1 ลำดับและอนุกรมอนันต์ของจำนวนจริง

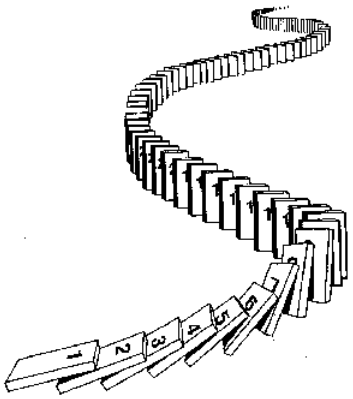
1.1 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction)

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์แบบที่ ๑
สำหรับจำนวนนับ n ให้ $P(n)$ แทนข้อความที่เกี่ยวข้องกับ n ซึ่งมีสมบัติดังต่อไปนี้ ถ้า

1. $P(1)$ เป็นจริง และ
2. สำหรับจำนวนนับ k ใดๆ ถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

แล้ว $P(n)$ เป็นจริง ทุกจำนวนนับ n

ตัวอย่าง 1.1.1 จงพิสูจน์ว่า $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ ทุกจำนวนนับ n



ตัวอย่าง 1.1.2 จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=\frac{n-1}{n}$$

ทุกจำนวนนับ n

ตัวอย่าง 1.1.3 จงพิสูจน์ว่า $\frac{d^n}{dx^n}(xe^x) = (x+n)e^x$ ทุกจำนวนนับ n

เราอาจเปลี่ยนจุดเริ่มต้นจาก $P(1)$ เป็นจริง เป็น $P(m)$ เป็นจริง เมื่อ m เป็นจำนวนนับ และใช้สรุป "$P(n)$ เป็นจริง ทุกจำนวนนับ $n \geq m$"

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์แบบที่ ๒
ให้ m เป็นจำนวนนับและ สำหรับจำนวนนับ $n \geq m$ ให้ $P(n)$ แทนข้อความที่เกี่ยวข้องกับ n ซึ่งมีสมบัติดังต่อไปนี้ ถ้า

1. $P(m)$ เป็นจริง และ
2. สำหรับจำนวนนับ k ใดๆ ที่ $k \geq m$ ถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

แล้ว $P(n)$ เป็นจริง ทุกจำนวนนับ $n \geq m$

ตัวอย่าง 1.1.4 จงพิสูจน์ว่า

$$n! > 2^n$$

ทุกจำนวนนับ $n \geq 4$

ทำแบบฝึกหัด 1.1 ในหนังสือแคลคูลัส ๒

1.2 ลำดับอนันต์

ลำดับ (sequence) ของจำนวนจริง คือฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, \dots\}$ และมีค่าเป็นจำนวนจริง

ตัวอย่างของลำดับ

1. $f(n) = n^2$ ดังนั้น $f(1) = 1, f(2) = 4, f(3) = 9, \dots$
   โดยทั่วไปเราเขียน $a_n = n^2$ และเรียกว่า **พจน์ที่ n หรือ พจน์ทั่วไปของลำดับ**
2. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ ได้ว่า $a_1 = \dfrac{1}{2}, a_2 = \dfrac{2}{3}, a_3 = \dfrac{3}{4}, \dots$

เราเขียนแทนลำดับ $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ ด้วย $\{a_n\}$ หรือ $\{a_n\}_1^\infty$ เช่น

- $\{n^2\}$ แทนลำดับ $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$
- $\left\{\dfrac{(-3)^n}{n!}\right\}$ แทนลำดับ $\left\{-3, \dfrac{9}{2}, -\dfrac{9}{2}, \dfrac{27}{8}, \dots\right\}$

เรากล่าวว่าลำดับ $\{a_n\}$ **ลู่เข้า (converge)** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง L ซึ่ง $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$
และลำดับ $\{a_n\}$ **ลู่ออก (diverge)** ก็ต่อเมื่อ $\{a_n\}$ ไม่เป็นลำดับลู่เข้า

ทฤษฎีบท 1.2.1 *เราได้ว่า*

1. *ถ้า t เป็นจำนวนจริง**บวก** แล้ว* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^t} = 0$ *และ* $\lim\limits_{n\to\infty} n^t = \infty$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ *เมื่อ* $|r| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \infty$ *เมื่อ* $r > 1$ *และ* $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ *ไม่มีค่า เมื่อ* $r \le -1$

เราอาจใช้คุณสมบัติของลิมิตช่วยในการตรวจสอบการลู่เข้าของลำดับ กล่าวคือ

ทฤษฎีบท 1.2.2 *ให้* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, $\lim_{n\to\infty} b_n = M$ *และ* k *เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า*

1. $\lim_{n\to\infty} k = k$ *และ* $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = kL$
2. $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \pm \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = L \pm M$
3. $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = LM$
4. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{L}{M}$
5. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt[m]{L}$
6. *ถ้า* f *เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แล้ว* $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(L)$

ทฤษฎีบท 1.2.3 *[Squeeze Theorem] ให้* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *และ* $\{c_n\}$ *เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่มีจำนวนนับ* m *ซึ่ง*

$$a_n \le c_n \le b_n \quad \text{ทุก } n \ge m \quad \text{และ} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L \in \mathbb{R}$$

จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} c_n = L$

ตัวอย่าง 1.2.1 จงพิจารณาว่า ลำดับต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\left\{\dfrac{n}{2n-1}\right\}$

2. $\left\{\dfrac{n+\sqrt[3]{n^3+4}}{\sqrt{16n^2-5}}\right\}$

3. $\{\ln(2n) - \ln(n+1)\}$

4. $\{\sqrt{n^2 - n + 5} - n\}$

5. $\left\{\dfrac{3^n + e^n}{\pi^n - 2}\right\}$

6. $\left\{\dfrac{\sin n \cos n}{\sqrt[4]{n}}\right\}$

7. $\left\{\dfrac{n!}{n^n}\right\}$

8. $\left\{\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{2n}\right\}$

9. $\left\{\left(\dfrac{\cos^2 n}{3}\right)^n\right\}$

10. $\left\{\dfrac{n!}{2^n}\right\}$ และ $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$

ให้ $\{n_k\}$ เป็นลำดับของจำนวนนับ ซึ่ง $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$
สำหรับลำดับ $\{a_n\}$ ใดๆ ถ้า $b_k = a_{n_k}$ ทุกค่า $k = 1, 2, 3, \dots$ นั่นคือ $\{b_k\}$ เป็นลำดับที่มีพจน์ที่ k เป็นพจน์ที่ n_k ของลำดับ $\{a_n\}$ เราเรียก $\{b_k\}$ ว่า**ลำดับย่อย (subsequence) ของ** $\{a_n\}$ ซึ่งเรามี

ทฤษฎีบท 1.2.4 *ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าและมีลิมิตเป็น L แล้วทุกลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ จะมีลิมิตเป็น L ด้วย*

ดังนั้น จึงได้ว่า

1. ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ มีลำดับย่อยที่ลู่ออก แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก
2. ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ มีลำดับย่อยสองลำดับซึ่งมี**ลิมิตต่างกัน** แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.2 จงแสดงว่า $\{(-1)^n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.3 จงพิจารณาว่าลำดับ $a_n = \begin{cases} \dfrac{n-\sqrt{n+2}}{n} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ \dfrac{\sin n}{n} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$

เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.4 จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้ลู่เข้า หรือ ลู่ออก

$$\left\{\frac{(-1)^n 2n}{2n+1}\right\}, \left\{\frac{(-1)^n}{2n+1}\right\}, \left\{\frac{(-1)^n n}{2n+1}\right\}$$

สังเกตว่า

$\{(-1)^n a_n\}$ ลู่เข้าและมีลิมิตเป็น 0 ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ตัวอย่าง 1.2.5 จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\{(-1)^n \arctan n\}$

2. $\left\{\dfrac{(-1)^n \sin n}{n}\right\}$

ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง เรากล่าวว่า

1. $\{a_n\}$ **มีขอบเขต** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริงบวก M ซึ่ง $|a_n| \leq M$ ทุก $n \in \mathbb{N}$
2. $\{a_n\}$ **เป็นลำดับเพิ่ม** ก็ต่อเมื่อ $a_n < a_{n+1}$ ทุก $n \in \mathbb{N}$
3. $\{a_n\}$ **เป็นลำดับลด** ก็ต่อเมื่อ $a_n > a_{n+1}$ ทุก $n \in \mathbb{N}$
4. $\{a_n\}$ **เป็นลำดับไม่ลด** ก็ต่อเมื่อ $a_n \leq a_{n+1}$ ทุก $n \in \mathbb{N}$
5. $\{a_n\}$ **เป็นลำดับไม่เพิ่ม** ก็ต่อเมื่อ $a_n \geq a_{n+1}$ ทุก $n \in \mathbb{N}$
6. $\{a_n\}$ **เป็นลำดับทางเดียว (monotone sequence)** ก็ต่อเมื่อ $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่ลดหรือลำดับไม่เพิ่ม

ตัวอย่าง 1.2.6 จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับที่มีขอบเขต หรือ เป็นลำดับทางเดียวหรือไม่

1. $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$

2. $\{\sqrt{n!}\}$

3. $\left\{\cos\dfrac{\pi}{2n}\right\}$

ทฤษฎีบท 1.2.5 *1. ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่ลู่เข้าแล้ว $\{a_n\}$ จะมีขอบเขต*

2. ลำดับที่มีขอบเขตอาจเป็นลำดับลู่ออกเช่น $\left\{\frac{(-1)^n n}{n+1}\right\}$

3. ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับทางเดียวที่มีขอบเขต แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.2.7 จงแสดงว่า ลำดับ $\left\{\frac{e^n}{n!}\right\}$ ลู่เข้า

เราอาจสรุปวิธีต่างๆ ที่ใช้ตรวจสอบการลู่เข้าและหาลิมิตของ**ลำดับอนันต์** (ถ้ามี) ดังนี้

1. จัดรูปแล้วใช้ทฤษฎีบท 1.2.1 และ 1.2.2
2. ใช้กฎของโลปิตาล
3. ใช้ทฤษฎีบท 1.2.3 (Squeeze Theorem)
4. ใช้ลำดับย่อยเพื่อแสดงว่าลำดับนั้นลู่ออก
5. ใช้ข้อสังเกต "$\{(-1)^n a_n\}$ ลู่เข้าและมีลิมิตเป็น 0 ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$"
6. ตรวจสอบว่าเป็นลำดับทางเดียวที่มีขอบเขตหรือไม่

ทำแบบฝึกหัด 1.2 ในหนังสือแคลคูลัส ๒

1.3 อนุกรมอนันต์

ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงและ

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \\ &\vdots \end{aligned}$$

เราเรียก $\{s_n\}$ ว่า**ลำดับของผลบวกย่อย (sequence of partial sum) ของ** $\{a_n\}$

ถ้าลำดับ $\{s_n\}$ ลู่เข้าและ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ แล้ว

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = s \quad \text{หรือ} \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i = s$$

และเรียกอนุกรม $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ ว่า**อนุกรมลู่เข้า** และให้ s เป็น**ผลบวกของอนุกรมนี้**

แต่ถ้าลำดับ $\{s_n\}$ ลู่ออก จะกล่าวว่าอนุกรม $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ เป็น**อนุกรมลู่ออก**

ข้อสังเกต 1. ถ้า $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ ลู่เข้า แล้ว $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \right) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$

2. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i \neq \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

3. ถ้า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า แล้ว

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{และ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

ตัวอย่าง **1.3.1** [Telescoping series] จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าอนุกรมลู่เข้าให้หาผลบวกของอนุกรมด้วย

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\big(\text{arcsec}(n+2)-\text{arcsec}(n+1)\big)$

อนุกรมเรขาคณิต (geometric series) คืออนุกรมที่เขียนได้ในรูป

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$$

เมื่อ a และ r เป็นจำนวนจริง

ทฤษฎีบท 1.3.1 *สำหรับอนุกรมเรขาคณิต* $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$ *เราได้ว่า*

