด้วย

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n^*$$

เรากำหนด

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

สมบัติของปริพันธ์จำกัดเขต

1. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว
2. $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
3. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ เมื่อ $a<c<b$

ตัวอย่าง 3.3.1 ให้ $\int_1^4 f(x)\,dx = 5$, $\int_3^4 f(x)\,dx = 2$ และ $\int_1^8 f(x)\,dx = 11$ จงหา

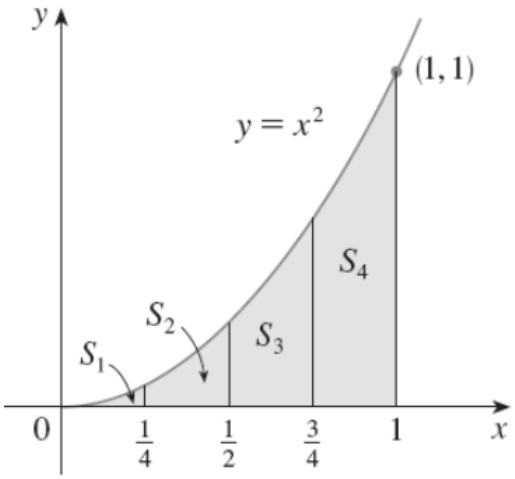
1. $\int_4^8 f(x)\,dx$

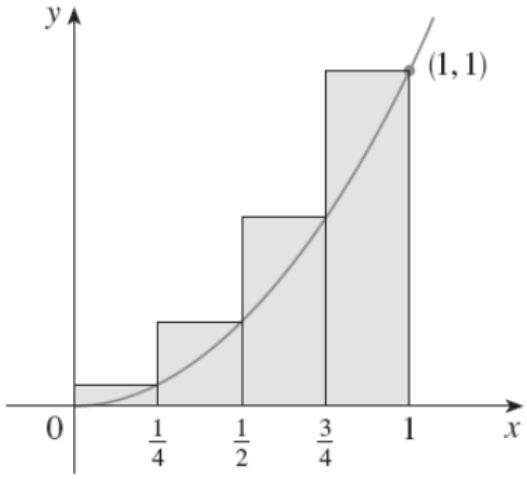
2. $\int_1^3 f(x)\,dx$

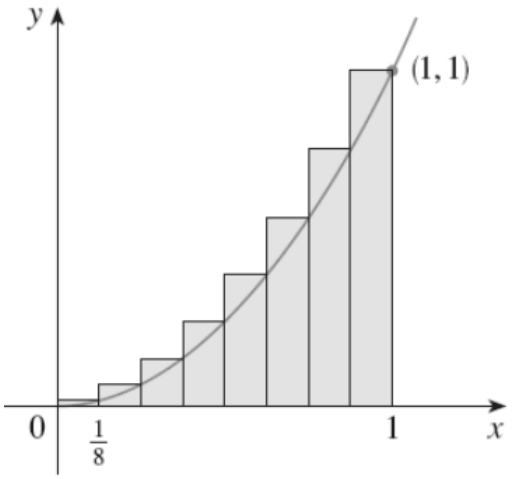
3. $\int_3^8 f(x)\,dx$

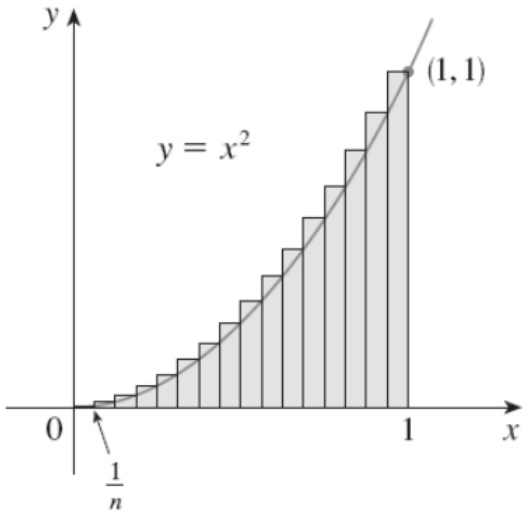
ตัวอย่าง 3.3.2 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่อยู่เหนือแกน X และใต้พาราโบลา $y = x^2$ บนช่วง $[0, 1]$ โดยใช้ลิมิตของผลบวกรีมันน์

หมายเหตุ $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ และ $1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$









วิธีทำ. 1. แบ่งช่วงปิด $[0,1]$ เป็น n ช่วงย่อยที่กว้างเท่าๆ กัน

จึงได้ว่าแต่ละช่วงย่อยมีความกว้าง h = ...

ดังนั้นเรามี $x_0 = \ldots\ldots, x_1 = \ldots\ldots, x_2 = \ldots\ldots$ และ $x_i = \ldots\ldots\ldots$ สำหรับ $0 \leq i \leq n$.

2. เลือก $x_i^* = x_i$ ทุก $0 \leq i \leq n$.

3. คำนวณ $S_n^* = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)$.

4. พื้นที่ที่ต้องการเท่ากับ $\lim_{n\to\infty} S_n^* =$

□

ตัวอย่าง 3.3.3 จงหาค่าของปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้โดยอาศัยความหมายเชิงพื้นที่

1. $\int_{-2}^{2} |x+1|\,dx$

2. $\int_{0}^{1} \sqrt{2x-x^2}\,dx$

3. $\int_{0}^{2\pi} \cos x\,dx$

ทำแบบฝึกหัด 3.3 ในหนังสือแคลคูลัส ๑

3.4 ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่หนึ่งของแคลคูลัส

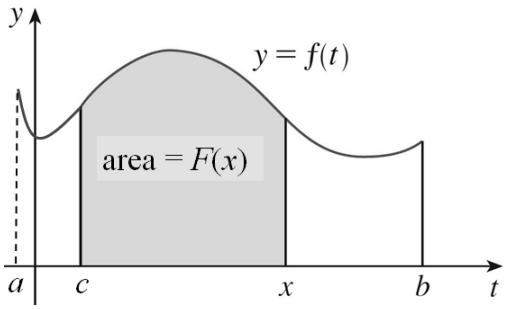
ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่หนึ่งของแคลคูลัส (First Fundamental Theorem of Calculus)

ทฤษฎีบท 3.4.1 *ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ $a<c<b$ และ ให้ F เป็นอีกฟังก์ชันหนึ่ง ซึ่งนิยามโดย*

$$F(x)=\int_c^x f(t)\,dt \qquad \text{ทุก } x\in[a,b]$$

จะได้ว่า F มีอนุพันธ์บน $[a,b]$ และ

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)\,dt=f(x) \qquad \text{ทุก } x\in[a,b]$$



ตัวอย่าง 3.4.1 1. ถ้า $F(x)=\displaystyle\int_0^x \sqrt[3]{\cos t}\,dt$ จะได้ว่า $F'(x)=$

2. ถ้า $F(x)=\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^x \tan(t^4+1)\,dt$ จะได้ว่า $F'(x)=$

3. ถ้า $F(x)=\displaystyle\int_x^{-2} |1-t^2|\,dt$ จะได้ว่า $F'(x)=$

4. ให้ $F(x)=\displaystyle\int_1^x \sqrt{t^2+\sin t}\,dt$ จงหา $F(1)$ และ $F'(\pi)$

โดยกฎลูกโซ่ เราได้ว่า

$$\frac{d}{dx}\int_c^{u(x)} f(t)\,dt = f(u(x))\frac{d}{dx}u(x)$$

ตัวอย่าง 3.4.2 จงหา $F'(x)$ เมื่อ

1. $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{\sin x} \frac{1}{t^3+2}\,dt$

2. $F(x) = \displaystyle\int_{\sqrt[4]{x}}^{10} \cos(t^4)\,dt$

3. $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{\arctan x} \sin(3-\sqrt{t+1})\,dt$ และจงหา $F'(0)$

ตัวอย่าง 3.4.3 ให้ H และ F เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย

$$H(x) = (x^2 + x)F(x^2) \quad \text{และ} \quad F(x) = \int_x^1 \frac{8t}{2 + t^2 + t^4}\, dt$$

จงหา $H'(1)$

ตัวอย่าง 3.4.4 จงหา $\dfrac{d^2}{dx^2} \displaystyle\int_0^x \left(\int_1^{\sin t} \sqrt{1 + u^4}\, du \right) dt$

ตัวอย่าง 3.4.5 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องโดยที่

$$x\sin(\pi x) = \int_0^{x^2} f(t)\,dt$$

จงหาค่าของ $f(4)$

ตัวอย่าง 3.4.6 ถ้าเส้นโค้ง $y = f(x)$ ซึ่งมี $y' = \sec(ax)\tan(ax)$ สัมผัสกับกราฟของ

$$F(x) = 1 + ax + \int_x^{2x+x^2} (1 + \sin^2 t)^5 \, dt$$

ที่จุด $x = 0$ จงหาค่าของ a และ สมการของเส้นโค้ง $y = f(x)$

3.5 การคำนวณค่าปริพันธ์จำกัดเขต

ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่สองของแคลคูลัส (Second Fundamental Theorem of Calculus)

ทฤษฎีบท 3.5.1 *ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f หากเราเขียน $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ เมื่อ $a \le x \le b$ จะได้ว่า*

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b f(t)\,dt \;=\; -F(a) + F(b) \;=\; F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

เราคำนวณค่าปริพันธ์จำกัดเขต $\int_a^b f(x)\,dx$ อย่างไร

1. หาปฏิยานุพันธ์ $\int f(x)\,dx = F(x) + C$
2. หาค่าของ $F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} \;=\; F(b) - F(a)$

ตัวอย่าง 3.5.1 จงหาค่าของปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos x\,dx$

2. $\displaystyle\int_1^{18} \sqrt{\frac{3}{x}}\,dx$

3. $\displaystyle\int_2^4 \left(z - \frac{2}{z^2}\right) dz$

4. $\displaystyle\int_0^{1/2} \left(2x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$

5. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x \cos 2x \, dx$

6. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{1+\cos x} \, dx$

7. $\int_0^2 |x^2 - 3x + 2|\, dx$

8. $\int_0^4 f(x)\, dx$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} x + \cos(\pi x), & 0 \le x \le 1 \\ x^3 - x, & 1 < x \le 4 \end{cases}$

9. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^5}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

10. $\displaystyle\int_{-8}^{-1} x^{-4/3}\left(x^{-1/3}+\sqrt{1+x^{-1/3}}\right)^2 dx$

ทำแบบฝึกหัด 3.4 ในหนังสือแคลคูลัส ๑

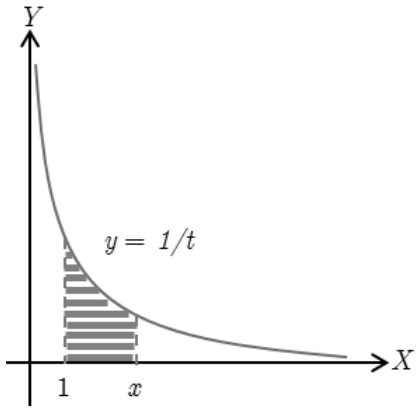
4 ฟังก์ชันอดิสัย

4.1 ฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

ให้ $x > 0$ เรานิยาม **ฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติ (Natural Logarithmic Function)** โดย

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

ดังนั้น โดเมนของ ln คือ $(0, \infty)$



เราได้ว่า สำหรับ $x, y > 0$

1. $\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0$
2. (ถ้า $x > 1$ แล้ว $\ln x > 0$) และ (ถ้า $0 < x < 1$ แล้ว $\ln x < 0$)
3. $\ln xy = \ln x + \ln y$
4. $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
5. ถ้า $x < y$ แล้ว $\ln x < \ln y$ เพราะฉะนั้น ln เป็นฟังก์ชันเพิ่มและมีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง
6. $\ln x^r = r \ln x$ เมื่อ $r \in \mathbb{R}$

ทฤษฎีบท 4.1.1 *เราได้ว่า*

$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$ *เมื่อ* $x \neq 0$ *ดังนั้น โดยกฎลูกโซ่* $\frac{d}{dx}\ln|u(x)| = \frac{1}{u(x)}u'(x)$ *เมื่อ* $u(x) \neq 0$

เพราะฉะนั้น $y = \ln x$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(0, \infty)$

จากทฤษฎีบทข้างต้น

ทฤษฎีบท 4.1.2 *เราได้ว่า*

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

เพราะว่า $y = \ln x$, $x > 0$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้น ln มี inverse function นิยามโดย

$$x = \ln y,\ y > 0 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad y = \exp x = e^x$$

เรียกว่า **ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (exponential function)** เราได้ว่า สำหรับ $x, y \in \mathbb{R}$