1. $s_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\begin{cases}\dfrac{a}{1-r} & \text{เมื่อ } |r|<1\\[2ex] \text{ลู่ออก} & \text{เมื่อ } |r|\geq 1\end{cases}$

ตัวอย่าง 1.3.2 จงหาผลบวก

1. $7 - \frac{35}{9} + \frac{175}{81} - \frac{875}{729} + \cdots$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(-1)^{n+1}}{5^n}$

ตัวอย่าง 1.3.3 ถ้าผลบวกย่อยถึงพจน์ที่ n ของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ มีค่าเป็น $s_n = \frac{n-1}{n+1}$ จงหา a_n และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

สังเกตว่า $a_n = s_n - s_{n-1}$ ทุก $n > 1$

ดังนั้น ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ แล้ว

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - s_{n-1} = s - s = 0$$

ทฤษฎีบท 1.3.2 *[Test for Divergence] ถ้า* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ลู่เข้า แล้ว* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

เพราะฉะนั้น หาก $\lim_{n\to\infty} a_n$ *ไม่มีค่า หรือ* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ *เราจึงสรุปได้ว่า* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ต้องลู่ออก*

ตัวอย่าง 1.3.4 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู้เข้า จงหาค่าของ $\lim_{n\to\infty} \arctan(e^{a_n})$

ตัวอย่าง 1.3.5 จงแสดงว่า Harmonic series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมที่ลู่ออก

หมายเหตุ สังเกตว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ลู่ออก

ดังนั้น ถ้าเรามี $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ เราไม่สามารถสรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.3.6 จงแสดงว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2}{n^2+4}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}\cos\left(\frac{2}{n}\right)$

ทฤษฎีบท 1.3.3 *ให้* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *และ* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ *เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า จะได้ว่า*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\beta\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า

ข้อสังเกต

1. ถ้า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ลู่ออก แล้ว $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ca_n$ ลู่ออก เมื่อ $c\neq 0$
2. ถ้า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ลู่เข้า และ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ ลู่ออก แล้ว $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ ลู่ออก
3. ถ้า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ และ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ ลู่ออก แล้ว $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ อาจจะลู่เข้า หรือ ลู่ออก
   เช่น $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ และ $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}-\frac{1}{n}$ ต่างลู่ออก แต่ $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)=\sum_{i=1}^{\infty}0=0$ ลู่เข้า

ตัวอย่าง **1.3.7** จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าอนุกรมลู่เข้าให้หาผลบวกของอนุกรมด้วย

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-n}+\frac{1}{n}\right)$

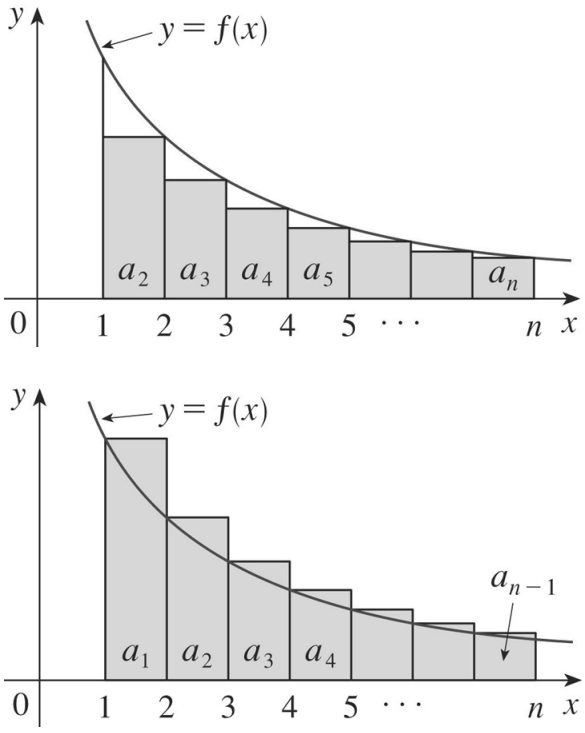
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(-\frac{2}{5}\right)^{n}+\frac{n}{(n+1)!}\right)$

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

ทำแบบฝึกหัด 1.4.1 ในหนังสือแคลคูลัส ๒

1.4 การทดสอบแบบปริพันธ์

สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง มีค่าเป็นบวก และไม่เพิ่มบนช่วง $[1,\infty)$ และ ให้ $a_n = f(n)$ ทุกจำนวนนับ n พิจารณา



จะได้ว่า

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \le \int_1^{\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

ดังนั้น

1. $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ ลู่เข้า $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า
2. $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ ลู่ออก $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก

นั่นคือ

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ ลู่เข้า } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ลู่เข้า}$$

เรียกการทดสอบนี้ว่า**การทดสอบแบบปริพันธ์ (Integral Test)**
ซึ่งการทดสอบนี้ใช้ได้เฉพาะอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ที่ $a_n \ge 0$, a_n มีค่าลดลงเรื่อยๆ และ a_n อยู่ในรูปของฟังก์ชันที่สามารถหาปริพันธ์ได้

ตัวอย่าง 1.4.1 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้า หรือลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(\sqrt{n})}{n}$

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

เราสามารถใช้การทดสอบแบบปริพันธ์ตรวจสอบการลู่เข้าของอนุกรมในรูป $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$
ซึ่งเรียกว่า**อนุกรมพี** (p-**series**) โดยเราได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{ลู่เข้า} & \text{เมื่อ } p > 1, \\ \text{ลู่ออก} & \text{เมื่อ } p \leq 1 \end{cases}$$

ทำแบบฝึกหัด 1.4.2 ในหนังสือแคลคูลัส ๒

1.5 การทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบ

การทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบ (Comparison Test)

ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมของจำนวนจริง
สมมติว่ามีจำนวนนับ n_0 ซึ่ง $0 \leq a_n \leq b_n$ ทุก $n \geq n_0$ จะได้ว่า

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่ออก

ตัวอย่าง 1.5.1 จงทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมต่อไปนี้

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^3}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 1}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)^{-2\ln n}$

อนุกรมบางอนุกรม**ไม่**สามารถทดสอบโดยใช้การทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบได้ เช่น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - 1}$ เราจะทดสอบอนุกรมนี้ด้วย

การทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบด้วยลิมิต (Limit Comparison Test)

สมมติว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมซึ่ง $a_n \geq 0$ และ $b_n > 0$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} c > 0 \implies \text{ลู่เข้าทั้งคู่ หรือ ลู่ออกทั้งคู่} \\ 0 \text{ และ } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ ลู่เข้า} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ลู่เข้า} \\ \infty \text{ และ } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ ลู่ออก} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ลู่ออก} \end{cases}$$

ตัวอย่าง 1.5.2 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - 1}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n^2-n+1}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{n}-2}{\sqrt{n^5+3n^2-1}}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{5^n(n^2+1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n\ln n}{n^2+4}$

ทำแบบฝึกหัด 1.4.3 ในหนังสือแคลคูลัส ๒

1.6 อนุกรมสลับ

ถ้า $b_n > 0$ ทุกจำนวนนับ n เราเรียกอนุกรมในรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots \qquad \text{หรือ} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}b_n = -b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - \cdots$$

ว่า**อนุกรมสลับ (Alternating Series)** เช่น

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

การทดสอบอนุกรมสลับ (Alternating Series Test)

ถ้าอนุกรมสลับ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n, b_n > 0$ ทุกจำนวนนับ n สอดคล้อง

1. มีจำนวนนับ n_0 ซึ่ง $b_{n+1} < b_n$ ทุก $n \geq n_0$
   (นั่นคือ $\{b_n\}$ เป็นลำดับลดลงเรื่อยๆ เมื่อ $n \geq n_0$)

2. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

จะได้ว่าอนุกรมสลับ**ลู่เข้า**

ถ้า $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty}(-1)^n b_n$ หาค่าไม่ได้ เพราะฉะนั้นอนุกรมสลับ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ จะ**ลู่ออก**

ตัวอย่าง 1.6.1 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ ลู่เข้า หรือ ลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{\sqrt{2n-1}}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan(1+e^n)$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$

ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ และ ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

เราเรียก $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ว่า**ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ (absolutely convergence)** ถ้า

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots \quad \text{ลู่เข้า}$$

โดยเราได้ว่า ถ้า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ลู่เข้า แล้ว $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.6.2 จงตรวจสอบการลู่เข้าของ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

เราทราบมาแล้วว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ลู่เข้า แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ลู่ออก

ดังนั้น อนุกรมที่ลู่เข้าไม่จำเป็นที่จะลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

เราเรียกอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ว่า**ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข (conditionally convergence)** ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ลู่ออก

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$ ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

ตัวอย่าง 1.6.3 จงตรวจสอบว่าอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^3+4}$$

ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข หรือ ลู่ออก

ทำแบบฝึกหัด 1.4.4 ในหนังสือแคลคูลัส ๒

1.7 การทดสอบโดยใช้อัตราส่วนและโดยใช้การถอดกรณฑ์

การทดสอบโดยใช้อัตราส่วน (Ratio Test)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} L<1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์} \\ \infty \text{ หรือ } L>1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ลู่ออก} \\ \mathbf{1} \Longrightarrow \text{สรุปผลไม่ได้} \end{cases}$$

เช่น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข และ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ ใช้การทดสอบนี้ไม่ได้

ตัวอย่าง 1.7.1 จงทดสอบการลู่เข้าของ

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{5^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

การทดสอบโดยใช้การถอดกรณฑ์ (Root Test)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\begin{cases} L<1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์} \\ \infty \text{ หรือ } L>1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ลู่ออก} \\ \mathbf{1} \Longrightarrow \text{สรุปผลไม่ได้} \end{cases}$$

เช่น $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ลู่ออก เพราะ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ลู่เข้า ซึ่งการตรวจสอบอนุกรมทั้งสองนี้ใช้ root test ไม่ได้

ตัวอย่าง 1.7.2 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+\ln n}{2n+3}\right)^n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(\arctan n)^n}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+(-1)^n}} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \cdots$

ทำแบบฝึกหัด 1.4.5 และ แบบฝึกหัดระคน ในหนังสือแคลคูลัส ๒

2 อนุกรมกำลัง

เรียนเฉพาะหัวข้อ 2.3 และ 2.4 ในหนังสือแคลคูลัส ๒

2.1 อนุกรมเทย์เลอร์

อนุกรมกำลัง (power series) ใน $x-a$ คืออนุกรมที่อยู่ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$$

เมื่อ $a, c_0, c_1, c_2, \dots$ เป็นจำนวนจริง และเรียก a ว่า**ศูนย์กลาง (center) ของอนุกรมกำลัง**

สำหรับแต่ละ x เราสามารถตรวจสอบการลู่เข้าหรือลู่ออกได้จากบทก่อนหน้านี้

ตัวอย่าง 2.1.1 จงหาค่าของ x ที่ทำให้อนุกรมกำลังต่อไปนี้ลู่เข้า

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

3. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-2}{3}\right)^n$

ทฤษฎีบท 2.1.1 *การลู่เข้าของอนุกรมกำลัง* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *เป็นไปตามกรณีใดกรณีหนึ่งต่อไปนี้*

1. *ลู่เข้า เมื่อ* $x=a$ *เท่านั้น*
2. *ลู่เข้า ทุกค่า* $x\in\mathbb{R}$
3. *มีจำนวนจริง* $r>0$ *ที่ทำให้อนุกรมลู่เข้า ถ้า* $|x-a|<r$ *และ ลู่ออก ถ้า* $|x-a|>r$ *แต่ที่จุด* $|x-a|=r$ *อนุกรมอาจลู่เข้าหรือลู่ออกก็ได้*

เราเรียก r *ว่า* ***รัศมีแห่งการลู่เข้า (radius of convergence)***
โดยเพื่อความสะดวก ในกรณีที่ 1 เราให้ $r=0$ *ในกรณีที่ 2 เราให้* $r=\infty$
เราเรียก

$$\left\{x\in\mathbb{R}:\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n \text{ ลู่เข้า}\right\}$$