1. $e^0 = 1$ และ $e = \exp(1)$ ทำให้ได้ว่า $\ln e = 1$
2. $e^{x+y} = e^x e^y$ และ $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
3. $(e^x)^r = e^{xr}$
4. $y = e^x$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
5. ถ้า $x < y$ แล้ว $e^x < e^y$ เพราะฉะนั้น exp เป็นฟังก์ชันเพิ่มและมีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง
6. จาก $x = \ln y$ ดังนั้น
$$1 = \frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}\ln y = \frac{1}{y}y'$$
นั่นคือ $y' = y$

ทฤษฎีบท 4.1.3 *เราได้ว่า* $\frac{d}{dx}\exp x = \frac{d}{dx}e^x = e^x$ *โดยกฎลูกโซ่จะได้* $\frac{d}{dx}e^{u(x)} = e^{u(x)}u'(x)$ *ส่งผลให้*

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

สังเกตว่า หากฟังก์ชัน ln มีขอบเขต นั่นคือ มีจำนวนจริง M_1, M_2ซึ่ง $M_1 < \ln x < M_2$ ทุก $x > 0$ ทำให้ได้ว่า $0 < e^{M_1} < x < e^{M_2}$ ทุก x ซึ่งขัดแย้งกับ โดเมนของ ln คือ $(0, \infty)$ เพราะฉะนั้น

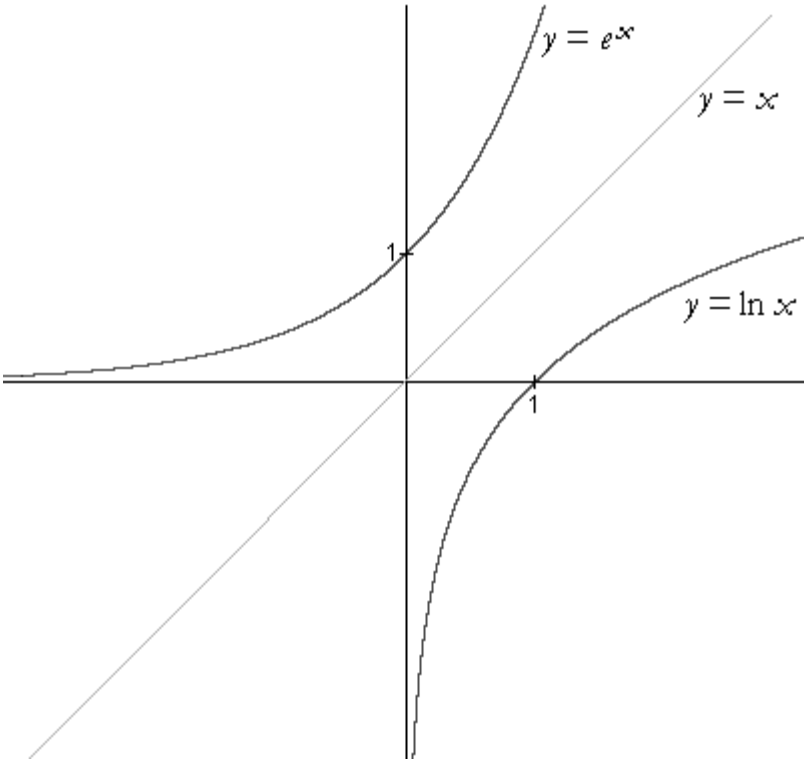
ทฤษฎีบท 4.1.4 *เราได้ว่า*

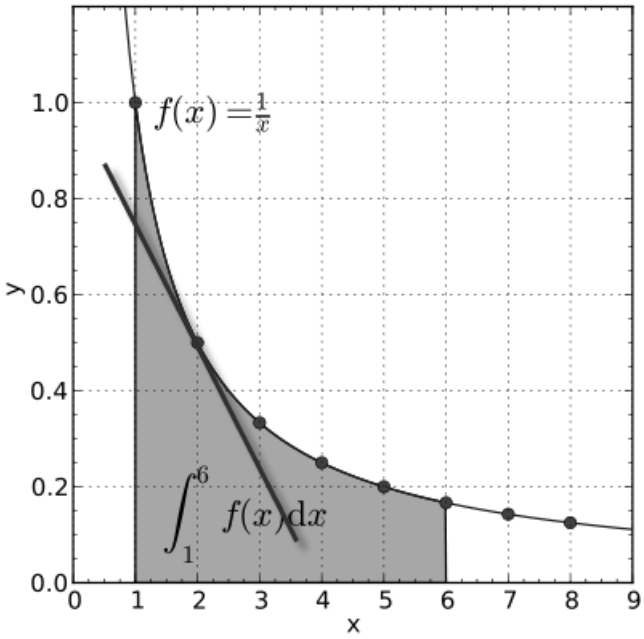
1. ln *เป็นฟังก์ชันเพิ่มที่มีความต่อเนื่องบน* $(0, \infty)$ *และไม่มีขอบเขต ดังนั้น พิสัยของ* ln *คือ* $(-\infty, \infty)$ *และ*

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{และ} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

2. exp *เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบน* $(-\infty, \infty)$ *และมีพิสัยเป็น* $(0, \infty)$ *นั่นคือ* $e^x > 0$ *ทุก* $x \in \mathbb{R}$ *และ*

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \quad \text{และ} \quad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$





จากรูปจะได้ว่า $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx < 1$ และ $\ln 3 = \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx > \frac{73}{72} > 1$ เพราะฉะนั้น

$$\ln 2 < \ln e = 1 =< \ln 3 \quad \text{นั่นคือ} \quad 2 < e < 3$$

เราสามารถประมาณค่า e จาก

$$\frac{1}{x} = \frac{d}{dx}\ln x = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln 1}{h}$$

เมื่อ $x = 1$ เราได้

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+h) \\ &= \lim_{h\to 0}\ln(1+h)^{1/h} \\ &= \ln\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} \quad \text{จาก ln เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} = 2.7182818... \quad \text{ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ว่าเป็นจำนวนอตรรกยะ}$$

ฟังก์ชันชี้กำลังฐาน a และ ฟังก์ชันลอการิทึมฐาน a

ให้ a เป็นจำนวนจริงบวก และ $a \neq 1$
เรานิยาม**ฟังก์ชันชี้กำลังฐาน** a **(exponential function base** a**)** โดย

$$f(x) = a^x = \exp(x \ln a) \qquad \text{ทุก } x \in \mathbb{R}$$

ทฤษฎีบท 4.1.5 *เราได้ว่า*

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a \qquad \textit{และ} \qquad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a}$$

เนื่องจาก $y = a^x = \exp(x \ln a)$ ยังคงเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ซึ่งมี inverse function เป็น

$$x = \exp(y \ln a) \Leftrightarrow y \ln a = \ln x \Leftrightarrow y = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad \text{ทุก } x > 0$$

เราจึงกำหนดสัญลักษณ์ให้ inverse function นี้เป็น

$$f^{-1}(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad \text{ทุก } x > 0$$

เรียกว่า**ฟังก์ชันลอการิทึมฐาน** a **(logarithmic function base** a**)**

ทฤษฎีบท 4.1.6 *เราได้ว่า*

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{d}{dx}\frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

ทฤษฎีบท 4.1.7 (Power Function) *สังเกตว่า เมื่อ* $x > 0$ *และ* $r \in \mathbb{R}$ *จะได้ว่า* $x^r = e^{r \ln x}$ *ดังนั้น*

$$\frac{d}{dx}x^r = \frac{d}{dx}e^{r \ln x} = e^{r \ln x}\frac{d}{dx}r \ln x = rx^r\frac{1}{x} = rx^{r-1}$$

ตัวอย่าง 4.1.1 จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $f(x) = e^x + \ln(x+1) + x$ ณ จุดที่ $x = 0$

ตัวอย่าง 4.1.2 จงหาอนุพันธ์ของ

1. $f(x) = e^{x^2+\sqrt{x}}$

2. $f(x) = \dfrac{\sin(5^x)}{x}$

ตัวอย่าง 4.1.3 จงหาปริพันธ์ $\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(e^x + \frac{1}{x-1}\right)dx$

ตัวอย่าง 4.1.4 จงหา y' และ y'' เมื่อ $e^{y/x} = \dfrac{1}{x} - y$

ตัวอย่าง 4.1.5 จงหาอนุพันธ์ของ

1. $y = \ln|\cos e^x \pi|$ ที่จุด $x = \ln 0.5$

2. $y = 2^{\sec(\ln|4x|)}$

3. $y = \log_5(\arcsin 2x)$

4. $y = \log_{3x}(\arctan x^2)$

การหาอนุพันธ์โดยการใช้ ln **(logarithmic differentiation)**

1. Take ln ทั้งสองข้างของความสัมพันธ์ แล้วจัดรูปโดยใช้สมบัติของ ln กล่าวคือ
   (i) $\ln ab = \ln a + \ln b$ (ii) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ (iii) $\ln a^r = r \ln a$
2. หาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร x โดยปริยาย
3. แก้สมการหา y'

จาก $f(x) = e^{\ln f(x)}$ ดังนั้น

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{d}{dx} f(x)^{g(x)} = \frac{d}{dx} e^{g(x) \ln f(x)} \quad \text{ซึ่งหาได้จากกฎลูกโซ่}$$

ตัวอย่าง 4.1.6 [Logarithmic Differentiation] จงหาอนุพันธ์ของ

1. $y = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$

2. $y = \dfrac{(x^2+1)^3}{\pi^{\cos x} \arcsin x}$

3. $y = (2x+1)^{x^2}$

4. $y = \sqrt[4]{x^{\tan(2x)}}$

ตัวอย่าง 4.1.7 จงหา y' เมื่อกำหนดให้ $x^y + y^x = x\sin y$

ตัวอย่าง 4.1.8 ให้ $F(x) = \int_{\ln x}^{x-x^4} \sqrt[3]{2-\sec t}\, dt$ จงหา $F'(x)$ and $F'(1)$

ตัวอย่าง 4.1.9 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x (1-\tan 2t)^{1/t}\, dt$

ตัวอย่าง 4.1.10 จงหาปริพันธ์

1. $\int \frac{1}{5-4x}\,dx$

2. $\int \frac{x^2+4x}{x^3+6x^2-10}\,dx$

3. $\int \frac{1+e^x}{e+x+e^x}\,dx$

4. $\int \tan x \, dx$

เราสรุปได้ว่า $\int \tan x \, dx = \ln|\sec x| + C$ และ $\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$

5. $\int \sec x \, dx$

เราสรุปได้ว่า

$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$ และ $\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

6. $\int e^{x+e^x}\,dx$

7. $\int \dfrac{2^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$

8. $\int \dfrac{\log_5 \sqrt{x} + (5)^{\ln(3x)}}{x}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^{-x}-e^x}}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{2+x+\arctan^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{x\cos(x^2) - \ln(x^2)}{x}\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{e^{2x} + e^{4x}}{1 + e^{4x}}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{4+e^{x}}\,dx$

15. $\displaystyle\int_1^2 x^{3x}(1+\ln x)\,dx$

16. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx$

ทำแบบฝึกหัด 4.1–4.4 ในหนังสือแคลคูลัส ๑

4.2 ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก

ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกเป็นฟังก์ชันที่นิยามจากฟังก์ชันชี้กำลังและมีสมบัติบางประการที่คล้ายคลึงกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ ด้วยเหตุผลนี้เราจึงใช้สัญลักษณ์ตลอดจนเรียกฟังก์ชันเหล่านี้เป็น ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกไซน์, ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกโคไซน์ ฯลฯ ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกมีทั้งหมด 6 ฟังก์ชัน นิยามโดย

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

และกำหนด

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}, \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}, \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

โดยเรามีเอกลักษณ์เบื้องต้นของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกดังนี้

ทฤษฎีบท 4.2.1 *1.* $\sinh(-x) = -\sinh x$ *และ* $\cosh(-x) = \cosh x$

2. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$ *และ* $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$

3. $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ *และ*
$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

เรามีกฎการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกดังนี้

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$$

ตัวอย่าง 4.2.1 จงหาอนุพันธ์ของ

1. $y = x \sinh \sqrt{x}$

2. $y = \tanh(\cosh x)$

ตัวอย่าง 4.2.2 จงแสดงว่า

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \qquad \text{ทุก } x \in \mathbb{R}$$

และหาอนุพันธ์ของ $y = \sinh^{-1} x$

สูตรการหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของฟังก์ชัน และ เอกลักษณ์ตรีโกณมิติที่สำคัญ

$$\frac{d}{dx}k = 0 \qquad \int k\,du = ku + C$$

$$\frac{d}{dx}f(x)g(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \qquad \int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$$

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx} \qquad \int \frac{1}{u}\,du = \int u^{-1}\,du = \ln|u| + C$$