*ว่า****ช่วงแห่งการลู่เข้า (interval of convergence)***

สมมติว่า

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+\cdots$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
f'(x)&=c_1+2c_2(x-a)+3c_3(x-a)^2+\cdots\\
f''(x)&=2c_2+2\cdot 3c_3(x-a)+3\cdot 4c_4(x-a)^2+\cdots\\
f'''(x)&=2\cdot 3c_3+2\cdot 3\cdot 4c_4(x-a)+\cdots\\
&\vdots\\
f^{(n)}(x)&=n!c_n+[\text{ผลบวกของเทอมที่มี }(x-a)\text{ เป็นตัวประกอบ}]\\
&\vdots
\end{aligned}$$

แทน $x=a$ เราได้

$$f(a)=c_0,\ f'(a)=c_1,\ f''(a)=2!c_2,\ f'''(a)=3!c_3,\ \ldots,\ f^{(n)}(a)=n!c_n,\ \ldots$$

ทำให้ได้ว่า

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\qquad \text{สำหรับทุก } n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\\
&=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots
\end{aligned}$$

อนุกรมในรูปแบบนี้เรียกว่า**อนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด** a **(Taylor's series)** และเมื่อ $a=0$ เราเรียกอนุกรมนี้ว่า**อนุกรมแมคลอริน (Maclaurin's series)**

ตัวอย่าง 2.1.2 จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชันรอบจุด a ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $f(x) = e^x$ รอบจุด $a = 0$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ รอบจุด $a = 1$

นอกจากนี้ เราสามารถหาอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชันอื่นได้เช่น

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{สำหรับทุก } x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{สำหรับทุก } x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{สำหรับทุก } x \in \mathbb{R}$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{สำหรับทุก } |x| < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{สำหรับทุก } |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad \text{สำหรับทุก } |x| < 1$$

ตัวอย่าง 2.1.3 จงหาฟังก์ชันผลบวกของ $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{(-1)^n n x^{6n}}{(2n)!}$

ตัวอย่าง 2.1.4 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{n-1}x^{n+1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(n-\frac{1}{3}\right)x^n$

ตัวอย่าง 2.1.5 จงแสดงว่า $e = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{2!} + \frac{9}{3!} + \cdots + \frac{n^2}{n!} + \cdots\right)$

ทำแบบฝึกหัด 2.4 ในหนังสือแคลคูลัส ๒

2.2 การประมาณค่าโดยใช้พหุนามเทย์เลอร์

พหุนามเทย์เลอร์ดีกรี n ของ f รอบจุด a (nth-degree Taylor polynomial) คือ

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad \text{เมื่อ } n \geq 0$$

เช่น $f(x) = e^x$; $a = 0$ เราได้ว่า

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = 1 + x, \qquad P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \qquad P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + +\frac{x^3}{6}, \qquad \ldots$$

ซึ่งถ้า $a = 0$ เราอาจเรียกว่า**พหุนามแมคลอริน** สังเกตว่า

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

ทฤษฎีบท 2.2.1 (เทย์เลอร์) *ถ้า $f, f', f'', \ldots, f^{(n)}$ มีค่าที่จุด a แล้วจะมี $r > 0$ ซึ่ง*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \\ &= P_n(x) + R_n(x) \end{aligned}$$

*สำหรับ x ซึ่ง $|x-a| < r$ และ c อยู่ระหว่าง a และ x เราเรียก $R_n(x)$ ว่า**เศษเหลือ (remainder)** เรียกสูตรของ $f(x)$ ที่ได้นี้ว่า**สูตรของเทย์เลอร์พร้อมเศษเหลือดีกรี n ของ f ที่ a***

ดังนั้นเราได้ว่า

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$$

ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$

ตัวอย่าง 2.2.1 1. ให้ $f(x) = x^{2/3}$
จงประมาณค่าของ $f(1.1)$ โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 ของ f รอบจุด $x = 1$
พร้อมทั้งหาขอบเขตของความผิดพลาดในการประมาณนี้

2. ให้ $f(x) = \ln(x + 1)$
จงประมาณค่าของ $\ln(4/3)$ โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 ของ f รอบจุด $x = 0$

ข้อสังเกต โดยทั่วไป ถ้าเศษเหลือ

$$|R_n(x)| \leq 0.\underbrace{00\ldots00}_{r+1 \text{ ตัว}}5$$

จะได้ว่าค่าประมาณที่หาได้มีความถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ r เป็นอย่างน้อย

ตัวอย่าง 2.2.2 กำหนดให้ $f(x) = \sin x$

1. จงประมาณค่าของ $f\left(\frac{1}{2}\right)$ โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ให้มีความถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่สอง

2. จงประมาณค่าของ

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$$

ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 5 ของ $f(x)$ รอบจุด 0 พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาดในการประมาณนี้

ตัวอย่าง 2.2.3 ในการประมาณค่าของ $\int_0^1 \ln(1+x^4)\,dx$ โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน $f(x)=\ln(1+x)$ รอบจุด $a=0$ ถ้าสูตรของเทย์เลอร์พร้อมเศษเหลือของ f เป็นดังนี้

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}(n+1)}$$

จงแสดงวิธีการหาดีกรี n ที่ทำให้การประมาณนี้มีความผิดพลาดไม่เกิน $\frac{1}{150}$

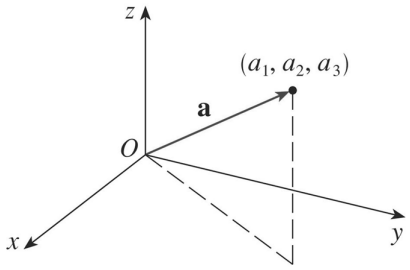
ตัวอย่าง 2.2.4 กำหนดให้ $f(x) = \sin x$
จงประมาณค่าของ $\int_{-3}^{1} \sin\sqrt{x+3}\,dx$ โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 5 ของ f รอบจุด 0
พร้อมทั้งหาขอบเขตของความผิดพลาดในการประมาณนี้ (ตอบทศนิยม 3 ตำแหน่ง)

ทำแบบฝึกหัด 2.3 ในหนังสือแคลคูลัส ๒

3 ปริภูมิสามมิติ

3.1 ทบทวนเวกเตอร์ในสามมิติ

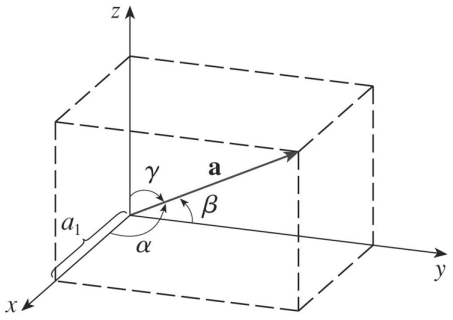
ให้ $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$



จะได้ว่า

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

ให้ $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$ เป็นเวกเตอร์ที่ทำมุม α, β, γ กับแกน X, แกน Y และแกน Z ทางด้านบวกตามลำดับโดยที่ $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$ เรียกมุม α, β, γ ว่า**มุมแสดงทิศทางของ a (direction angle)** และเรียก $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ ว่า**โคไซน์แสดงทิศทางของ a (direction cosine)**



ซึ่งจะเห็นได้ว่า

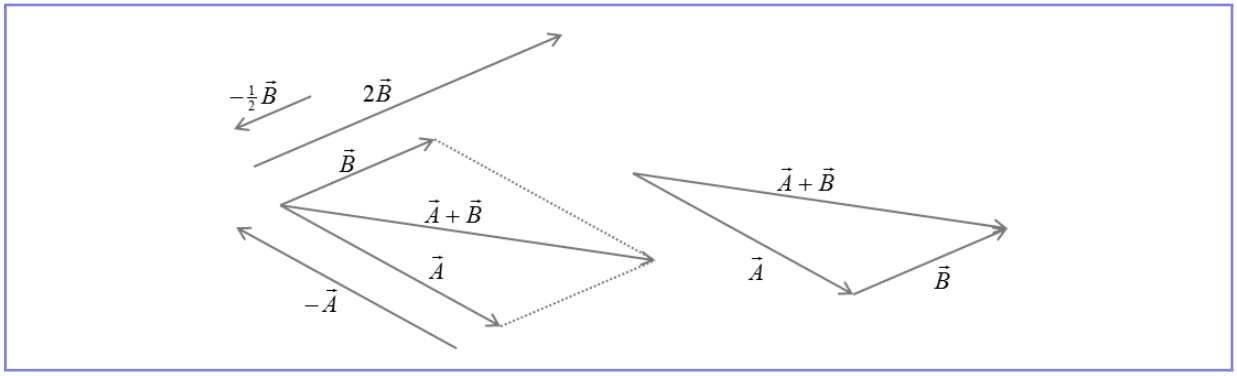
$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|}, \qquad \cos\beta = \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|}, \qquad \cos\gamma = \frac{a_3}{\|\mathbf{a}\|}$$

ดังนั้น $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

ตัวอย่าง 3.1.1 กำหนดให้ $\mathbf{a} = (\sqrt{2}, 1, -1)$ จงหาขนาดและมุมแสดงทิศทางของ $\mathbf{a}$

ให้ $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ และ $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ และ k เป็นจำนวนจริง (สเกลาร์) ใดๆ เรานิยาม

1. $\vec{A} = \vec{B}$ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = b_1$ และ $a_2 = b_2$ และ $a_3 = b_3$
2. $\vec{A} + \vec{B} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ และ $k\vec{A} = (ka_1, ka_2, ka_3)$



ให้ $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ โดยที่ $\vec{A} \neq \vec{0}$ จะได้ว่า

$$\vec{u} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

เป็น**เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector) ที่มีทิศทางเดียวกับ** $\vec{A}$

สำหรับจุด $A(a_1, a_2, a_3)$ และ $B(b_1, b_2, b_3)$ ใน $\mathbb{R}^3$ เรากำหนด

$$\overrightarrow{AB} = (b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

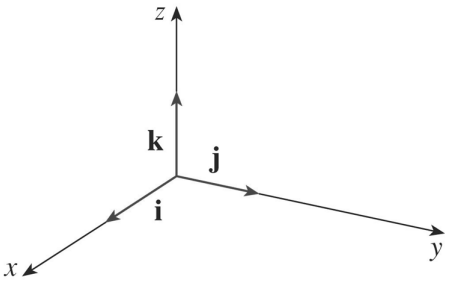
และเราให้ $\vec{A} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ เมื่อ O เป็นจุดกำเนิด

ตัวอย่าง 3.1.2 ให้ $A(2, 3, -1)$ และ $B(0, 1, -2)$ เป็นจุดใน $\mathbb{R}^3$ จงหา

1. เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ $\overrightarrow{AB}$
2. เวกเตอร์สามหน่วยในทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ $\vec{B}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่สำคัญ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกนพิกัด ซึ่งคือ

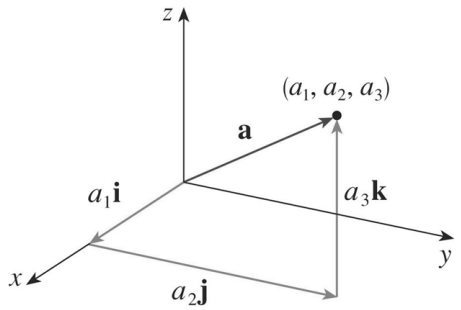
$$\vec{i} = (1,0,0), \qquad \vec{j} = (0,1,0), \qquad \vec{k} = (0,0,1)$$



ซึ่งได้โดยง่ายว่า

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

ดังรูป



ให้ $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ และ $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$

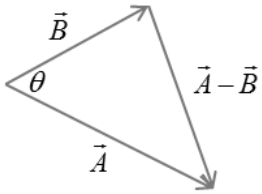
เรานิยาม**ผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product or dot product) ของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$** คือ จำนวนจริง