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx} \qquad \int e^u\,du = e^u + C$$

$$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a\frac{du}{dx} \qquad \int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$\frac{d}{dx}\ln|u| = \frac{1}{u}\frac{du}{dx},\ \frac{d}{dx}\log_a|u| = \frac{1}{u\ln a}\frac{du}{dx} \qquad \int \sin u\,du = -\cos u + C$$

$$\frac{d}{dx}\sin u = \cos u\frac{du}{dx} \qquad \int \cos u\,du = \sin u + C$$

$$\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u\frac{du}{dx} \qquad \int \sec^2 u\,du = \tan u + C$$

$$\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u\frac{du}{dx} \qquad \int \operatorname{cosec}^2 u\,du = -\cot u + C$$

$$\frac{d}{dx}\cot u = -\operatorname{cosec}^2 u\frac{du}{dx} \qquad \int \sec u\tan u\,du = \sec u + C$$

$$\frac{d}{dx}\sec u = \sec u\tan u\frac{du}{dx} \qquad \int \operatorname{cosec} u\cot u\,du = -\operatorname{cosec} u + C$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec} u\cot u\frac{du}{dx} \qquad \int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$$

$$\frac{d}{dx}\arcsin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \qquad \int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C$$

$$\frac{d}{dx}\arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \qquad \int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$\frac{d}{dx}\arctan u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx} \qquad \int \operatorname{cosec} u\,du = \ln|\operatorname{cosec} u - \cot u| + C$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccot} u = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \arcsin u + C$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \qquad \int \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan u + C$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccosec} u = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \qquad \int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,du = \operatorname{arcsec} u + C$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \sec^2 x - \tan^2 x = 1 \qquad \operatorname{cosec}^2 x - \cot^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

5 เทคนิคของการหาปริพันธ์

5.1 การหาปริพันธ์ทีละส่วน

จาก

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

ดังนั้น

$$\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du$$
$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

หรือ

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

เรียกว่า **สูตรการหาปริพันธ์ทีละส่วน (integration by parts)**

สูตรการหาปริพันธ์ที่ใช้บ่อย

1. $\displaystyle\int e^{ax+b}\,dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + C$
2. $\displaystyle\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + C$
3. $\displaystyle\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + C$

ตัวอย่าง 5.1.1 จงหา v เมื่อกำหนดให้

1. $dv = \dfrac{1}{x}\,dx$
2. $dv = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx$
3. $dv = \cos x\,dx$
4. $dv = \sin 2x\,dx$
5. $dv = \sec^2 x\,dx$
6. $dv = e^{2x}\,dx$

ตัวอย่าง 5.1.2 (ง่ายๆ) จงหาปริพันธ์

1. $\int xe^x\,dx$

2. $\int x3^x\,dx$

3. $\int x^2 \ln x \, dx$

4. $\int_1^e \ln x \, dx$

5. $\int x \cos 2x \, dx$

6. $\int x \sin^2 x \, dx$

7. $\int \cos(\sqrt{x}) \, dx$

8. $\int \arccos x \, dx$

9. $\int x \arctan x \, dx$

10. $\int x^2 2^x \, dx$

ตัวอย่าง 5.1.3 (ย้ายข้าง) จงหาปริพันธ์

1. $\int e^x \cos x \, dx$

2. $\int \cos(\ln x)\,dx$

3. $\int e^{\arcsin x}\,dx$

4. $\int \sec^3 x \, dx$

ตัวอย่าง 5.1.4 (??) จงหาปริพันธ์

1. $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x^2+x^4}\,dx$

2. $\int_0^1 x \ln \sqrt{1+x^2}\, dx$

ทำแบบฝึกหัด 6.1 ในหนังสือแคลคูลัส ๑

5.2 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

การหาปริพันธ์ $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ แบ่งเป็น 3 กรณีคือ

1. m เป็นคี่ $\Rightarrow$ ให้ $u = \cos x$ เปลี่ยน $\sin^2 x$ เป็น $1 - \cos^2 x$
2. n เป็นคี่ $\Rightarrow$ ให้ $u = \sin x$ เปลี่ยน $\cos^2 x$ เป็น $1 - \sin^2 x$
3. m และ n เป็นคู่ $\Rightarrow$ ใช้ $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ และ $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

ตัวอย่าง 5.2.1 จงหาปริพันธ์

1. $\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx$

2. $\int \dfrac{\cos^5 x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$

3. $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

4. $\int \cos^4 3x \, dx$

การหาปริพันธ์ $\int \sec^m x \tan^n x \, dx$ แบ่งเป็น 3 กรณีคือ

1. n เป็นคี่
   $\Longrightarrow$ ให้ $u = \sec x$ เปลี่ยน $\sec x \tan x \, dx$ เป็น $d\sec x$ และเปลี่ยน $\tan^2 x$ เป็น $\sec^2 x - 1$
2. m เป็นคู่
   $\Longrightarrow$ ให้ $u = \tan x$ เปลี่ยน $\sec^2 x \, dx$ เป็น $d\tan x$ และเปลี่ยน $\sec^2 x$ เป็น $\tan^2 x + 1$
3. n เป็นคู่ และ m เป็นคี่ $\Longrightarrow$ ลดทอนกำลังให้เหลือแต่ $\sec x$ แล้วใช้ by parts

ตัวอย่าง 5.2.2 จงหาปริพันธ์

1. $\int \tan^3 x \sec^5 x \, dx$

2. $\int \tan^3 x \, dx$ (ทำ 2 วิธี)

3. $\int \tan^8 x \sec^4 x \, dx$

4. $\int \sec^6 2x \, dx$

5. $\int \tan^2 x \sec x \, dx$

เราสามารถหาปริพันธ์ $\int \cot^m x \ \mathrm{cosec}^n x \, dx$ ได้ด้วยวิธีที่คล้ายคลึงกัน เช่น

6. $\int \sqrt{\cot x} \ \mathrm{cosec}^4 x \, dx$

ทำแบบฝึกหัด 6.3, 6.4 ในหนังสือแคลคูลัส ๑

5.3 การหาปริพันธ์โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ใช้เมื่อฟังก์ชันที่เราต้องการหาปริพันธ์มีพจน์ในรูปแบบ

$$a^2-u^2, \qquad a^2+u^2, \qquad u^2-a^2$$

พจน์	แทนค่า	du
a^2-u^2	$u=a\sin\theta$	$du=a\cos\theta\,d\theta$ $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$
a^2+u^2	$u=a\tan\theta$	$du=a\sec^2\theta\,d\theta$ $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$
u^2-a^2	$u=a\sec\theta$	$du=a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$ $\sec^2\theta-1=\tan^2\theta$

ตัวอย่าง 5.3.1 จงหาปริพันธ์

1. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

2. $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$

3. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{x^3}{(4x^2-9)^{3/2}}\,dx$

4. $\int \frac{1}{(3+2x-x^2)^{3/2}}\,dx$

5. $\int \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+2e^{x}+5)^{3/2}}\,dx$

ทำแบบฝึกหัด 6.8 ในหนังสือแคลคูลัส ๑

5.4 การหาปริพันธ์ฟังก์ชันตรรกยะของ $\sin x$ และ $\cos x$

ให้ $z = \tan\dfrac{x}{2}$ ดังนั้น $x = 2\arctan z$ ทำให้ $dx = \dfrac{2}{1+z^2}\,dz$ และ

$$\sin x = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{2z}{1+z^2} \quad \text{และ} \quad \cos x = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

ตัวอย่าง 5.4.1 จงหาปริพันธ์

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x - \sin x + 1}\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{\tan x - \sin x}\,dx$

5.5 การหาปริพันธ์ฟังก์ชันที่มีพจน์ $\sqrt[n]{ax+b}$

ให้ $z^n = ax+b$ เพื่อกำจัด $\sqrt[n]{\ }$

ตัวอย่าง 5.5.1 จงหาปริพันธ์

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^{1/2}+x^{1/3}}\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{x+x^{1/4}}{\sqrt{x}+1}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$

5.6 การหาปริพันธ์โดยแยกเป็นเศษส่วนย่อย

พิจารณาฟังก์ชันตรรกยะ

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

เมื่อ $N(x)$ และ $D(x)$ เป็นพหุนาม
ถ้า $\deg N(x) \geq \deg D(x)$ แล้ว เราสามารถตั้งหารยาว แล้วได้

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

โดยที่ $Q(x)$ และ $R(x)$ เป็นพหุนามและ $\deg R(x) < \deg D(X)$
และเรียก $\dfrac{R(x)}{D(x)}$ เช่นนี้ว่า**ฟังก์ชันตรรกยะแท้**

สังเกตว่า เราสามารถหาปริพันธ์ของ $Q(x)$ ได้โดยง่าย และเราจะแยกส่วนฟังก์ชันตรรกยะแท้ออกเป็นเศษส่วนย่อย ซึ่งทำได้โดย

1. แยกตัวประกอบ $D(x)$ เป็นตัวประกอบดีกรีหนึ่ง (linear factor) หรือดีกรีสอง (quadratic factor) ซึ่งแยกเป็น linear factor ไม่ได้อีก เช่น $x^2 + x + 1, x^2 + 4$
2. (ก) สำหรับ linear factor $(ax + b)^n$ ให้แยกเป็น

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax + b)^n}$$

   (ข) สำหรับ quadratic factor $(ax^2 + bx + c)^m$ ให้แยกเป็น

$$\frac{B_1x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{B_mx + C_m}{(ax^2 + bx + c)^m}$$

3. แก้สมการหา A's, B's และ C's

สูตรการหาปริพันธ์ที่ใช้บ่อย

1. $\displaystyle\int \frac{1}{au + b}\,du = \frac{1}{a}\ln|au + b| + C$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{u^2 + a^2}\,du = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$

ตัวอย่าง 5.6.1 จงหาปริพันธ์

1. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2-2x-2}{x^2-x}\,dx$

2. $\int \dfrac{5x^2 - 15x + 7}{(x-2)^2(x+1)}\,dx$

3. $\int \dfrac{7x^2 - 7x + 23}{(x-3)(x^2+4)}\,dx$

4. $\int \dfrac{x^3+1}{(x^2+4)^2}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{3\sin x + 4\cos x}\,dx$

ตัวอย่าง 5.6.2 (ระคน) จงหาปริพันธ์

1. $\int \dfrac{e^x+1}{e^{2x}+e^x+1}\,dx$

2. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \frac{x\sqrt{x^4-2x^2-3}}{1+x^2}\,dx$

3. $\displaystyle\int_0^{0.5} \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{\cot x}{1+\sin x}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{\sec x}{\tan x - 2}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{x^{2/3}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

ทำแบบฝึกหัด 6.2, 6.6, 6.7 และ แบบฝึกหัดระคนบทที่ 6 ในหนังสือแคลคูลัส ๑

6 การประยุกต์ของอนุพันธ์

6.1 อัตราสัมพัทธ์

ปัญหาอัตราสัมพัทธ์เป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงของปริมาณหรือตัวแปรตาม ตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไปซึ่งมีค่าขึ้นอยู่กับเวลา และสามารถเขียนสูตรหรือสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรเหล่านั้นได้ โดยปกติแล้ว ปัญหาอัตราสัมพัทธ์ต้องการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรตัวหนึ่งเทียบกับเวลา เมื่อกำหนดหรือทราบอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรที่เหลือ

ขั้นตอนการแก้ปัญหาโจทย์

1. วาดรูป กำหนดตัวแปร เขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ต่าง ๆ
2. หาอนุพันธ์เทียบกับ t (โดยกฎลูกโซ่)
3. แทนค่าสิ่งที่โจทย์ให้ในสมการที่ได้จากขั้นที่ 2.