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

และเราได้ว่า

1. $\vec{A} \cdot \vec{A} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \|\vec{A}\|^2 \geq 0$
2. $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
3. $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

พิจารณาผลต่าง $\vec{A}-\vec{B}$ ดังรูป



โดยกฎของโคไซน์ได้ว่า

$$\|\vec{A}-\vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 - 2\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos\theta \tag{3.1.1}$$

แต่

$$\|\vec{A}-\vec{B}\|^2 = (\vec{A}-\vec{B})\cdot(\vec{A}-\vec{B}) = \vec{A}\cdot\vec{A} - 2\vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{B} = \|\vec{A}\|^2 - 2\vec{A}\cdot\vec{B} + \|\vec{B}\|^2 \tag{3.1.2}$$

จากสมการ (3.1.1) และ (3.1.2) จะได้

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos\theta \qquad \text{หรือ} \qquad \cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|}$$

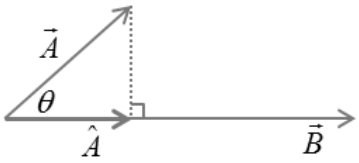
เมื่อ θ คือมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$

เพราะฉะนั้น

$$\vec{A}\perp\vec{B} \iff \theta = \frac{\pi}{2} \iff \vec{A}\cdot\vec{B} = 0$$

ตัวอย่าง 3.1.3 ให้ $\vec{A}=(2,-1,1)$ และ $\vec{B}=(1,1,2)$ จงหามุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$

ต่อมา เราพิจารณาภาพฉาย (projection) ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ บนเวกเตอร์ $\vec{B}$ ดังรูป



เรียกเวกเตอร์ $\hat{A}$ ว่า**เวกเตอร์ภาพฉาย (projection vector) ของ $\vec{A}$ บน $\vec{B}$**

สังเกตว่า $\hat{A}$ มีทิศทางเดียวกับ B และ $(\vec{A}-\hat{A})\perp\vec{B}$ นั่นคือ

$$\hat{A}=\alpha\vec{B} \qquad \text{และ} \qquad (\vec{A}-\hat{A})\cdot\vec{B}=0$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}(\vec{A}-\alpha\vec{B})\cdot\vec{B}&=0\\ \vec{A}\cdot\vec{B}&=\alpha\vec{B}\cdot\vec{B}\\ \alpha&=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{B}\|^2}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\hat{A}=\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{B}\|^2}\right)\vec{B}$$

และเรามี

$$\hat{A}=\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{B}\|^2}\right)\vec{B}=\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{B}\|}\right)\frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|}=\underbrace{\|\vec{A}\|\cos\theta}\left(\frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|}\right)$$

เรียก $\dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{B}\|}=\|\vec{A}\|\cos\theta$ ว่า**ภาพฉายสเกลาร์ของ $\vec{A}$ บน $\vec{B}$ (scalar projection)**

ตัวอย่าง 3.1.4 ให้ $\vec{A}=(3,-1,2)$ และ $\vec{B}=(2,1,2)$ จงหาเวกเตอร์ภาพฉายและภาพฉายสเกลาร์ของ $\vec{A}$ บน $\vec{B}$

ให้ $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ และ $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (cross product) ของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$, $\vec{A} \times \vec{B}$ นิยามโดย

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

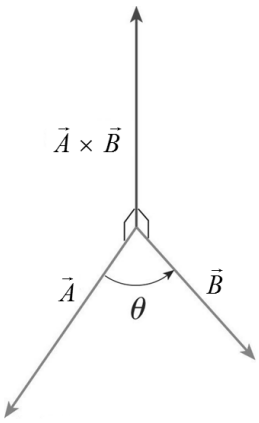
ซึ่งโดยสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์เราจะได้ว่า

1. $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$ และ $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$
2. $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0} \iff \vec{A} = \alpha\vec{B}$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริง $\iff \vec{A} // \vec{B}$

และเราแสดงได้ไม่ยากว่า

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0 = \vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

ดังนั้น $\vec{A} \perp (\vec{A} \times \vec{B})$ และ $\vec{B} \perp (\vec{A} \times \vec{B})$



โดย Lagrange's identity ที่กล่าวว่า

$$\|\vec{A} \times \vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 \|\vec{B}\|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$$

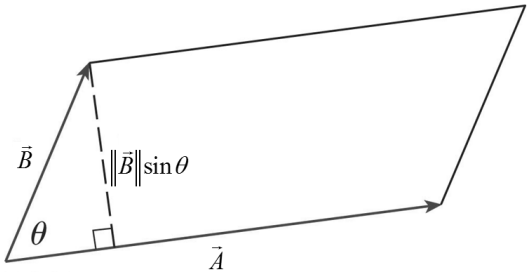
จะได้

$$\begin{aligned} \|\vec{A} \times \vec{B}\|^2 &= \|\vec{A}\|^2 \|\vec{B}\|^2 - \|\vec{A}\|^2 \|\vec{B}\|^2 \cos^2\theta \\ &= \|\vec{A}\|^2 \|\vec{B}\|^2 (1 - \cos^2\theta) \\ &= \|\vec{A}\|^2 \|\vec{B}\|^2 \sin^2\theta \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \sin\theta$$

ต่อมาสังเกตว่า



พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็นด้านประชิด $= h\|\vec{A}\|$

$$= (\|\vec{B}\|\sin\theta)\|\vec{A}\|$$
$$= \|\vec{A}\times\vec{B}\|$$

ตัวอย่าง 3.1.5 ให้ $\vec{A}=(1,2,-2)$ และ $\vec{B}=(3,0,1)$ จงหา $\vec{A}\times\vec{B}$

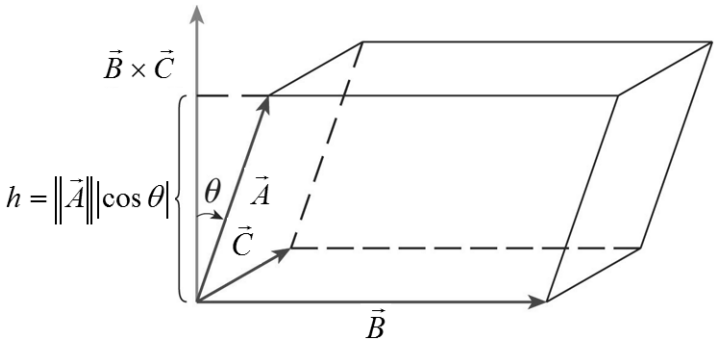
ตัวอย่าง 3.1.6 จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มี $A(2,1,-1), B(3,0,1)$ และ $C(1,3,-2)$ เป็นจุดยอดมุม

ให้ $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ และ $\vec{C} = (c_1, c_2, c_3)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ เราได้ว่า

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = [\vec{A}\vec{B}\vec{C}]$$

เรียกว่า**ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์ (triple scalar product)**

สังเกตว่า



ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\vec{A}, \vec{B}$ และ $\vec{C}$ เป็นด้านประชิด

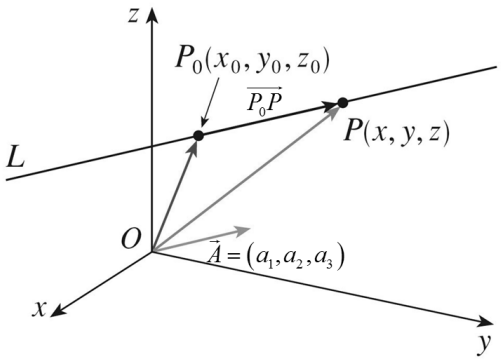
$$\begin{aligned} &= \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง} \\ &= \|\vec{B} \times \vec{C}\| \|\vec{A}\| |\cos\theta| \\ &= |\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})| = |[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]| \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.1.7 ให้ $\vec{A} = \vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{B} = \vec{i} - \vec{k}$ และ $\vec{C} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ จงหาปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\vec{A}, \vec{B}$ และ $\vec{C}$ เป็นด้านประชิด

ทำแบบฝึกหัด 3.1, 3.2 ในหนังสือแคลคูลัส ๒

3.2 เส้นตรงใน $\mathbb{R}^3$

ให้ A เป็นจุดใน $\mathbb{R}^3$ เราเขียน $\vec{A}$ แทนเวกเตอร์ $\overrightarrow{OA}$



พิจารณาเส้นตรง L ใน $\mathbb{R}^3$ ที่ขนานกับ $\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ และผ่านจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ และให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดใดๆ บน L จะได้ว่า

$$\overrightarrow{P_0P} // \vec{A} \quad \text{นั่นคือ} \quad \overrightarrow{P_0P} = t\vec{A}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\vec{P} - \vec{P_0} = t\vec{A}$$

ดังนั้น

$$\vec{P} = \vec{P_0} + t\vec{A} \quad \text{หรือ} \quad (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a_1, a_2, a_3) \quad \text{เมื่อ } t \in \mathbb{R} \tag{3.2.1}$$

เรียกว่า **สมการเวกเตอร์ (vector equation)** หรือ

$$x = x_0 + ta_1, \qquad y = y_0 + ta_2, \qquad z = z_0 + ta_3 \quad \text{เมื่อ } t \in \mathbb{R} \tag{3.2.2}$$

เรียกว่า **สมการอิงตัวแปรเสริม (parametric equations)** ซึ่งเราได้ว่า

$$t = \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \quad \text{เมื่อ } a_1, a_2, a_3 \neq 0 \tag{3.2.3}$$

เรียกว่า **สมการสมมาตร (symmetric equations)** ในกรณีที่มี a_1, a_2 หรือ a_3 เป็นศูนย์ เช่น $a_1 = 0$ เราเขียนสมการสมมาตรเป็น

$$x = x_0, \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

สรุป ถ้าต้องการหาสมการของเส้นตรง L ใน $\mathbb{R}^3$ เราต้องทราบ

1. จุดที่ L ผ่าน และ
2. เวกเตอร์ $\vec{A}$ ซึ่งเรียกว่า **เวกเตอร์แสดงทิศทาง (direction vector)**

ตัวอย่าง 3.2.1 จงหาสมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริม และ สมการสมมาตรของเส้นตรงซึ่ง

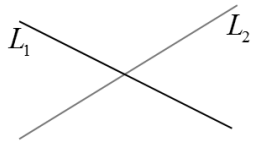
1. ผ่านจุด $(-1,0,2)$ และขนานกับ $\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$

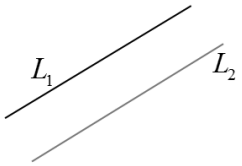
2. ผ่านจุด $(1,-2,3)$ และ $(0,1,4)$

ตัวอย่าง 3.2.2 จงพิจารณาว่าจุด $A(2,1,0), B(2,0,3)$ และ $C = (1,2,-1)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

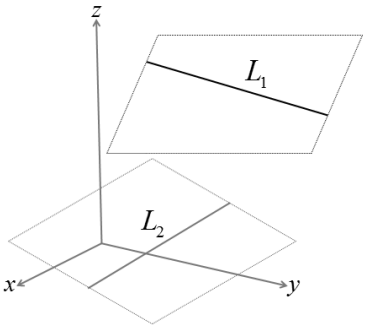
เส้นตรง 2 เส้นใน $\mathbb{R}^3$ มีความสัมพันธ์กันได้ 3 แบบ กล่าวคือ

(ก) ตัดกันที่จุดเดียว (ข) ขนานกัน ($\Longleftrightarrow \vec{A}_1 // \vec{A}_2$)





(ค) เป็นเส้นไข้วต่างระนาบ (skew line) ($\Longleftrightarrow$ ไม่ตัดกัน และ ไม่ขนานกัน)

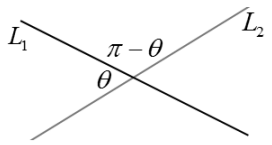


ตัวอย่าง 3.2.3 จงพิจารณาว่าเส้นตรง L_1 และ L_2 ต่อไปนี้ตัดกันหรือไม่ ถ้าตัดกันจงหาจุดตัด