ตัวอย่าง 6.1.1 ถ้าความยาวเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่งกำลังเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็ว 6 cm/s จงหาว่าพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมนี้จะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็วเท่าใด เมื่อความยาวด้านเท่ากับ $3\sqrt{3}$ cm

ตัวอย่าง 6.1.2 ถ้วยกระดาษรูปกรวยกลมตรงปากกรวยมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 8 นิ้ว และมีความสูง 6 นิ้ว มีน้ำอยู่เต็ม ปลายกรวยมีรูรั่วทำให้น้ำไหลออกด้วยอัตราเร็ว 2 (นิ้ว)^{3}ต่อนาที จงหาว่าระดับน้ำเปลี่ยนไปด้วยอัตราเร็วเท่าใด ขณะเมื่อความสูงของน้ำเป็น 3 นิ้ว

ตัวอย่าง 6.1.3 บันไดยาว 5 เมตรวางพิงกำแพง ถ้าเชิงบันไดด้านล่างถูกดึงออกจากกำแพงด้วยอัตราเร็ว 0.1 เมตรต่อวินาที จงหาอัตราเร็วของมุมที่ทำกับพื้นดินขณะที่ยอดบันไดอยู่สูงจากพื้นดิน 3 เมตร

ตัวอย่าง 6.1.4 กำหนดด้าน 2 ด้านของรูปสามเหลี่ยมยาว 15 ฟุต และ 20 ฟุต ตามลำดับ ถ้ามุมระหว่างด้าน 2 ด้านที่กำหนดให้กำลังเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็ว 2° ต่อวินาที ขณะที่มุมเท่ากับ 60° จงหาว่า

(ก) ด้านที่สามเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็วเท่าไร

(ข) พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็วเท่าไร

ทำแบบฝึกหัด 5.4 ในหนังสือแคลคูลัส ๑

6.2 รูปแบบไม่กำหนดและกฎของโลปิตาล

ในการคำนวณ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \qquad (a\in\mathbb{R} \text{ หรือ } a=\pm\infty)$$

เรามักพบ**รูปแบบไม่กำหนด (indeterminate form)**

$$\frac{0}{0} \quad \text{หรือ} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

ซึ่งเราอาจหาค่าของลิมิตได้โดยการจัดรูป เช่น

- $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}=$

- $\lim_{x\to \infty}\dfrac{x+1}{2x-1}=$

ในบางครั้งการจัดรูปทำได้ไม่สะดวก เราอาจใช้

ทฤษฎีบท 6.2.1 *[กฎของโลปิตาล (L'Hôpital's Rule)] เมื่อ $a\in\mathbb{R}$ หรือ a แทน $\pm\infty$*

1. *ถ้า* $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ *และ* $\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *มีค่า แล้ว*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. *ถ้า* $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ *และ* $\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *มีค่า แล้ว*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

หมายเหตุ

1. ถ้า $\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ยังอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{0}{0}$ หรือ $\dfrac{\infty}{\infty}$
   เราสามารถใช้กฎของโลปิตาลต่อไปได้เรื่อย จนกว่าเราจะบอกค่าลิมิตได้

2. เราไม่สามารถใช้กฎของโลปิตาลกับลิมิตซึ่งไม่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนดได้ เช่น

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x-1}{x+2}\neq\lim_{x\to 2}\frac{2}{1}=2 \qquad \text{แต่ } \lim_{x\to 2}\frac{2x-1}{x+2}=\frac{3}{4}$$

ค่าลิมิตที่สำคัญบางค่า

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}e^x=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}e^x=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$$

ตัวอย่าง 6.2.1 $\left(\frac{0}{0}\text{ หรือ }\frac{\infty}{\infty}\right)$ จงหาค่าของ

1. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x^3-2x}$

2. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{(\arctan x)-\pi/4}$

3. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln x^2}{x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x - \tan x}{e^x + e^{-x} - 2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\arcsin x}{x \tan x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 2\ln|\cos x|}{x^2 + 1 - \sec(2x)}$

7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{xe^{2x} + \ln e^{x^2}}{x^2 e^x}$

รูปแบบไม่กำหนด $0 \cdot \infty$ และ $\infty - \infty$

ให้แปลงอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ ก่อน แล้วจึงใช้กฎของโลปิตาลได้

ตัวอย่าง 6.2.2 ($0 \cdot \infty$ หรือ $\infty - \infty$) จงหาค่าของ

1. $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$

2. $\lim_{x \to \infty} x \sin(e^{-x})$

3. $\lim_{x\to 0}\left(\cot x - \dfrac{1}{x}\right)$

4. $\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{1-\cos x} - \dfrac{1}{\ln(1+2x)}\right)$

ในการหาลิมิตของฟังก์ชันในรูป

$$y = [f(x)]^{g(x)}$$

อาจเกิดรูปแบบไม่กำหนดในรูป 0^0 หรือ 1^∞ หรือ ∞^0
ซึ่งเราแปลงเป็น

$$y = [f(x)]^{g(x)} = e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

แล้วจึงใช้กฎของโลปิตาลกับลิมิตของ $g(x)\ln f(x)$ ซึ่งจะอยู่ในรูปแบบ $(\pm\infty)\cdot 0$

ตัวอย่าง 6.2.3 (0^0 หรือ 1^∞ หรือ ∞^0) จงหาค่าของ

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cos x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \big(\cos x + \sin 2x\big)^{\cot x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\sin x\right)^{\dfrac{1}{(2\ln x)}}$

ตัวอย่าง 6.2.4 จงหา $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}\sin x} - \dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$

ตัวอย่าง 6.2.5 จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)^{\tan x}$

2. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^{1/x}\sin x}$

ทำแบบฝึกหัด 5.5 ในหนังสือแคลคูลัส ๑

6.3 ค่าสุดขีดของฟังก์ชัน

1. f เป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม**บน (a,b) ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
2. f เป็น**ฟังก์ชันลด**บน (a,b) ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

ทฤษฎีบท 6.3.1 *[เพิ่ม/ลด]*

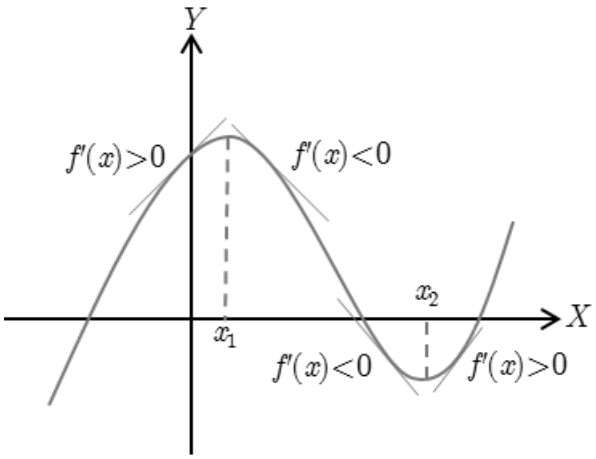
1. *ถ้า $f' > 0$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม*
2. *ถ้า $f' < 0$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันลด*

เช่น $f(x) = x^2$

$f(x) = -(x+2)^{2/3}$

จุด $x = c$ เป็น**จุดวิกฤต (critical point)** ของ f ก็ต่อเมื่อ $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ ไม่มีค่า

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ต่อไปนี้



เราได้ว่า f มีค่า**สูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum)** ที่ $x = x_1$ และ มีค่า**ต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum)** ที่ $x = x_2$

ทฤษฎีบท 6.3.2 *[The First Derivative Test] ให้ $x = c$ เป็นจุดวิกฤตของ f จะได้ว่า*

1. *f' เปลี่ยนจาก $+$ เป็น $-$ ที่ $x = c \Rightarrow f$ มี rel max ที่ $x = c$*
2. *f' เปลี่ยนจาก $-$ เป็น $+$ ที่ $x = c \Rightarrow f$ มี rel min ที่ $x = c$*

ตัวอย่าง 6.3.1 จงหาจุดวิกฤตและจุดสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

2. $f(x) = xe^{-x}$

3. $f(x) = x^2 - |x| + 1$

ตัวอย่าง 6.3.2 จงหาค่าของ a และ b ที่ทำให้

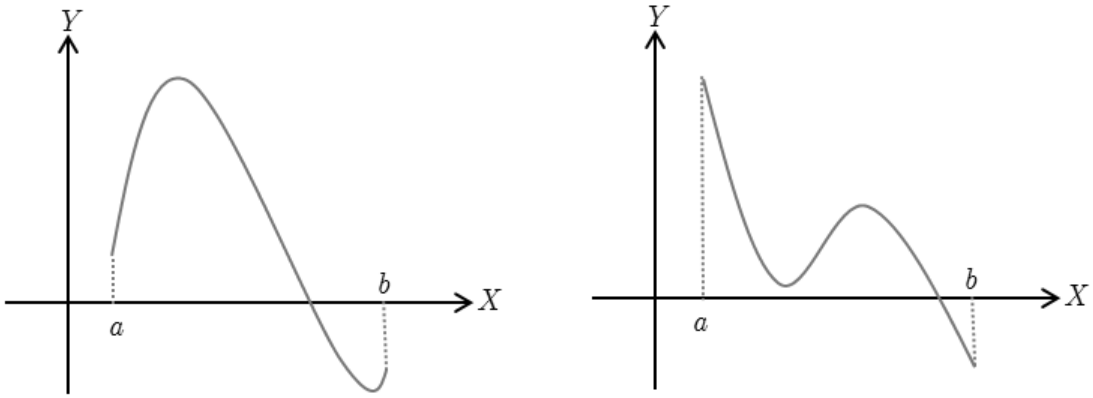
$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$$

มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -1$ เท่ากับ 2

ค่าสุดขีดสัมบูรณ์

ทฤษฎีบท 6.3.3 *[Max-Min Theorem] ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ แล้ว f มีค่าสูงสุดและต่ำสุดบนช่วง $[a,b]$ เรียกว่า* ***ค่าสูงสุดสัมบูรณ์และต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บน $[a,b]$***

พิจารณากราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ จะเห็นว่าค่าสูงสุดสัมบูรณ์หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บน $[a,b]$ อาจเป็นหรือไม่เป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ก็ได้



การพิจารณาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ (absolute extreme value) ของ f บน $[a,b]$

1. หาจุดวิกฤตทั้งหมดของ f ใน $[a,b]$
2. หาค่าของ f ที่แต่ละจุดวิกฤต และ หา $f(a)$ และ $f(b)$
3. ค่าสูงสุด $\Rightarrow$ abs max และ ค่าต่ำสุด $\Rightarrow$ abs min

ตัวอย่าง 6.3.3 จงหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ f บนช่วงที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $f(x)=-x^3+6x^2-5$ บน $[-1,2]$

2. $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$ บน $[-1, 1]$

3. $f(x) = e^x \sin x$ บน $[\pi/2, \pi]$

ปัญหาค่าสูงสุด/ต่ำสุดของฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 6.3.4 โรงเรียนแห่งหนึ่งจะนำนักเรียนไปทัศนศึกษายังจังหวัดใกล้เคียง โดยครูเก็บเงินนักเรียนคนละ 150 บาท ถ้ามีนักเรียนไปไม่เกิน 150 คน แต่ถ้ามีนักเรียนไปเกิน 150 คนจะเก็บเงินลดลงคนละ 50 สตางค์คูณด้วยจำนวนคนที่เกินจาก 150 นักเรียนควรจะไปทัศนศึกษากี่คนจึงจะทำให้ครูเก็บเงินได้มากที่สุด

ตัวอย่าง 6.3.5 กระป๋องรูปทรงกระบอกตรงปริมาตร 125 (นิ้ว)^3 มีฝาปิดหัวท้ายฝาปิดทำจากแผ่นโลหะบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และ ด้านข้างทำจากแผ่นโลหะบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า จงหารัศมีและความสูงของกระป๋องที่ทำให้ใช้ปริมาณของโลหะน้อยที่สุด

ตัวอย่าง 6.3.6 จงหาจุดบนพาราโบลา $y = 2x^2$ ซึ่งอยู่ใกล้จุด $(1, \frac{1}{4})$ ที่สุด

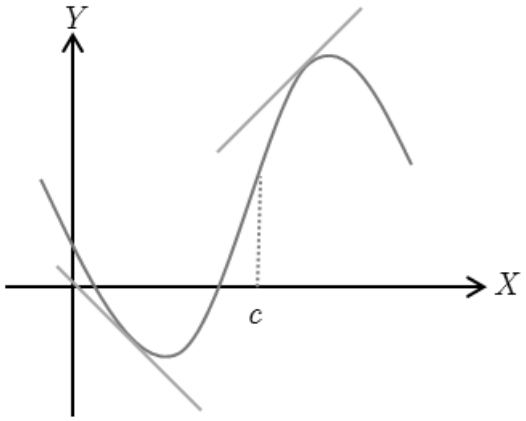
ตัวอย่าง 6.3.7 จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งมากสุดที่สามารถบรรจุในวงกลมหนึ่งหน่วย

ทำแบบฝึกหัด 5.1 ในหนังสือแคลคูลัส ๑

6.4 การร่างกราฟของเส้นโค้ง $y = f(x)$

ความเว้าและจุดเปลี่ยนเว้า

1. f **มีความเว้าอยู่บน (concave upward)** บน (a, b) ก็ต่อเมื่อ
   ทุก ๆ $c \in (a, b)$, กราฟของ f อยู่เหนือเส้นสัมผัสของ f ที่ $x = c$
2. f **มีความเว้าอยู่ล่าง (concave downward)** บน (a, b) ก็ต่อเมื่อ
   ทุก ๆ $c \in (a, b)$, กราฟของ f อยู่ใต้เส้นสัมผัสของ f ที่ $x = c$



เราแสดงได้ว่า

ทฤษฎีบท 6.4.1 *[เว้าบน/เว้าล่าง]*

1. *ถ้า $f'' > 0$ แล้ว f มีความเว้าอยู่บน*
2. *ถ้า $f'' < 0$ แล้ว f มีความเว้าอยู่ล่าง*