1. $L_1 : x = 11 + 3t, \quad y = -3 - t, \quad z = 4 - 3t$ และ
   $L_2 : x = 6 - 2s, \quad y = -2 + s, \quad z = -15 + 7s$

2. $L_1 : \dfrac{x+1}{3} = 2 - y = \dfrac{z}{4}$ และ $L_2 : \dfrac{1-x}{5} = y - 2 = \dfrac{1-z}{5}$

เรานิยาม **มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น** ให้เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรง สังเกตว่ามุมระหว่างเส้นตรงมีได้ 2 มุม คือ θ และ $\pi - \theta$ ดังรูป



และ

$$\theta = \arccos \frac{\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2}{\|\vec{A}_1\|\|\vec{A}_2\|}$$

เมื่อ $\vec{A}_1$ และ $\vec{A}_2$ คือเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรง L_1 และ L_2 ตามลำดับ

ตัวอย่าง 3.2.4 จงหามุมระหว่างเส้นตรง L_1 และ L_2 เมื่อ

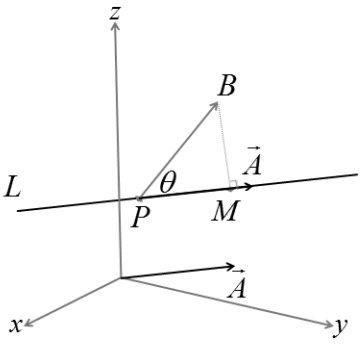
$$L_1 : x - 3 = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{2} \quad \text{และ} \quad L_2 : \frac{x}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{1-z}{5}$$

ตัวอย่าง 3.2.5 จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $B(1,2,-1)$ ซึ่งตัดและตั้งฉากกับเส้นตรง

$$\frac{x-5}{3} = y = \frac{z-1}{2}$$

ระยะระหว่างจุดกับเส้นตรงใน $\mathbb{R}^3$

พิจารณาจุด B นอกเส้นตรง L และ ให้ P_0 เป็นจุดบนเส้นตรง L ดังรูป



เรียก M ว่า **จุดเชิงตั้งฉากของ** B **บนเส้นตรง** L และ
เรียก $|MB|$ ว่า **ระยะทางจาก** B **ไปยัง** L

สังเกตว่า $\overrightarrow{P_0M}$ คือเวกเตอร์ภาพฉายของ $\overrightarrow{P_0B}$ บน $\vec{A}$
ดังนั้น

$$\overrightarrow{P_0M} = \widehat{P_0B} = \left[\frac{\overrightarrow{P_0B}\cdot\vec{A}}{\|\vec{A}\|}\right]\frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} \tag{3.2.4}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\vec{M} - \vec{P}_0 = \left[\frac{\overrightarrow{P_0B}\cdot\vec{A}}{\|\vec{A}\|}\right]\frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

เพราะฉะนั้น

$$\vec{M} = \vec{P}_0 + \left[\frac{\overrightarrow{P_0B}\cdot\vec{A}}{\|\vec{A}\|}\right]\frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

จากสมการ (3.2.4) เรายังได้อีกว่า

$$\|\overrightarrow{P_0M}\| = \|\overrightarrow{P_0B}\||\cos\theta|$$

โดยทฤษฎีบทปิทาโกรัสบนรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก P_0MB จะได้

$$|MB| = \|\overrightarrow{P_0B}\|\sin\theta = \|\overrightarrow{P_0B}\|\sin\theta\frac{\|\vec{A}\|}{\|\vec{A}\|}$$

ดังนั้น

$$|MB| = \frac{\|\overrightarrow{P_0B}\times\vec{A}\|}{\|\vec{A}\|}$$

หมายเหตุ ในกรณีที่ทราบพิกัดจุด M แล้ว เราอาจหา $|\overrightarrow{MB}|$ ได้โดยตรงโดยไม่จำเป็นต้องใช้สูตรนี้

ตัวอย่าง 3.2.6 จงหาจุดเชิงตั้งฉากของจุด $B(1,2,-4)$ บนเส้นตรง

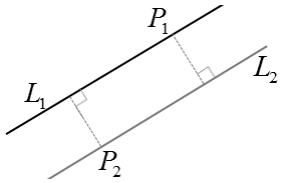
$$x = 2t - 2, \qquad y = -4t - 7, \qquad z = 5t + 8$$

พร้อมทั้งหาระยะทางจากจุด B ไปยังเส้นตรงนี้

ระยะระหว่างเส้นตรงสองเส้นใน $\mathbb{R}^3$

ระยะระหว่างเส้นตรงสองเส้น คือระยะที่สั้นสุดระหว่างเส้นตรงสองเส้นนั้น ซึ่งเราจะพิจารณาเป็น 2 กรณี กล่าวคือ

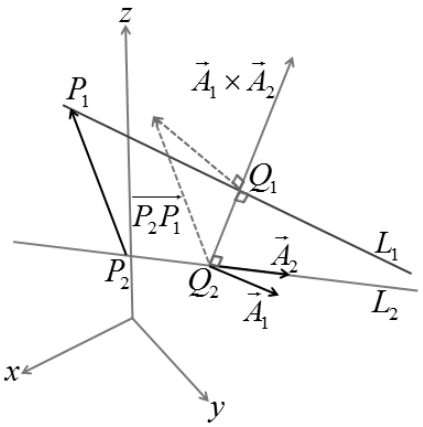
1. L_1 ขนานกับ L_2



ระยะระหว่าง L_1 และ L_2 คือระยะระหว่างจุด P_1 ไปยัง L_2 หรือ ระยะระหว่างจุด P_2 ไปยัง L_1 นั่นคือ

$$\text{ระยะระหว่าง } L_1 \text{ และ } L_2 = \frac{\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{A}_2\|}{\|\vec{A}_2\|} = \frac{\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{A}_1\|}{\|\vec{A}_1\|} \qquad \text{เมื่อ } L_1 \text{ ขนานกับ } L_2$$

2. L_1 **ไม่**ขนานกับ L_2



จากรูปเราได้ว่า $\overrightarrow{Q_2Q_1}$ คือเวกเตอร์ภาพฉายของ $\overrightarrow{P_2P_1}$ บน $\vec{A}_1 \times \vec{A}_2$ นั่นคือ

$$\overrightarrow{Q_2Q_1} = \left[\frac{\overrightarrow{P_2P_1} \cdot (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)}{\|\vec{A}_1 \times \vec{A}_2\|}\right] \frac{\vec{A}_1 \times \vec{A}_2}{\|\vec{A}_1 \times \vec{A}_2\|}$$

เพราะฉะนั้น

$$\text{ระยะระหว่าง } L_1 \text{ และ } L_2 = \frac{\overrightarrow{P_2P_1} \cdot (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)}{\|\vec{A}_1 \times \vec{A}_2\|} \qquad \text{เมื่อ } L_1 \text{ ไม่ขนานกับ } L_2$$

ตัวอย่าง 3.2.7 จงหาระยะระหว่าง L_1 และ L_2 เมื่อ

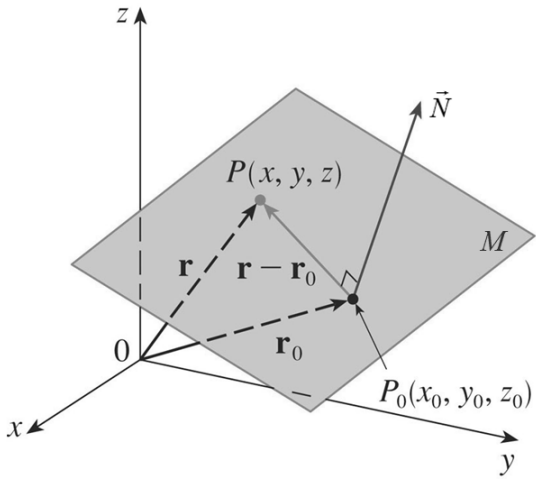
1. $L_1 : x = 1 + 3t, \quad y = -5 - 2t, \quad z = 2 + 6t$ และ
   $L_2 : x = 2 - 6t, \quad y = -1 + 4t, \quad z = 4 - 12t$

2. $L_1 : x - 1 = \dfrac{y-2}{\sqrt{2}} = -z$ และ $L_2 : x = 2, \ -\dfrac{y}{\sqrt{2}} = z + 3\sqrt{2}$

ทำแบบฝึกหัด 3.3.1–3.3.7 ในหนังสือแคลคูลัส ๒

3.3 ระนาบใน $\mathbb{R}^3$

ให้ M เป็นระนาบ (plane) ใน $\mathbb{R}^3$ ซึ่งตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{N} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ และผ่านจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$



จะได้ว่า $\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{N}$ นั่นคือ $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{N} = 0$
ดังนั้น เรามี

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$$

เรียกว่า**สมการเวกเตอร์(vector equation) ของระนาบ** M หรือ

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$

และเรียกสมการของระนาบในรูปแบบ

$$ax + by + cz = d$$

ว่า**สมการคาร์ทีเซียน (Cartesian equation) ของระนาบ**

สรุป ถ้าต้องการหาสมการของระนาบ M ใน $\mathbb{R}^3$ เราต้องทราบ

1. จุดที่ M ผ่าน และ
2. เวกเตอร์ $\vec{N}$ ที่ตั้งฉากกับระนาบ M ซึ่งเรียกว่า**เวกเตอร์แนวฉาก (normal vector)**

ตัวอย่าง 3.3.1 จงหาสมการของระนาบซึ่ง

1. ผ่านจุด $P_0(1,2,-4)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $2-x=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{-3}$

2. ขนานกับระนาบ $2y+z+3=0$ และผ่านจุด $(1,4,-3)$

3. ผ่านจุด $P_0(2,1,3), P_1(4,2,-1)$ และ $P_2(6,2,2)$

การเขียนกราฟของระนาบ

ตัวอย่าง 3.3.2 จงเขียนกราฟของระนาบ

1. $3x - y + 3z = 3$

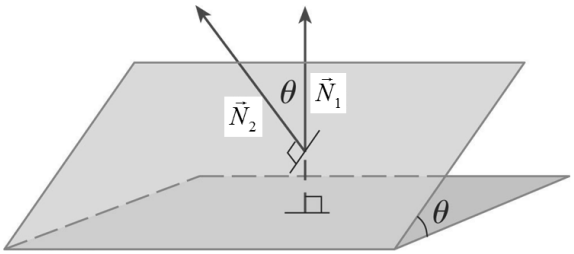
2. $x - 2y + z = 0$

3. $2x + y = 2$

ระนาบ 2 ระนาบใน $\mathbb{R}^3$ ที่มีเวกเตอร์แนวฉากเป็น $\vec{N}_1$ และ $\vec{N}_2$ จะ

(ก) ขนานกัน ก็ต่อเมื่อ $\vec{N}_1$ ขนานกับ $\vec{N}_2$ หรือ

(ข) ตัดกัน โดยมีรอยตัดเป็นเส้นตรง



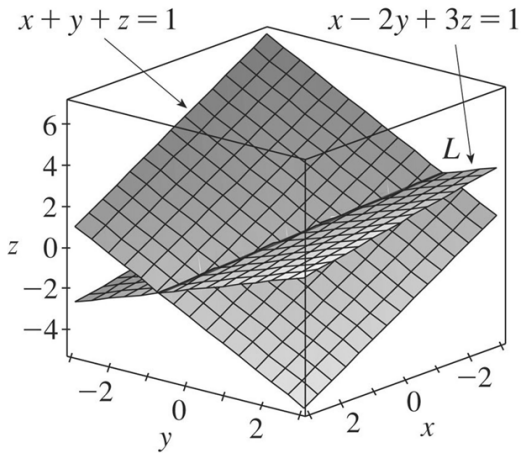
เราเรียกมุมระหว่างเวกเตอร์แนวฉากของ 2 ระนาบว่า**มุมระหว่างระนาบ** นั่นคือ

$$\theta = \arccos \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\|\vec{N}_1\|\|\vec{N}_2\|}$$