เราเรียกจุดซึ่งกราฟของ f เปลี่ยนความเว้าจากบนเป็นล่าง หรือ จากล่างเป็นบน ว่า **จุดเปลี่ยนเว้า (inflection point)**

และเรามี

ทฤษฎีบท 6.4.2 *ถ้า $x = c$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้าของ f แล้ว $f''(c) = 0$ หรือ $f''(c)$ ไม่มีค่า*

หมายเหตุ ถ้าเรามี $f''(c) = 0$ เราไม่อาจสรุปได้ว่า $x = c$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้าของ f โดยทันที เราต้องตรวจสอบการเปลี่ยนความเว้า (เครื่องหมายของ f'') ก่อนเสมอ เช่น

$f(x) = x^4$

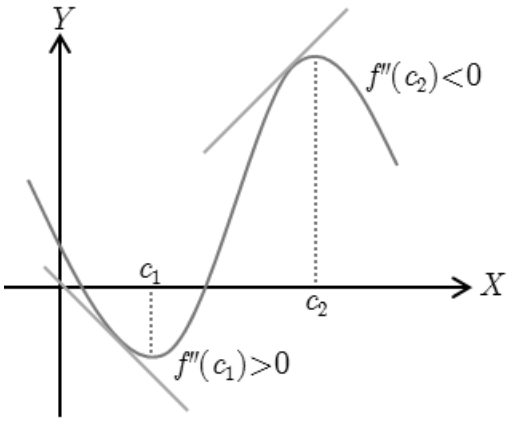
ตัวอย่าง 6.4.1 จงหาช่วงที่กราฟของฟังก์ชันมีความเว้าอยู่บน ช่วงที่กราฟมีความเว้าอยู่ล่าง และจุดเปลี่ยนเว้า (ถ้ามี) ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

2. $f(x) = \arctan x$

3. $f(x) = xe^{-x}$

จากความรู้เรื่องความเว้า เราสังเกตว่า



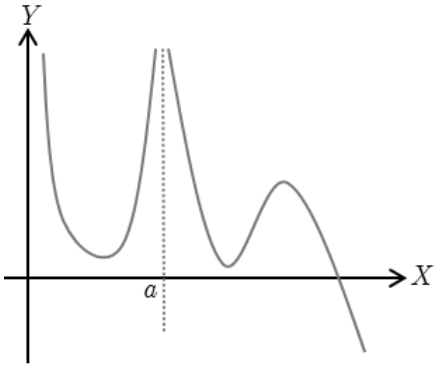
ทฤษฎีบท 6.4.3 *[The Second Derivative Test] ให้ $x = c$ เป็นจุดวิกฤตของ f จะได้ว่า*

1. $f''(c) > 0 \Rightarrow f$ *มี relative minimum ที่* $x = c$
2. $f''(c) < 0 \Rightarrow f$ *มี relative maximum ที่* $x = c$

เส้นกำกับ

เรากล่าวว่า $x = a$ เป็น**เส้นกำกับแนวดิ่ง (vertical asymptote)** ของ f ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \text{ หรือ } -\infty \quad \textbf{หรือ} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \text{ หรือ } -\infty$$



หมายเหตุ ถ้า $f(x)$ อยู่ในรูป $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ แล้ว

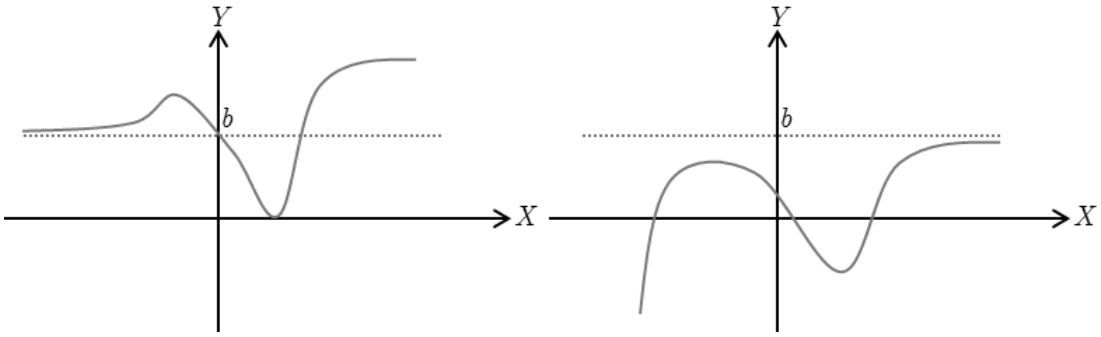
$x = a$ เป็นเส้นกำกับแนวดิ่งของ $f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $p(a) \neq 0$ และ $q(a) = 0$

เช่น $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - x}$

แต่ $f(x) = \dfrac{\sin x}{x(x - \pi)}$ ไม่มีเส้นกำกับแนวดิ่ง

เรากล่าวว่า $y = b$ เป็น**เส้นกำกับแนวนอน (horizontal asymptote)** ของ f ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{หรือ} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$



เช่น $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2x^2}$

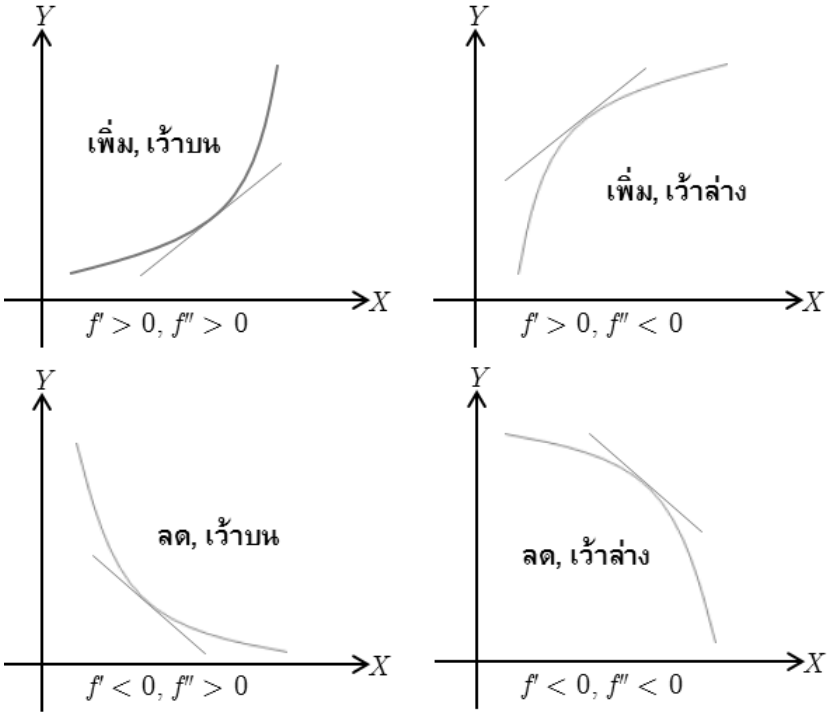
$f(x) = xe^{-2x}$

$f(x) = \arctan x$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}}{2x-1}$$

ลักษณะของกราฟ

จากความรู้เรื่องฟังก์ชันเพิ่ม/ลด และความเว้าบน/ล่าง เรามีลักษณะต่างๆของกราฟของฟังก์ชัน ดังรูป



ตัวอย่าง 6.4.2 กำหนดให้ $f(x) = x(x-4)^3$ จงเติมคำตอบลงในช่องว่าง

(1) โดเมนของ f คือ . . . . . .

(2) กราฟของ f ตัดแกน X ที่ $x =$ . . . . . และกราฟของ f ตัดแกน Y ที่ $y =$ . . . . . .

(3) เส้นกำกับแนวนอนของกราฟของ f คือเส้นตรง . . . . . .

และเส้นกำกับแนวดิ่งของกราฟของ f คือเส้นตรง . . . . . .

(4) $f'(x) =$ . . . . . .

$f''(x) =$ . . . . . .

(5) จุดวิกฤตทั้งหมดของ f คือ . . . . . .

(6) ช่วงทั้งหมดที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม คือ . . . . . .

และ ช่วงทั้งหมดที่ f เป็นฟังก์ชันลด คือ . . . . . .

(7) จุดสูงสุดสัมพัทธ์ของ f (ถ้ามี) คือ . . . . . และ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f (ถ้ามี) คือ . . . . . .

(8) ช่วงที่กราฟของ f มีความเว้าอยู่บน คือ . . . . . .

และ ช่วงที่กราฟของ f มีความเว้าอยู่ล่าง คือ . . . . . .

(9) จุดเปลี่ยนเว้าของ f (ถ้ามี) คือ . . . . . .

(10) จงเขียนกราฟของ f พร้อมทั้งแสดงเส้นกำกับแนวนอน เส้นกำกับแนวดิ่ง พิกัดของจุดสูงสุดสัมพัทธ์ พิกัดของจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ และ พิกัดของจุดเปลี่ยนเว้า (ถ้ามี)

ตัวอย่าง 6.4.3 กำหนดให้ $f(x) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$ บน $[-1, 4]$ จงเติมคำตอบลงในช่องว่าง

(1) กราฟของ f ตัดแกน X ที่ $x =$ . . . . . และกราฟของ f ตัดแกน Y ที่ $y =$ . . . . . .

(2) เส้นกำกับแนวนอนของกราฟของ f คือเส้นตรง . . . . . .

และเส้นกำกับแนวดิ่งของกราฟของ f คือเส้นตรง . . . . . .

(3) $f'(x) =$ . . . . . .

$f''(x) =$ . . . . . .

(4) จุดวิกฤตทั้งหมดของ f คือ . . . . . .

(5) ช่วงทั้งหมดที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม คือ . . . . . .

และ ช่วงทั้งหมดที่ f เป็นฟังก์ชันลด คือ . . . . . .

(6) จุดสูงสุดสัมพัทธ์ของ f (ถ้ามี) คือ . . . . . และ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f (ถ้ามี) คือ . . . . . .

(7) ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f คือ . . . . . และ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f คือ . . . . . .

(8) ช่วงที่กราฟของ f มีความเว้าอยู่บน คือ . . . . . .

และ ช่วงที่กราฟของ f มีความเว้าอยู่ล่าง คือ . . . . . .

(9) จุดเปลี่ยนเว้าของ f (ถ้ามี) คือ . . . . . .

(10) จงเขียนกราฟของ f พร้อมทั้งแสดงเส้นกำกับแนวนอน เส้นกำกับแนวดิ่ง พิกัดของจุดสูงสุดสัมพัทธ์ พิกัดของจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ และ พิกัดของจุดเปลี่ยนเว้า (ถ้ามี)

ตัวอย่าง 6.4.4 กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ จงเติมคำตอบลงในช่องว่าง

(1) โดเมนของ f คือ . . . . . .

(2) กราฟของ f ตัดแกน X ที่ $x =$ . . . . . และกราฟของ f ตัดแกน Y ที่ $y =$ . . . . . .

(3) เส้นกำกับแนวนอนของกราฟของ f คือเส้นตรง . . . . . .

และเส้นกำกับแนวดิ่งของกราฟของ f คือเส้นตรง . . . . . .

(4) $f'(x) =$ . . . . . .

$f''(x) =$ . . . . . .

(5) จุดวิกฤตทั้งหมดของ f คือ . . . . . .

(6) ช่วงทั้งหมดที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม คือ . . . . . .

และ ช่วงทั้งหมดที่ f เป็นฟังก์ชันลด คือ . . . . . .

(7) จุดสูงสุดสัมพัทธ์ของ f (ถ้ามี) คือ . . . . . และ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f (ถ้ามี) คือ . . . . . .

(8) ช่วงที่กราฟของ f มีความเว้าอยู่บน คือ . . . . . .

และ ช่วงที่กราฟของ f มีความเว้าอยู่ล่าง คือ . . . . . .

(9) จุดเปลี่ยนเว้าของ f (ถ้ามี) คือ . . . . . .

(10) จงเขียนกราฟของ f พร้อมทั้งแสดงเส้นกำกับแนวนอน เส้นกำกับแนวดิ่ง พิกัดของจุดสูงสุดสัมพัทธ์ พิกัดของจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ และ พิกัดของจุดเปลี่ยนเว้า (ถ้ามี)

ตัวอย่าง 6.4.5 กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{2 + x - x^2}{(x-1)^2}$ จงเติมคำตอบลงในช่องว่าง

(1) โดเมนของ f คือ . . . . . .

(2) กราฟของ f ตัดแกน X ที่ $x =$ . . . . . และกราฟของ f ตัดแกน Y ที่ $y =$ . . . . . .

(3) เส้นกำกับแนวนอนของกราฟของ f คือเส้นตรง . . . . . .

และเส้นกำกับแนวดิ่งของกราฟของ f คือเส้นตรง . . . . . .

(4) $f'(x) =$ . . . . . .