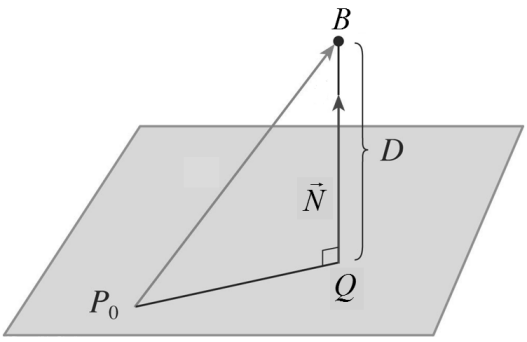
ตัวอย่าง 3.3.3 จงหามุมระหว่างระนาบ

$$M_1 : 5x - 2y + 5z = 3 \quad \text{และ} \quad M_2 : 2x + y - 7z = -11$$

ตัวอย่าง 3.3.4 จงหาสมการของเส้นตรง L ที่เป็นรอยตัดของระนาบ 2 ระนาบที่กำหนดให้ ดังรูป



พิจารณาจุด B นอกระนาบ M ดังรูป



$M : ax + by + cz = d$

เราได้ว่า $\overrightarrow{QB}$ เป็นเวกเตอร์ภาพฉายของ $\overrightarrow{P_0B}$ บน $\vec{N}$ นั่นคือ

$$\vec{B} - \vec{Q} = \overrightarrow{QB} = \left(\frac{\overrightarrow{P_0B} \cdot \vec{N}}{\|\vec{N}\|^2} \right) \vec{N}$$

ดังนั้น

$$\vec{Q} = \vec{B} - \left(\frac{\overrightarrow{P_0B} \cdot \vec{N}}{\|\vec{N}\|^2} \right) \vec{N}$$

และระยะระหว่างจุด B กับระนาบ M คือ

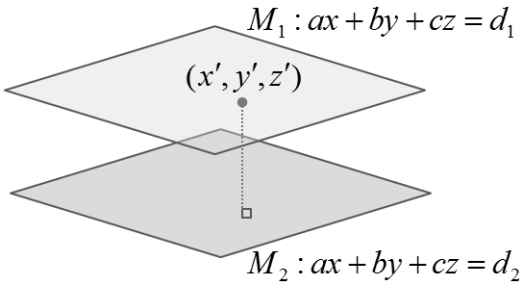
$$\begin{aligned} D = \|\overrightarrow{QB}\| = \frac{|\overrightarrow{P_0B} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} &= \frac{|(x' - x_0, y' - y_0, z' - z_0) \cdot (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|(ax' + by' + cz') - (ax_0 + by_0 + cz_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|ax' + by' + cz' - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.3.5 จงหาระยะจากจุด $B(3, 0, -2)$ ไปยัง $x + y - 3z = -2$

ตัวอย่าง 3.3.6 จงหาจุดบนระนาบ $2x + y - 3z = -10$ ซึ่งอยู่ใกล้จุด $B(4, 2, 2)$ มากที่สุด

ถ้าระนาบ M_1 ขนานกับระนาบ M_2 โดยที่ระนาบทั้งสองมีสมการเป็น

$$M_1 : ax + by + cz = d_1 \quad \text{และ} \quad M_2 : ax + by + cz = d_2$$



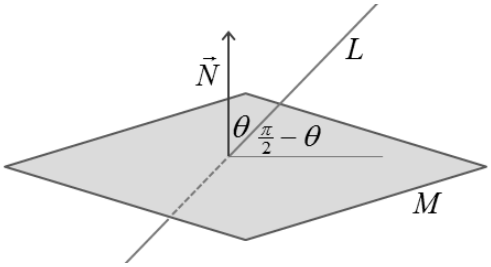
เราเลือกจุด (x', y', z') จาก M_1 และหาระยะระหว่างจุดนั้นกับ M_2 จะได้

$$\text{ระยะระหว่าง } M_1 \text{ และ } M_2 \text{ ที่ขนานกัน} = \frac{|(ax' + by' + cz') - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

ตัวอย่าง 3.3.7 จงหาระยะระหว่างระนาบ

$$M_1 : 3x - 2y + 6z = 10 \quad \text{และ} \quad M_2 : 6x - 4y + 12z = -1$$

ให้ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรง L และเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ M
จะได้ว่า $\left|\frac{\pi}{2}-\theta\right|$ เป็นมุมระหว่างเส้นตรง L และระนาบ M



ซึ่งถ้า $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรง L และ $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ M เรายังได้อีกว่า เส้นตรง L และระนาบ M มีความสัมพันธ์กันได้ 2 แบบ กล่าวคือ

(ก) เส้นตรง L ขนานกับระนาบ M ก็ต่อเมื่อ $\vec{A}\perp\vec{N}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{A}\cdot\vec{N}=0$ หรือ

(ข) เส้นตรง L ตัดกับระนาบ M ที่จุดๆ หนึ่ง

ตัวอย่าง 3.3.8 จงพิจารณาว่าเส้นตรง L และระนาบ M ที่กำหนดให้ตัดกันหรือขนานกัน
ถ้าตัดกัน จงหาจุดตัดและมุมระหว่างเส้นตรงกับระนาบ
ถ้าขนานกัน จงหาระยะระหว่างเส้นตรงกับระนาบ

1. $L: x=3+2t,\ y=4+8t,\ z=-1+3t$ และ $M: x-y+2z=9$

2. $L : \dfrac{x+3}{2} = y - 4 = \dfrac{z+1}{-3}$ และ $M : 3x + 5y - z = -2$

ตัวอย่าง 3.3.9 [ระคน]

1. จงหาสมการของระนาบซึ่งผ่านจุด $P(1,0,-1)$ และ $Q(2,1,0)$ และขนานกับเส้นตรงที่เป็นรอยตัดของระนาบ $x-y+z=1$ และ $3x-y=4$

2. จงหาสมการของระนาบซึ่งขนานกับระนาบ $2x-y+2z=1$ และห่างจากจุด $(-3,2,1)$ เป็นระยะทาง 4 หน่วย

3. กำหนด $L : x = 4 + 3t,\ y = 1 + t,\ z = 2 - t$ และ $M : x + 2y + 3z = 7$

   (ก) จงหาสมการของระนาบที่ผ่านเส้นตรง L และตั้งฉากกับระนาบ M

   (ข) จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ XY และตัดตั้งฉากกับรอยตัดของ M และระนาบ XZ

4. ระนาบ M_1, M_2 และ M_3 ตัดและตั้งฉากกันที่จุด $(0,0,0)$ ถ้าสมการของระนาบ M_1 และ M_2 คือ $kx + y - z = 0$ และ $x + ky + 2z = 0$ ตามลำดับ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว
จงหาระยะระหว่างระนาบ M_3 และเส้นตรง $y = x + 3, z = 0$

ทำแบบฝึกหัด 3.4.1–3.4.7 และแบบฝึกหัดระคน (หน้า 164–165) ในหนังสือแคลคูลัส ๒

3.4 ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ เส้นโค้งและการเคลื่อนที่ในปริภูมิสองมิติและสามมิติ

สมมติว่า x, y และ z ต่างเป็นฟังก์ชันของ t (เรียกว่า**ตัวแปรเสริม (parameter)**) โดย

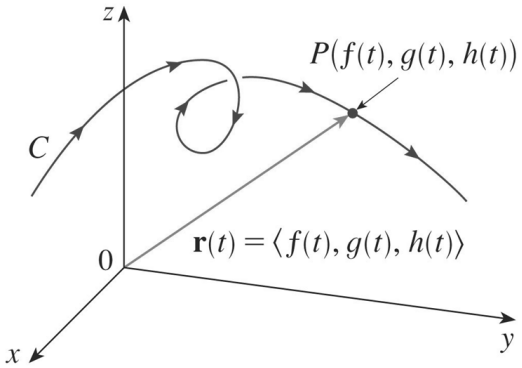
$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t)$$

(เรียกว่า**สมการอิงตัวแปรเสริม (parametric equations)**) เราเรียก

$$\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$$

ว่า**ฟังก์ชันการเคลื่อนที่ใน** $\mathbb{R}^3$

สังเกตว่าตัวแปรของฟังก์ชัน $\vec{r}$ คือ t และค่าของ $\vec{r}(t)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ เราเรียกฟังก์ชันในลักษณะนี้ว่า "**ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ (vector valued function)**"

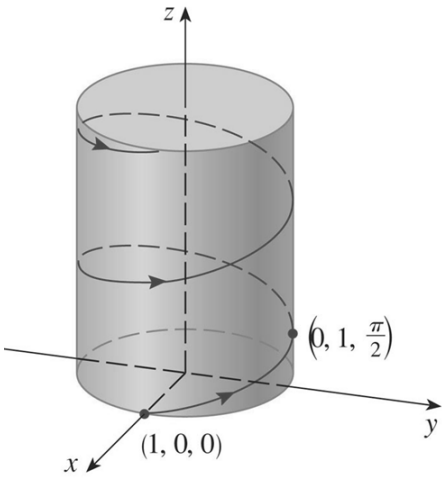


ตัวอย่าง 3.4.1 จงเขียนกราฟของการเคลื่อนที่

1. $\vec{r}(t) = (t, t^2)$ เมื่อ $-1 \leq t \leq 2$

2. $\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t)$ เมื่อ (ก) $0 \le t \le 2\pi$ (ข) $\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{3\pi}{2}$

3. $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ เมื่อ $t \ge 0$ เรียกว่า "**Helix**"



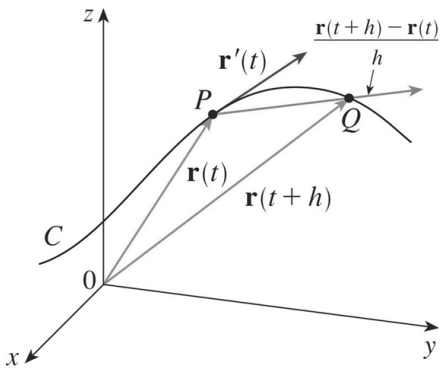
สำหรับฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ เรากำหนด

1. $\lim\limits_{t\to a}\mathbf{r}(t) = \Big(\lim\limits_{t\to a} f(t), \lim\limits_{t\to a} g(t), \lim\limits_{t\to a} h(t)\Big)$
2. $\dfrac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t))$
3. $\displaystyle\int \mathbf{r}(t)\,dt = \Big(\int f(t)\,dt, \int g(t)\,dt, \int h(t)\,dt\Big)$
4. $\displaystyle\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \Big(\int_a^b f(t)\,dt, \int_a^b g(t)\,dt, \int_a^b h(t)\,dt\Big)$

ซึ่งเราได้ว่า

ทฤษฎีบท 3.4.1 1. $\dfrac{d}{dt}\big(\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)\big) = \mathbf{r}_1'(t) + \mathbf{r}_2'(t)$

2. $\dfrac{d}{dt}c\mathbf{r}(t) = c\mathbf{r}_1'(t)$ *เมื่อ* $c \in \mathbb{R}$
3. $\dfrac{d}{dt}\big(s(t)\mathbf{r}(t)\big) = s(t)\mathbf{r}_1'(t) + s'(t)\mathbf{r}(t)$
4. $\dfrac{d}{dt}\big(\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)\big) = \mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2'(t) + \mathbf{r}_1'(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)$
5. $\dfrac{d}{dt}\big(\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)\big) = \mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2'(t) + \mathbf{r}_1'(t)\times\mathbf{r}_2(t)$