$f''(x) =$ . . . . . .

(5) จุดวิกฤตทั้งหมดของ f คือ . . . . . .

(6) ช่วงทั้งหมดที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม คือ . . . . . .

และ ช่วงทั้งหมดที่ f เป็นฟังก์ชันลด คือ . . . . . .

(7) จุดสูงสุดสัมพัทธ์ของ f (ถ้ามี) คือ . . . . . และ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f (ถ้ามี) คือ . . . . . .

(8) ช่วงที่กราฟของ f มีความเว้าอยู่บน คือ . . . . . .

และ ช่วงที่กราฟของ f มีความเว้าอยู่ล่าง คือ . . . . . .

(9) จุดเปลี่ยนเว้าของ f (ถ้ามี) คือ . . . . . .

(10) จงเขียนกราฟของ f พร้อมทั้งแสดงเส้นกำกับแนวนอน เส้นกำกับแนวดิ่ง พิกัดของจุดสูงสุดสัมพัทธ์ พิกัดของจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ และ พิกัดของจุดเปลี่ยนเว้า (ถ้ามี)

ตัวอย่าง 6.4.6 กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+3}}$ จงเติมคำตอบลงในช่องว่าง

(1) โดเมนของ f คือ . . . . . .

(2) กราฟของ f ตัดแกน X ที่ $x =$ . . . . . และกราฟของ f ตัดแกน Y ที่ $y =$ . . . . . .

(3) เส้นกำกับแนวนอนของกราฟของ f คือเส้นตรง . . . . . .

และเส้นกำกับแนวดิ่งของกราฟของ f คือเส้นตรง . . . . . .

(4) $f'(x) =$ . . . . . .

$f''(x) =$ . . . . . .

(5) จุดวิกฤตทั้งหมดของ f คือ . . . . . .

(6) ช่วงทั้งหมดที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม คือ . . . . . .

และ ช่วงทั้งหมดที่ f เป็นฟังก์ชันลด คือ . . . . . .

(7) จุดสูงสุดสัมพัทธ์ของ f (ถ้ามี) คือ . . . . . และ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f (ถ้ามี) คือ . . . . . .

(8) ช่วงที่กราฟของ f มีความเว้าอยู่บน คือ . . . . . .

และ ช่วงที่กราฟของ f มีความเว้าอยู่ล่าง คือ . . . . . .

(9) จุดเปลี่ยนเว้าของ f (ถ้ามี) คือ . . . . . .

(10) จงเขียนกราฟของ f พร้อมทั้งแสดงเส้นกำกับแนวนอน เส้นกำกับแนวดิ่ง พิกัดของจุดสูงสุดสัมพัทธ์ พิกัดของจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ และ พิกัดของจุดเปลี่ยนเว้า (ถ้ามี)

ตัวอย่าง 6.4.7 กำหนดให้ $f(x) = 1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}$ จงเติมคำตอบลงในช่องว่าง

(1) โดเมนของ f คือ . . . . . .

(2) กราฟของ f ตัดแกน X ที่ $x =$ . . . . . และกราฟของ f ตัดแกน Y ที่ $y =$ . . . . . .

(3) เส้นกำกับแนวนอนของกราฟของ f คือเส้นตรง . . . . . .

และเส้นกำกับแนวดิ่งของกราฟของ f คือเส้นตรง . . . . . .

(4) $f'(x) =$ . . . . . .

$f''(x) =$ . . . . . .

(5) จุดวิกฤตทั้งหมดของ f คือ . . . . . .

(6) ช่วงทั้งหมดที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม คือ . . . . . .

และ ช่วงทั้งหมดที่ f เป็นฟังก์ชันลด คือ . . . . . .

(7) จุดสูงสุดสัมพัทธ์ของ f (ถ้ามี) คือ . . . . . และ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f (ถ้ามี) คือ . . . . . .

(8) ช่วงที่กราฟของ f มีความเว้าอยู่บน คือ . . . . . .

และ ช่วงที่กราฟของ f มีความเว้าอยู่ล่าง คือ . . . . . .

(9) จุดเปลี่ยนเว้าของ f (ถ้ามี) คือ . . . . . .

(10) จงเขียนกราฟของ f พร้อมทั้งแสดงเส้นกำกับแนวนอน เส้นกำกับแนวดิ่ง พิกัดของจุดสูงสุดสัมพัทธ์ พิกัดของจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ และ พิกัดของจุดเปลี่ยนเว้า (ถ้ามี)

ตัวอย่าง 6.4.8 กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{5(2|x| - 1)}{(x-2)^2}$ จงเติมคำตอบลงในช่องว่าง

(1) โดเมนของ f คือ . . . . . .

(2) กราฟของ f ตัดแกน X ที่ $x =$ . . . . . และกราฟของ f ตัดแกน Y ที่ $y =$ . . . . . .

(3) เส้นกำกับแนวนอนของกราฟของ f คือเส้นตรง . . . . . .

และเส้นกำกับแนวดิ่งของกราฟของ f คือเส้นตรง . . . . . .

(4) $f'(x) =$ . . . . . .

$f''(x) =$ . . . . . .

(5) จุดวิกฤตทั้งหมดของ f คือ . . . . . .

(6) ช่วงทั้งหมดที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม คือ . . . . . .

และ ช่วงทั้งหมดที่ f เป็นฟังก์ชันลด คือ . . . . . .

(7) จุดสูงสุดสัมพัทธ์ของ f (ถ้ามี) คือ . . . . . และ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f (ถ้ามี) คือ . . . . . .

(8) ช่วงที่กราฟของ f มีความเว้าอยู่บน คือ . . . . . .

และ ช่วงที่กราฟของ f มีความเว้าอยู่ล่าง คือ . . . . . .

(9) จุดเปลี่ยนเว้าของ f (ถ้ามี) คือ . . . . . .

(10) จงเขียนกราฟของ f พร้อมทั้งแสดงเส้นกำกับแนวนอน เส้นกำกับแนวดิ่ง พิกัดของจุดสูงสุดสัมพัทธ์ พิกัดของจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ และ พิกัดของจุดเปลี่ยนเว้า (ถ้ามี)

ตัวอย่าง 6.4.9 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ จงเติมคำตอบลงในช่องว่าง

(1) โดเมนของ f คือ . . . . . .

(2) กราฟของ f ตัดแกน X ที่ $x =$ . . . . . และกราฟของ f ตัดแกน Y ที่ $y =$ . . . . . .

(3) เส้นกำกับแนวนอนของกราฟของ f คือเส้นตรง . . . . . .

และเส้นกำกับแนวดิ่งของกราฟของ f คือเส้นตรง . . . . . .

(4) $f'(x) =$ . . . . . .

$f''(x) =$ . . . . . .

(5) จุดวิกฤตทั้งหมดของ f คือ . . . . . .

(6) ช่วงทั้งหมดที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม คือ . . . . . .

และ ช่วงทั้งหมดที่ f เป็นฟังก์ชันลด คือ . . . . . .

(7) จุดสูงสุดสัมพัทธ์ของ f (ถ้ามี) คือ . . . . . และ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f (ถ้ามี) คือ . . . . . .

(8) ช่วงที่กราฟของ f มีความเว้าอยู่บน คือ . . . . . .

และ ช่วงที่กราฟของ f มีความเว้าอยู่ล่าง คือ . . . . . .

(9) จุดเปลี่ยนเว้าของ f (ถ้ามี) คือ . . . . . .

(10) จงเขียนกราฟของ f พร้อมทั้งแสดงเส้นกำกับแนวนอน เส้นกำกับแนวดิ่ง พิกัดของจุดสูงสุดสัมพัทธ์ พิกัดของจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ และ พิกัดของจุดเปลี่ยนเว้า (ถ้ามี)

ตัวอย่าง 6.4.10 กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{1}{4x} + \arctan x$ เมื่อ $x > 0$ จงเติมคำตอบลงในช่องว่าง

(1) เส้นกำกับแนวนอนของกราฟของ f (ถ้ามี) คือเส้นตรง . . . . . .

และเส้นกำกับแนวดิ่งของกราฟของ f (ถ้ามี) คือเส้นตรง . . . . . .

(2) $f'(x) =$ . . . . . .

$f''(x) =$ . . . . . .

(3) จุดวิกฤตทั้งหมดของ f คือ . . . . . .

(4) ช่วงทั้งหมดที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม คือ . . . . . .

และ ช่วงทั้งหมดที่ f เป็นฟังก์ชันลด คือ . . . . . .

(5) จุดสูงสุดสัมพัทธ์ของ f (ถ้ามี) คือ . . . . . และ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f (ถ้ามี) คือ . . . . . .

(6) ช่วงที่กราฟของ f มีความเว้าอยู่บน คือ . . . . . .

และ ช่วงที่กราฟของ f มีความเว้าอยู่ล่าง คือ . . . . . .

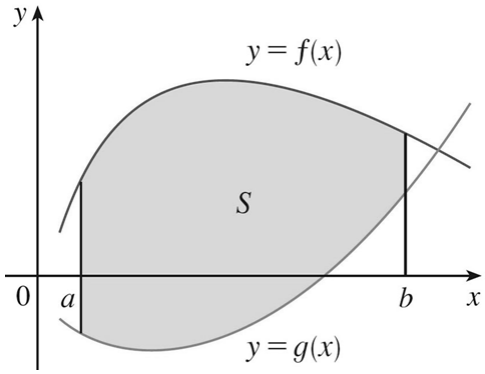
(7) จุดเปลี่ยนเว้าของ f (ถ้ามี) คือ . . . . . .

(8) จงเขียนกราฟของ f พร้อมทั้งแสดงเส้นกำกับแนวนอน เส้นกำกับแนวดิ่ง พิกัดของจุดสูงสุดสัมพัทธ์ พิกัดของจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ และ พิกัดของจุดเปลี่ยนเว้า (ถ้ามี)

ทำแบบฝึกหัด 5.2–5.3 ในหนังสือแคลคูลัส ๑

7 การประยุกต์ของปริพันธ์

7.1 พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง



เราได้พื้นที่ของอาณาบริเวณ S ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ เมื่อ $f(x) \geq g(x)$ บนช่วง $[a, b]$ เท่ากับ

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

ตัวอย่าง 7.1.1 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

1. $y = 2x$ และ $y = x^2$

2. $y = e^x$ และ $y = \dfrac{1}{x}$ เมื่อ $1 \leq x \leq e$

3. $y = x^2$ และ $y = 2x - x^2$

4. $y = \sin x$ และ $y = \cos x$ เมื่อ $0 \leq x \leq \pi/2$

5. $x = 2y^2$ และ $x + y = 3$

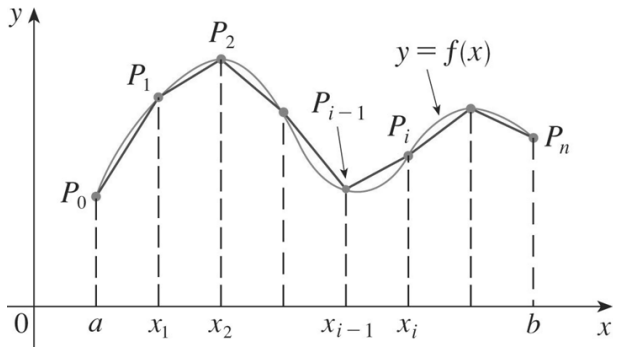
6. $x = y^2 - 4y$ และ $x = 2y - y^2$

7. $xy = 2$, $y = x + 1$ และ $5x + 4y = 22$

8. $x = 2\sqrt{y}$, เส้นตรง $x + y = 8$ และ เส้นตรง $y = 3x$ ในส่วนที่ $x + y \leq 8$

ทำแบบฝึกหัด 7.1 ในหนังสือแคลคูลัส ๑

7.2 ความยาวส่วนโค้ง



$$\text{ระยะทางจาก } (x_{i-1}, f(x_{i-1})) \text{ ไปยัง } (x_i, f(x_i)) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$
$$= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}(x_i - x_{i-1})$$

ดังนั้น **ความยาวส่วนโค้ง (arc length from a to b)** คือ

$$L(a,b) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}\,\Delta x_i.$$

เมื่อ $n \to \infty$, Δx_i จะเล็ก ๆ และ

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \approx f'(x_i).$$

เราจึงสรุปได้ว่า

ทฤษฎีบท 7.2.1 *ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่ง f' มีความต่อเนื่องบน $[a,b]$ จะได้ว่าความยาวของเส้นโค้ง $y = f(x)$ เมื่อ $a \le x \le b$ มีค่าเป็น*

$$L(a,b) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

ตัวอย่าง 7.2.1 จงเขียนความยาวส่วนโค้งของฟังก์ชันต่อไปนี้ในรูปปริพันธ์จำกัดเขต (โดยไม่ต้องหาค่าของปริพันธ์)

1. $y = x^2 + e^x$ เมื่อ $0 \le x \le 1$

2. $y = x \ln x$ เมื่อ $e \le x \le 4$

ตัวอย่าง 7.2.2 จงหาความยาวของส่วนโค้งต่อไปนี้

1. $y = 2x^{3/2}$ เมื่อ $0 \leq x \leq 3$

2. $y = \sqrt{1 - x^2}$ เมื่อ $-1 \leq x \leq 1$

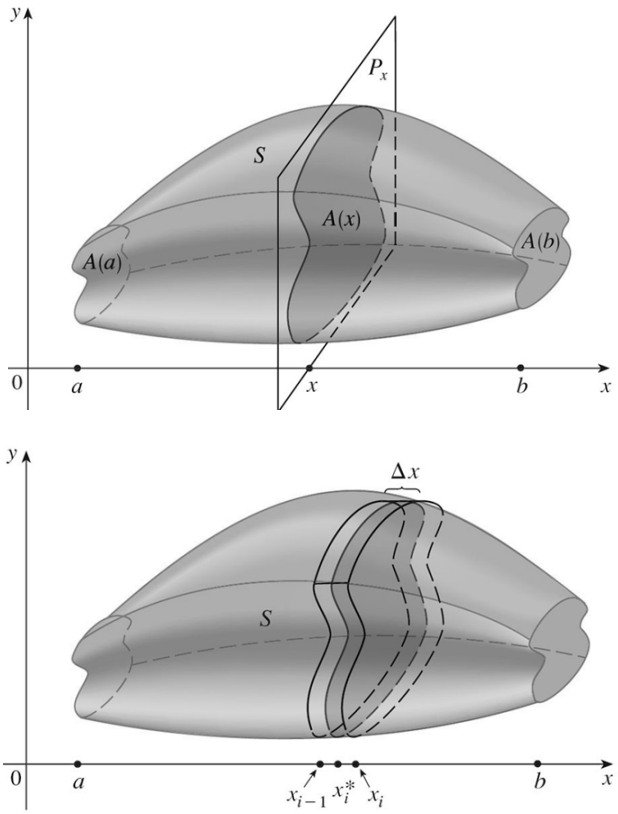
3. $y = x^2 - \dfrac{\ln x}{8}$ เมื่อ $1 \leq x \leq e^2$

4. $y = \dfrac{\sin x}{4} - \ln(\sec x + \tan x)$ จาก $x = 0$ ถึง $x = \pi/4$

5. $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}$ เมื่อ $1 \leq x \leq 8$

ทำแบบฝึกหัด 7.5 ในหนังสือแคลคูลัส ๑

7.3 ปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งหาพื้นที่ภาคตัดได้



เราจะคำนวณปริมาตรของรูปทรงตันโดยการแบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยเล็กๆ ซึ่งแต่ละช่วงย่อยจะมีปริมาตรเป็น

$$A(x_i^*)\Delta x_i$$

โดยที่ $A(x_i^*)$ เป็นพื้นที่ของภาคตัดชิ้นที่ i เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$ ซึ่งรวมปริมาตรของแต่ละชิ้นย่อยได้

$$V_n^* = \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x_i$$

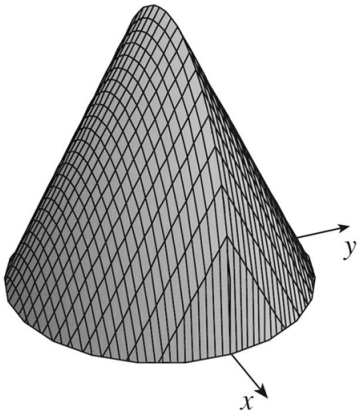
ดังนั้น เราจะได้ปริมาตรของทรงตันนี้เป็น

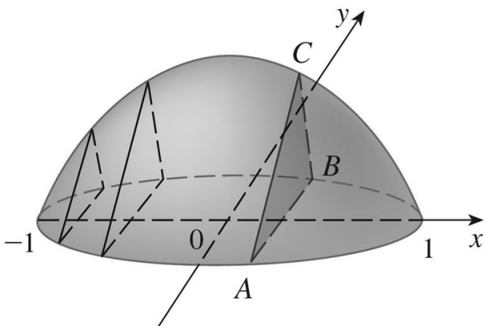
$$V = \lim_{n\to\infty} V_n^* = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x_i = \int_a^b A(x)\,dx$$

ในกรณีที่ตัดแบ่งทรงตันตั้งฉากกับแกน Y และ $A(y)$ เป็นพื้นที่หน้าตัด ณ y ใดๆ บน $[c,d]$ จะได้

$$V = \int_c^d A(y)\,dy$$

ตัวอย่าง 7.3.1 ถ้าฐานของรูปทรงตัน S เป็นรูปวงกลมหนึ่งหน่วยและทุกภาคตัดของ S ที่ตั้งฉากกับเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จงหาปริมาตรของรูปทรงตัน





ตัวอย่าง 7.3.2 จงหาปริมาตรของรูปกรวยตรง ซึ่งมีฐานเป็นวงกลมรัศมี r นิ้วและส่วนสูง h นิ้ว

ตัวอย่าง 7.3.3 ถ้าฐานของรูปทรงตันอยู่บนระนาบ XY ล้อมรอบด้วยพาราโบลา $x^2 = 4y$ เส้นตรง $y = 5$ จงหาปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งทุกภาคตัดที่ตั้งฉากกับแกน Y เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ตัวอย่าง 7.3.4 กำหนดให้ฐานของรูปทรงตัน S เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยวงรี $x^2+9y^2=9$ เฉพาะส่วนที่ $x \geq 0$ และแกน Y จงหาปริมาตรของรูปทรงตันเมื่อ

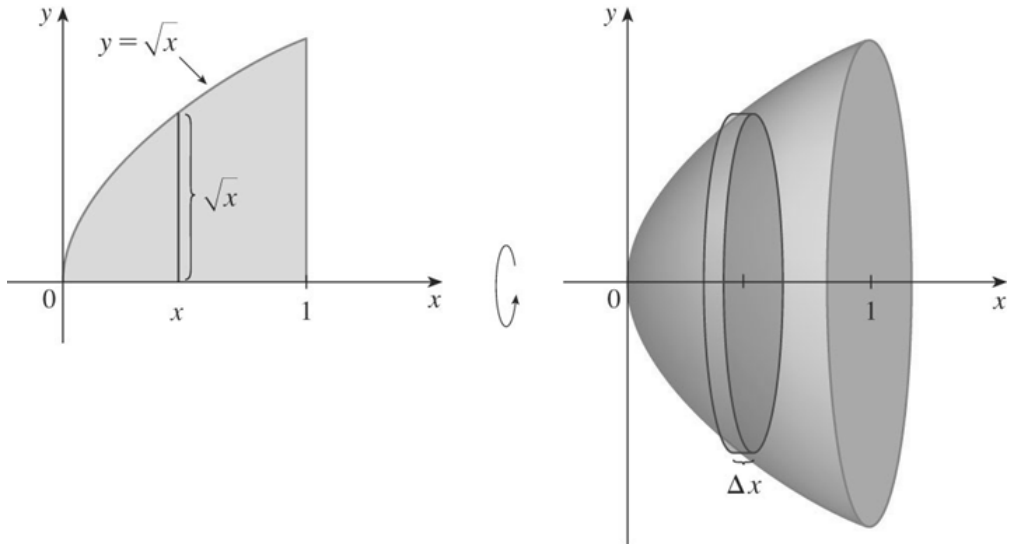
1. ถ้าตัดรูปทรงตันนี้ด้วยระนาบที่ตั้งฉากกับแกน X แล้วภาคตัดเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีส่วนสูงเท่ากับความยาวฐาน

2. ถ้าตัดรูปทรงตันนี้ด้วยระนาบที่ตั้งฉากกับแกน Y แล้วภาคตัดเป็นรูปครึ่งวงกลม

ทำแบบฝึกหัด 7.2 ในหนังสือแคลคูลัส ๑

7.4 ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน

รูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน (solid of revolution) คือรูปทรงตันที่ได้จากการหมุนอาณาบริเวณในระนาบรอบเส้นตรงเส้นหนึ่ง ซึ่งเรียกว่า **แกนหมุน**



7.4.1 วิธีแบบจาน

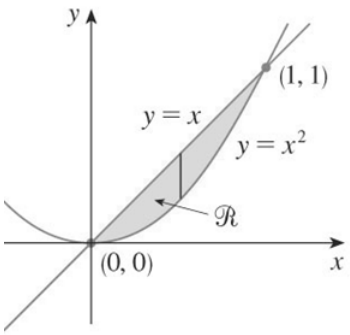
สังเกตว่ารูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนมีภาคตัดซึ่ง**ตั้งฉาก**กับแกนหมุนเป็นวงกลม หรือ วงแหวน จึงได้ว่า

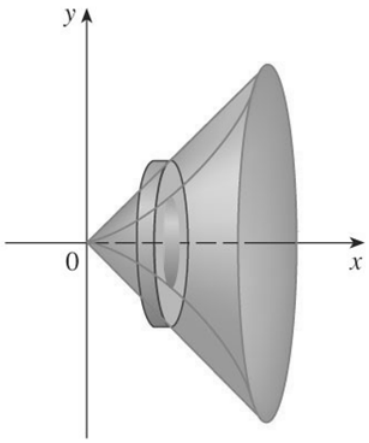
$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx \quad \text{หรือ} \quad V = \int_c^d \pi[g(y)]^2\,dy$$

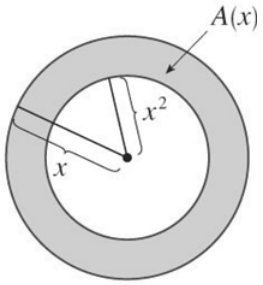
เรียกวิธีการหาปริมาตรแบบนี้ว่า **วิธีแบบจาน (method of disks)**

ตัวอย่าง 7.4.1 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$, แกน X และเส้นตรง $x = 1$ รอบแกน X

ตัวอย่าง 7.4.2 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $y = x$ และเส้นโค้ง $y = x^2$ รอบแกน X







ตัวอย่าง 7.4.3 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยพาราโบลา $y = 2 + x^2$, เส้นตรง $y = x + 1, x = 0$ และ $x = 1$

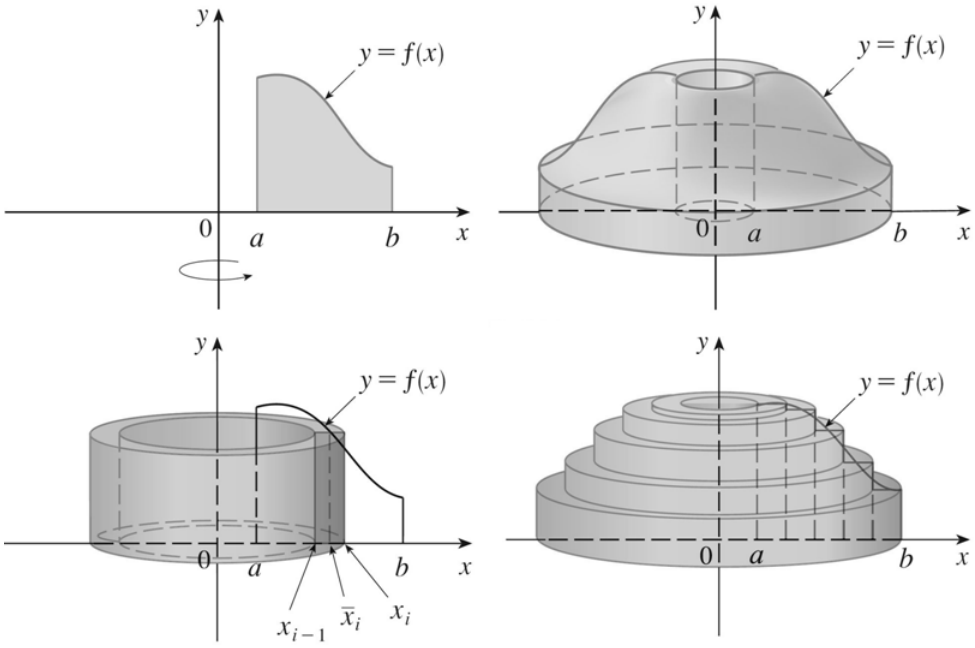
(ก) รอบแกน X (ข) รอบเส้นตรง $y = 3$

ตัวอย่าง 7.4.4 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยพาราโบลา $y = 3 - x^2$ เส้นตรง $y = 3 - x$ รอบเส้นตรง $x = 2$