ถ้า $\mathbf{r}(t)$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่วัตถุ

1. เรียก $\mathbf{V}(t) = \mathbf{r}'(t)$ ว่า**เวกเตอร์ความเร็ว** และ $\|\mathbf{V}(t)\|$ ว่า**อัตราเร็ว**
2. เรียก $\mathbf{A}(t) = \mathbf{V}'(t) = \mathbf{r}''(t)$ ว่า**เวกเตอร์ความเร่ง** และ และ $\|\mathbf{A}(t)\|$ ว่า**อัตราเร่ง**
3. $S(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|\mathbf{r}'(u)\|\,du$ คือ ระยะทางของการเคลื่อนที่จากจุด ณ เวลา t_0 ถึงจุด ณ เวลา t (ระยะทาง = อัตราเร็ว $\times$ เวลา)

ตัวอย่าง 3.4.2 กำหนดให้ $\mathbf{r}(t) = \left(\dfrac{1-e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}, \dfrac{1}{1+t^2}, \sec^2 t\right)$ จงหา

1. $\lim\limits_{t\to 0} \mathbf{r}(t)$

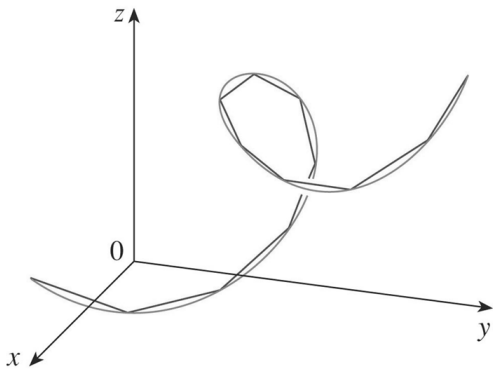
2. $\mathbf{r}'(t)$

3. $\displaystyle\int \mathbf{r}(t)\,dt$

ทำแบบฝึกหัด 3.5.1–3.5.2 ในหนังสือแคลคูลัส ๒

ให้ $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a,b]$ เป็นเส้นโค้งเรียบ นั่นคือ $\mathbf{r}'(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$
จะได้ว่า **ความยาวส่วนโค้งของเส้นโค้ง** $\mathbf{r}(t)$ กำหนดโดย

$$L(a,b) = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$$



ตัวอย่าง 3.4.3 อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ในปริภูมิสามมิติ มีสมการการเคลื่อนที่

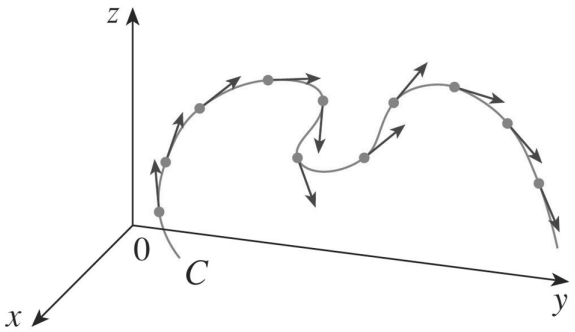
$$\mathbf{r}(t) = (6t^2, 4\sqrt{2}t^3, 3t^4) \quad \text{เมื่อ } t \in [0,2]$$

จงหาระยะทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ไปในช่วงเวลาที่กำหนดให้

ให้ C เป็นเส้นโค้งใน $\mathbb{R}^3$ ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}$ ซึ่ง $\mathbf{r}'(t)$ มีค่าทุก $a \leq t \leq b$ จะได้ว่า $\mathbf{r}'(t)$ เป็นเป็นเวกเตอร์สัมผัสของเส้นโค้ง $\mathbf{r}$ ณ ตำแหน่ง t ต่างๆ เราเรียก

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

ว่า**เวกเตอร์สัมผัสหน่วย (unit tangent vector) ของเส้นโค้ง C ณ ตำแหน่ง t**



เรียกเส้นตรงที่ผ่านจุด $P = \mathbf{r}(t)$ และมีเวกเตอร์แสดงทิศทางเป็นเวกเตอร์ $\mathbf{T}$ ว่า**เส้นสัมผัสของ C ณ จุด P**

ตัวอย่าง 3.4.4 จงหาเวกเตอร์สัมผัสหน่วย $\mathbf{T}(t)$ ของเส้นโค้ง

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j} + \mathbf{k}, \qquad \text{เมื่อ } t > 0$$

พร้อมทั้งหาเส้นสัมผัส ณ จุดซึ่ง $t = \pi$

สังเกตว่า $\mathbf{T}$ บอกทิศทางการเลี้ยวของการเคลื่อนที่ตามแนวเส้นโค้ง C โดยหาก $\mathbf{T}$ เปลี่ยนทิศทางน้อย เส้นโค้งก็จะโค้งน้อย (เกือบเป็นเส้นตรง) และหาก $\mathbf{T}$ เปลี่ยนทิศทางน้อยเส้นโค้งก็จะโค้งมาก เราเรียกอัตราการเปลี่ยนแปลงทิศทางของ C ต่อความยาวเส้นโค้งของ C ว่า**เวกเตอร์ความโค้ง (vector of curvature)** และ เรียกขนาดของเวกเตอร์ความโค้งว่า**ความโค้ง (curvature) ของ** C เขียนแทนด้วย $k(t)$ นั่นคือ

$$k(t) = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{dS} \right\|$$

จาก

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{r}'(u)\| \, du$$

โดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ได้ว่า

$$\frac{dS}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\|$$

ทำให้ได้โดยกฎลูกโซ่ว่า

$$k(t) = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{dS} \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{T}/dt}{dS/dt} \right\| = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \quad \text{เมื่อ } \mathbf{r}'(t) \neq \vec{0}$$

ตัวอย่าง 3.4.5 ให้ $\mathbf{r}(t) = (x_0 + at, y_0 + at, z_0 + at)$ เป็นเส้นตรงใน $\mathbb{R}^3$ ที่ผ่านจุด (x_0, y_0, z_0) และขนานกับ $\vec{A} = (a, b, c)$ จงหา $k(t)$

ตัวอย่าง 3.4.6 ให้ $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t)$ เป็นวงกลมรัศมี a บนระนาบ จงแสดงว่า $k(t) = \frac{1}{a}$ (ดังนั้น ถ้ารัศมีของวงกลมเพิ่มขึ้น แล้ววงกลมจะมีความโค้งลดลง)

หมายเหตุ จากวงกลมรัศมี a หน่วย มีความโค้ง ณ จุดใดๆ เท่ากับ $\frac{1}{a}$ ซึ่งเป็นค่าคงตัว สังเกตว่าส่วนกลับของความโค้ง มีค่าเป็น a เท่ากับรัศมีของวงกลมนั้น ในกรณีทั่วไป เราเรียกส่วนกลับของความโค้งว่า **รัศมีความโค้ง (radius of curvature)** เขียนแทนด้วย $\rho(t)$ นั่นคือ

$$\rho(t) = \frac{1}{k(t)} \quad \text{เมื่อ } k(t) \neq 0$$

ตัวอย่าง 3.4.7 จงหาความโค้ง $k(t)$ ของเส้นโค้ง

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t\cos t)\mathbf{j}, \quad \text{เมื่อ } t > 0$$

ทำแบบฝึกหัด 3.5.4 ในหนังสือแคลคูลัส ๒ (ไม่สอบเรื่องการบิดของเส้นโค้ง)

TNB frame

เพราะว่า $1 = \|\mathbf{T}\|^2 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}$ ดังนั้น

$$0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) = \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} = 2\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} = 2\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}'(t)$$

ทำให้ได้ว่า $\mathbf{T} \perp \mathbf{T}'$

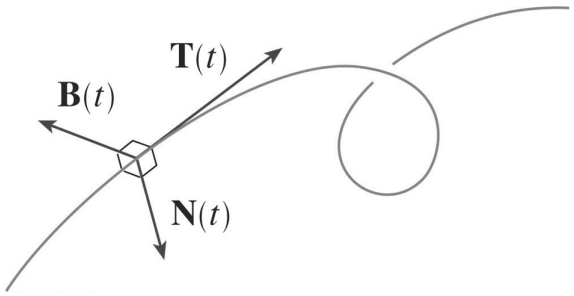
เราเรียกเวกเตอร์หน่วยในทิศทางเดียวกับ $\mathbf{T}'$ ซึ่งตั้งฉากกับ $\mathbf{T}$ ว่า**เวกเตอร์แนวฉากมุขสำคัญ (principal unit normal vector)** เขียนแทนด้วย $\mathbf{N}(t)$ นั่นคือ

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} \qquad \text{เมื่อ } \mathbf{T}'(t) \neq 0$$

สังเกตว่า $\|\mathbf{T} \times \mathbf{N}\| = \|\mathbf{T}\|\|\mathbf{N}\| \sin 90^\circ = 1$
เราเรียกเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

ว่า**เวกเตอร์แนวฉากคู่ (binormal vector)**
ซึ่งจะได้ว่าเวกเตอร์ $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ มีขนาดหนึ่งหน่วยจะตั้งฉากซึ่งกันและกันดังรูป



จากเวกเตอร์ทั้งสามนี้ จะได้ เส้นตรงที่มีเวกเตอร์เหล่านี้เป็นเวกเตอร์แสดงทิศทาง คือ

1. **เส้นสัมผัส (tangent line)** คือเส้นตรงที่ขนานกับ $\mathbf{T}$
2. **เส้นแนวฉาก (normal line)** คือเส้นตรงที่ขนานกับ $\mathbf{N}$
3. **เส้นแนวฉากคู่ (binormal plane)** คือเส้นตรงที่ขนานกับ $\mathbf{B}$

และได้ระนาบที่สำคัญที่มีเวกเตอร์เหล่านี้เป็นเวกเตอร์แนวฉาก คือ

1. **ระนาบสัมผัสประชิด (osculating plane)** คือระนาบที่ตั้งฉากกับ $\mathbf{B}$
2. **ระนาบแนวฉาก (normal plane)** คือระนาบที่ตั้งฉากกับ $\mathbf{T}$
3. **ระนาบผ่านเส้นสัมผัสกับแนวฉากคู่ (rectifying plane)** คือระนาบที่ตั้งฉากกับ $\mathbf{N}$

ตัวอย่าง 3.4.8 จงหาเวกเตอร์แนวฉาก และ เวกเตอร์แนวฉากคู่ สำหรับ Helix

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

พร้อมทั้งหาระนาบสัมผัสประชิด และ ระนาบแนวฉาก ณ จุด $(0, 1, \pi/2)$

ตัวอย่าง 3.4.9 กำหนดให้เส้นโค้ง C มีแนวทางเดินเป็น

$$\mathbf{r}(t) = (1 + \sin t, 1 - \cos t, 2) \quad \text{เมื่อ } 0 \leq t \leq 3\pi$$

จงหาระนาบสัมผัสประชิด ระนาบแนวฉาก และ ระนาบผ่านเส้นสัมผัสและแนวฉากคู่ของเส้นโค้ง ณ จุดซึ่ง $t = \pi$

ทำแบบฝึกหัด 3.5.3 ในหนังสือแคลคูลัส ๒ (ไม่สอบเรื่องส่วนประกอบแนวสัมผัสและส่วนประกอบแนวฉาก)

4 ฟังก์ชันของหลายตัวแปร

4.1 ฟังก์ชันค่าจริงของสองตัวแปร

เรากล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันค่าจริงของสองตัวแปร** x, y ก็ต่อเมื่อ $f(x,y)$ เป็นสูตรในตัวแปร x, y เช่น

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2 + 1, \qquad f_2(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x+y}, \qquad f_3(x,y) = e^x - \sin 2y$$

เป็นต้น ในทำนองเดียวกัน เรากล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันค่าจริงของ n ตัวแปร** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ก็ต่อเมื่อ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เป็นสูตรในตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เช่น

$$f(x,y,z) = \frac{2^x + \sin y}{z^2+1}, \qquad g(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 + x_2^2 + x_3^3 + x_4^4$$

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาเฉพาะฟังก์ชันค่าจริงของสองตัวแปร ซึ่งเราสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันในปริภูมิสามมิติได้

ให้ $z = f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x, y เราเรียกเซต

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \text{ มีความหมาย หรือ คำนวณค่าได้ }\}$$