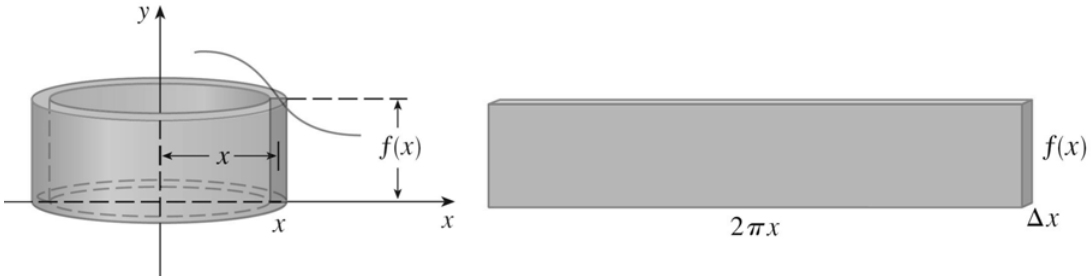
ตัวอย่าง 7.4.5 ถังน้ำมันใบหนึ่งสูง 4 ฟุต เกิดจากการหมุนพาราโบลา $y = 2x^2$ เมื่อ $0 \leq y \leq 4$ รอบแกน Y ถ้าถังน้ำมันใบนี้มีน้ำมันบรรจุอยู่ครึ่งหนึ่งของปริมาตรของถัง
จงหาความสูงของน้ำมันในถังใบนี้

7.4.2 วิธีแบบเปลือกทรงกระบอก

พิจารณาวิธีการหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากหมุนพื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ โดยการแบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็นช่วงย่อย จะเห็นว่าสามารถหาปริมาตรที่ต้องการได้จากผลรวมของปริมาตรของแต่ละเปลือกย่อยๆ ดังรูป



ซึ่งแต่ละเปลือกย่อยเป็นรูปทรงกระบอกและเราอาจคลี่ออกมาเป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากได้ดังรูป



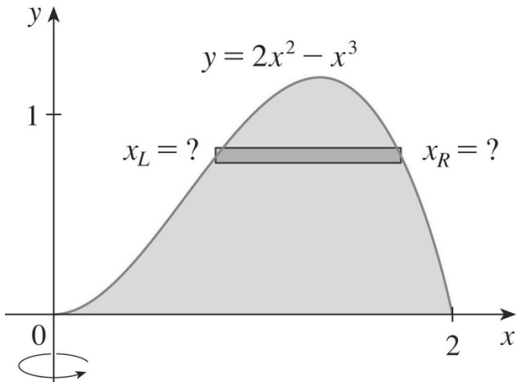
ดังนั้น ปริมาตรของแต่ละเปลือกย่อยมีค่าเป็น $V(x_i^*) = \underbrace{2\pi x_i^*}_{\text{เส้นรอบวง}} \underbrace{f(x_i^*)}_{\text{ส่วนสูง}} \underbrace{\Delta x_i}_{\text{ความหนา}}$ ทำให้ได้ว่า

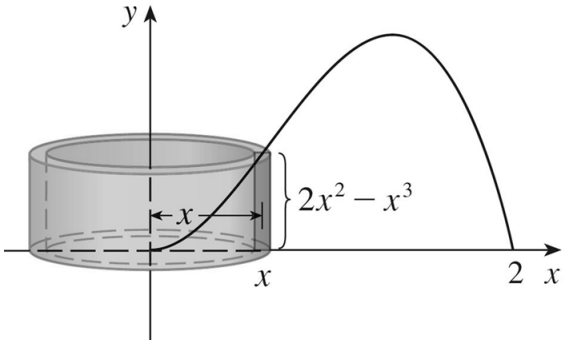
$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i^* f(x_i^*) \Delta x_i = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$$

เรียกวิธีการหาปริมาตรแบบนี้ว่า **วิธีแบบเปลือกทรงกระบอก (method of cylindrical shells)**

หมายเหตุ สังเกตว่า วิธีแบบจานแบ่งรูปทรงตันย่อยตั้งฉากกับแกนหมุน แต่วิธีแบบเปลือกทรงกระบอกแบ่งรูปทรงตันย่อยขนานกับแกนหมุน

ตัวอย่าง 7.4.6 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณใต้เส้นโค้ง $y = 2x^2 - x^3$ บนช่วง $[0, 2]$ รอบแกน Y





ตัวอย่าง 7.4.7 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $x^2 - y^2 = a^2$ และเส้นตรง $x = \sqrt{2}a$ รอบแกน Y

ตัวอย่าง 7.4.8 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ และ $y = x^3$ ด้วยวิธีแบบเปลือกทรงกระบอก เมื่อ

(ก) หมุนรอบแกน Y (ข) หมุนรอบแกน X (ค) หมุนรอบเส้นตรง $x = -1$

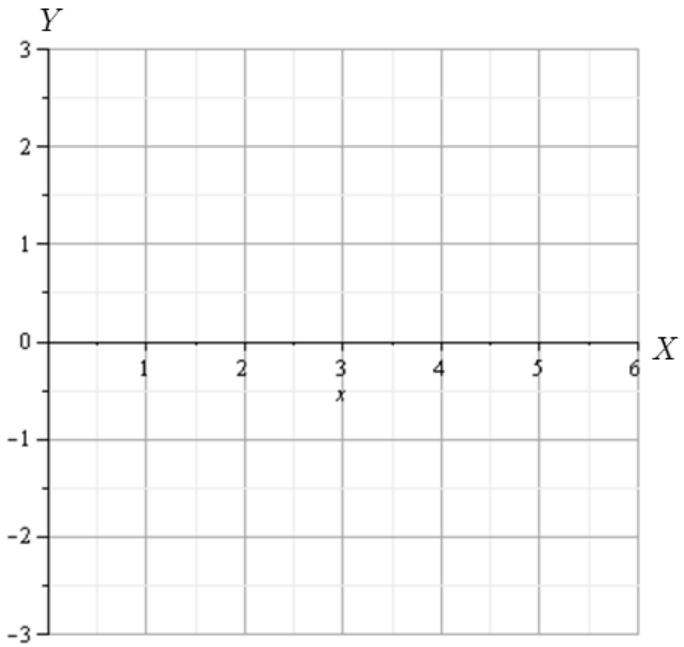
ตัวอย่าง 7.4.9 ให้ R เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \sin x$ และ $y = \cos x$ บนช่วง $[0, \pi/2]$ จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน R

(ก) รอบแกน X

(ข) รอบแกน Y

ตัวอย่าง 7.4.10 (ระคน) ให้ R เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 2x$, $4x + 3y = 10$ และเส้นโค้ง $y = -\sqrt{x}$

1. จงวาดรูปแสดงอาณาบริเวณ R พร้อมทั้งระบุจุดตัดต่างๆ ให้ชัดเจน



2. จงหาพื้นที่ของ R

3. จงเขียนปริพันธ์จำกัดเขตแสดงปริมาตรของรูปทรงต้นที่เกิดจากการหมุน R รอบแกน Y โดยวิธีแบบจาน

4. จงเขียนปริพันธ์จำกัดเขตแสดงปริมาตรของรูปทรงต้นที่เกิดจากการหมุน R รอบเส้นตรง $x = 4$ โดยวิธีแบบเปลือกทรงกระบอก

ทำแบบฝึกหัด 7.3 ในหนังสือแคลคูลัส ๑

ตัวอย่าง 7.4.11 (ระคน) ให้ R เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 2 - \log_2 x$, $y^2 = 4x^3$ และเส้นตรง $2x - 3y = 8$ เมื่อ $x \leq 4$

1. จงวาดรูปแสดงอาณาบริเวณ R พร้อมทั้งระบุจุดตัดต่างๆ ให้ชัดเจน

2. จงหาพื้นที่ของ R

3. ถ้ารูปทรงตันมีฐานเป็นอาณาบริเวณ R และทุกภาคตัดที่ตั้งฉากกับแกน X ของรูปทรงตันนี้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จงเขียนปริพันธ์จำกัดเขตแสดงปริมาตรของรูปทรงตัน

4. จงเขียนปริพันธ์จำกัดเขตแสดงปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน R รอบแกน Y โดยวิธีแบบจาน

5. จงเขียนปริพันธ์จำกัดเขตแสดงปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน R รอบเส้นตรง $x = -1$ โดยวิธีแบบเปลือกทรงกระบอก

6. จงเขียนปริพันธ์จำกัดเขตแสดงความยาวเส้นรอบรูปของอาณาบริเวณ R

8 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

8.1 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งหรือปริพันธ์อนันต์

เราเรียกปริพันธ์ $\int_a^b f(x)\,dx$ ว่า **ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง (improper integral of type I)** ถ้าช่วงของการหาปริพันธ์เป็นช่วงอนันต์ นั่นคือ ปริพันธ์ซึ่งอยู่ในรูป

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx \quad \text{หรือ} \quad \int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{หรือ} \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$$

1. ถ้า $\int_t^b f(x)\,dx$ มีค่าสำหรับทุกๆ $t \le b$ แล้ว

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$$

2. ถ้า $\int_a^t f(x)\,dx$ มีค่าสำหรับทุกๆ $t \ge a$ แล้ว

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

เรากล่าวว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ**ลู่เข้า (convergent)** ถ้าลิมิต ทางขวามือมีค่า และปริพันธ์ไม่ตรงแบบ**ลู่ออก(divergent)** ถ้าลิมิตไม่มีค่า

3. ถ้า $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ และ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่เข้า แล้ว เรากำหนดให้

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

ตัวอย่าง 8.1.1 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้า จงหาค่าของปริพันธ์

1. $\int_{-\infty}^0 2^{5x}\,dx$

2. $\displaystyle\int_4^\infty \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(1+e^{\sqrt{x}})}\,dx$

3. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x+1}{x^2+2x}\,dx$

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\,dx$

5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+8}\,dx$

ตัวอย่าง 8.1.2 จงแสดงว่า $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ ลู่ออก แต่ $\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} x\,dx = 0$

ทำแบบฝึกหัด 8.1 ในหนังสือแคลคูลัส ๑

8.2 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง

เราเรียกปริพันธ์ $\int_a^b f(x)\,dx$ ว่า **ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง (improper integral of type II)** ถ้า

$$\lim_{x\to a^+}|f(x)|=\infty \quad \text{หรือ} \quad \lim_{x\to b^-}|f(x)|=\infty$$

1. ถ้า $\int_t^b f(x)\,dx$ มีค่าสำหรับทุก ๆ $a<t\le b$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

2. ถ้า $\int_a^t f(x)\,dx$ มีค่าสำหรับทุก ๆ $a\le t<b$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$$

   เรากล่าวว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ**ลู่เข้า (convergent)** ถ้าลิมิตทางขวามือมีค่า และปริพันธ์ไม่ตรงแบบ**ลู่ออก(divergent)** ถ้าลิมิตไม่มีค่า

3. ถ้า $c\in(a,b)$ เป็นจุดซึ่งฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่อง, $\int_a^c f(x)\,dx$ และ $\int_c^b f(x)\,dx$ ลู่เข้า แล้ว เราให้

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

ตัวอย่าง 8.2.1 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้า จงหาค่าของปริพันธ์

1. $\int_0^{\pi/2}\sec x\,dx$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

3. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(3x-1)^{2/3}}\,dx$

4. $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^3+x}\,dx$

5. $\displaystyle\int_{0.5}^{2} \frac{1}{x\sqrt[3]{\log_2 x}}\,dx$

6. $\int_0^e \ln x \, dx$

7. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\arctan x}{(|x|-1)^2}\,dx$

ทำแบบฝึกหัด 8.2 ในหนังสือแคลคูลัส ๑

8.3 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดผสม

เราเรียกปริพันธ์ไม่ตรงแบบในรูป

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \text{ หรือ } \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx \text{ หรือ } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

ว่า**ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดผสม (mixed improper integral)** ถ้ามีจำนวนจริง c ในช่วงของการหาปริพันธ์ซึ่ง $x = c$ เป็นเส้นกำกับแนวดิ่งของ $f(x)$

เรามีหลักในการพิจารณาการลู่เข้า โดยแยกช่วงของการหาปริพันธ์เป็นช่วงย่อยๆ ให้เป็นช่วงอนันต์ที่ไม่มีเส้นกำกับแนวดิ่ง และช่วงจำกัดที่มีเส้นกำกับแนวดิ่งเพียงเส้นเดียว ณ จุดปลายช่วง และให้พิจารณาการลู่เข้าบนแต่ละช่วงย่อย ถ้าพบว่ามีช่วงย่อยใดที่ปริพันธ์ลู่ออก เราจะสรุปว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบนั้นลู่ออก

ตัวอย่าง 8.3.1 จงพิจารณาว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้า จงหาค่าของปริพันธ์

1. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{4} \frac{1}{(x+2)^{2/3}}\,dx$

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x - e}\,dx$

ทำแบบฝึกหัด 8.3 ในหนังสือแคลคูลัส ๑