ว่า**โดเมนของฟังก์ชัน** f **(domain of** f**)** และเรียกเซต

$$R_f = \{z = f(x,y) \in \mathbb{R} : (x,y) \in D_f\}$$

ว่า**เรนจ์ของฟังก์ชัน** f **(range of** f**)**

ข้อสังเกต D_f เป็นสับเซตของระนาบ XY (อยู่บนพื้น) และ R_f แสดงความสูง ณ จุดต่างๆ บนกราฟของ f โดยวัดค่าบนแกน Z

ตัวอย่าง 4.1.1 จงหาโดเมนและเรนจ์ พร้อมทั้งเขียนกราฟของฟังก์ชัน f ต่อไปนี้อย่างคร่าวๆ

1. $f(x,y) = -3x - 2y + 6$

2. $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$

3. $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

ตัวอย่าง 4.1.2 จงหาโดเมนของ f และเขียนรูปแสดงโดเมนของ f

1. $f(x,y) = \dfrac{\sin x}{x-2y+2}$

2. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y-1}$

3. $f(x,y) = \ln(x - y^2)$

4. $f(x,y) = \dfrac{\ln y}{\sqrt{x+y+1}}$

ทำแบบฝึกหัด 4.1 ในหนังสือแคลคูลัส ๒

4.2 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันของสองตัวแปร

ในการหาลิมิตของฟังก์ชันตัวแปรเดียวที่จุด $x = x_0$ เราจะพิจารณาค่าของฟังก์ชันใกล้ๆ x_0 ซึ่งมีสองทิศทาง คือ ทางซ้ายมือของ x_0 และ ทางขวามือของ x_0

เราจะขยายแนวคิดเรื่องลิมิตของฟังก์ชันตัวแปรเดียวไปยังฟังก์ชันของสองตัวแปร จะเห็นว่า ถ้า $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ จุด (x, y) ที่อยู่ใกล้ (x_0, y_0) มิได้มีเพียงทางซ้ายมือ หรือ ทางขวามือของ (x_0, y_0) แต่จะอยู่รอบๆ (x_0, y_0) ทุกทิศทาง (นับไม่ถ้วน)

(ตัวแปรเดียว) ให้ $y = f(x)$ เรากล่าวว่า $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ
สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทุก $x \in D_f$
ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$

ทฤษฎีบท 4.2.1 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *ก็ต่อเมื่อ* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

(สองตัวแปร) ให้ $z = f(x, y)$ เรากล่าวว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ ก็ต่อเมื่อ
สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทุก $(x, y) \in D_f$
ถ้า $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ แล้ว $|f(x, y) - L| < \varepsilon$
หมายเหตุ $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

(สองตัวแปรบนเส้นโค้ง C) ให้ $z = f(x, y)$ และ C เป็นเส้นโค้งที่ผ่านจุด (x_0, y_0)
เรากล่าวว่า $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ \text{บน } C}} f(x, y) = L$ ก็ต่อเมื่อ
สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทุก $(x, y) \in D_f \cap C$
ถ้า $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ แล้ว $|f(x, y) - L| < \varepsilon$

ทฤษฎีบท 4.2.2 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ *ก็ต่อเมื่อ*
$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ \text{บน } C}} f(x, y) = L$ *สำหรับทุกเส้นโค้ง C ที่ผ่านจุด (x_0, y_0)*

ตัวอย่าง 4.2.1 **[แทนค่า/จัดรูป]** จงหาค่าของ

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} \arctan\sqrt{\dfrac{|x|(y+1)}{3x+2y}}$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2-3xy}+2y}$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{x^3-2x^2y-xy+2y^2}{x^2-2xy+xy^2-2y^3}$

ตัวอย่าง 4.2.2 [**ลิมิตบนเส้นโค้ง**] จงหาค่าของ

1. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{บน } y=x}} \dfrac{x^2}{x^2+2y^2}$

2. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{บน } y=-2x}} \dfrac{2xy}{4x^2-3y^2}$

ตัวอย่าง 4.2.3 ให้ $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ เมื่อ $(x,y) \neq (0,0)$
จงหาลิมิตของ $f(x,y)$ เมื่อ $(x,y) \to (0,0)$ บนเส้นโค้งต่อไปนี้

1. C_1 : แกน X

2. $C_2 : y = x$

3. $C_3 : y = 2x$

จากทฤษฎีบท 4.2.2 เราได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ **ไม่มีค่า**

1. หากมีเส้นโค้ง C ที่ผ่านจุด (x_0,y_0) ซึ่ง $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ \text{บน } C}} f(x,y)$ ไม่มีค่า หรือ
2. หากมีเส้นโค้ง C_1 และ C_2 ที่ผ่านจุด (x_0,y_0) ซึ่ง

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ \text{บน } C_1}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ \text{บน } C_2}} f(x,y)$$

ซึ่งถ้า $(x_0,y_0)=(0,0)$ เรามักจะเลือกใช้เส้นโค้งง่ายๆ เช่น แกน X $(y=0)$, แกน Y $(x=0)$, $y=x$, $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ เป็นต้น

ตัวอย่าง 4.2.4 [**ลิมิตไม่มีค่าโดยใช้เส้นโค้ง**] จงแสดงว่าลิมิตต่อไปนี้ไม่มีค่า

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x^2+y^2}$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^2}{x^4-y^2}$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2)}{x^2+y^2}$

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,-2)} \dfrac{\sqrt{x}(y+2)^2}{|x|+3(y+2)^4}$

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{\int_{-y}^{x} \ln(1+t^2)\,dt}{x^2+y^2-2}$

ตัวอย่าง 4.2.5 กำหนดให้

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x-y} & \text{เมื่อ } x\neq y\\ 1 & \text{เมื่อ } x=y\end{cases}$$

จงพิจารณาว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$ มีค่าหรือไม่ เพราะเหตุใด

เราอาจใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้ช่วยในการพิจารณาว่า ฟังก์ชันมีค่าลิมิตเป็นศูนย์

ทฤษฎีบท 4.2.3 *ถ้าเราสามารถเขียน* $f(x,y) = g(x,y)h(x,y)$ *โดยที่*

1. *มี* $M > 0$ *และมี* $\delta > 0$ *ที่ทำให้* $|g(x,y)| \leq M$ *(หรือกล่าวว่า "*g *มีขอบเขต")*
   สำหรับทุก $(x,y) \in D_g$ *และ* $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ *และ*
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = 0$

จะได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$

ข้อสังเกต ในกรณีที่ $(x_0,y_0) = (0,0)$ เงื่อนไขของ g จะเป็น
มี $M > 0$ และมี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $|g(x,y)| \leq M$ สำหรับทุก $(x,y) \in D_g$ และ $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$

ตัวอย่าง 4.2.6 **[ลิมิตเป็นศูนย์โดยใช้ทฤษฎีบท]** จงหาลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+2y^2}$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2 \arctan x}{x^2+4y^4}$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \arccos\left(\dfrac{3x^2y^3}{2x^4+5y^4}\right)$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+2y^2}$

เรากล่าวว่า f **มีความต่อเนื่อง (continuous) ที่จุด** (x_0, y_0) ก็ต่อเมื่อ

1. $f(x_0, y_0)$ มีค่า
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ มีค่า
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

ตัวอย่าง 4.2.7 จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f ต่อไปนี้มีความต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{เมื่อ } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+2y^2} & \text{เมื่อ } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

ตัวอย่าง 4.2.8 จงหาค่าของ A ที่ทำให้

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{8}{x^2+y^2+2}+\cos\left(\dfrac{x^3}{x^2+2y^2}\right) & \text{เมื่อ } (x,y)\neq(0,0)\\ A & \text{เมื่อ } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

มีความต่อเนื่องที่ $(0,0)$

ทฤษฎีบท 4.2.4 *ถ้า $u(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรที่มีความต่อเนื่องที่ (x_0,y_0) และ g เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรเดียวที่มีความต่อเนื่องที่ $u(x_0,y_0)$ จะได้ว่า $g\circ u$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่ (x_0,y_0)*

เช่น $f(x,y)=\sin(x+y^2)$ มีความต่อเนื่องที่ทุกจุดบน $\mathbb{R}^2$

$f(x,y)=\ln(y+|x|)$ มีความต่อเนื่องบน

$f(x,y)=\arccos(x^2+y^2)$ มีความต่อเนื่องบน

ทำแบบฝึกหัด 4.2.1–4.2.2 ในหนังสือแคลคูลัส ๒

สูตรการหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของฟังก์ชัน และ เอกลักษณ์ตรีโกณมิติที่สำคัญ

$$\frac{d}{dx}k = 0 \qquad \int k\,du = ku + C$$

$$\frac{d}{dx}f(x)g(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \qquad \int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$$

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx} \qquad \int \frac{1}{u}\,du = \int u^{-1}\,du = \ln|u| + C$$

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}, \quad \frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a\frac{du}{dx} \qquad \int e^u\,du = e^u + C, \int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$\frac{d}{dx}\ln|u| = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}, \frac{d}{dx}\log_a|u| = \frac{1}{u\ln a}\frac{du}{dx} \qquad \int \sin u\,du = -\cos u + C$$

$$\frac{d}{dx}\sin u = \cos u\frac{du}{dx} \qquad \int \cos u\,du = \sin u + C$$

$$\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u\frac{du}{dx} \qquad \int \sec^2 u\,du = \tan u + C$$

$$\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u\frac{du}{dx} \qquad \int \operatorname{cosec}^2 u\,du = -\cot u + C$$

$$\frac{d}{dx}\cot u = -\operatorname{cosec}^2 u\frac{du}{dx} \qquad \int \sec u\tan u\,du = \sec u + C$$

$$\frac{d}{dx}\sec u = \sec u\tan u\frac{du}{dx} \qquad \int \operatorname{cosec} u\cot u\,du = -\operatorname{cosec} u + C$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec} u\cot u\frac{du}{dx} \qquad \int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$$

$$\frac{d}{dx}\arcsin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \qquad \int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C$$

$$\frac{d}{dx}\arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \qquad \int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$\frac{d}{dx}\arctan u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx} \qquad \int \operatorname{cosec} u\,du = \ln|\operatorname{cosec} u - \cot u| + C$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccot} u = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \arcsin u + C$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \qquad \int \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan u + C$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccosec} u = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \qquad \int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,du = \operatorname{arcsec} u + C$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \sec^2 x - \tan^2 x = 1 \qquad \operatorname{cosec}^2 x - \cot^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

4.3 อนุพันธ์ย่อย

ให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร x และ y
อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x (partial derivative of f with respect to x) คือ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \text{ ถ้าลิมิตมีค่า}$$

และ **อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y (partial derivative of f with respect to y)** คือ

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} \text{ ถ้าลิมิตมีค่า}$$

เราเขียน

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = f_1 = D_1 f \quad \text{และ} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = f_2 = D_2 f$$

ข้อสังเกต $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ คือการหาอนุพันธ์เทียบกับ x เมื่อคิดว่า y เป็นค่าคงตัว และ ในทำนองเดียวกัน $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ คือการหาอนุพันธ์เทียบกับ y เมื่อคิดว่า x เป็นค่าคงตัว
ดังนั้น เราจึงอาจใช้สูตรในการหาอนุพันธ์ของหนึ่งตัวแปร (ใน Cal 1) ได้

ตัวอย่าง 4.3.1 จงหาอนุพันธ์ย่อยของ

1. $f(x, y) = x^3\sqrt{y} + y \arctan x$

2. $f(x, y) = e^{(x \sin y)}$

3. $f(x,y) = (\sqrt[3]{x} + y^3)^4$

4. $f(x,y) = x^2 \tan(x + 2y)$

5. $f(x,y) = \dfrac{x + \ln y}{\sqrt{y}}$

ฟังก์ชันกำลัง (power function):	$\dfrac{d}{dx}w^a = aw^{a-1}\dfrac{dw}{dx}$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว
ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (exponential function):	$\dfrac{d}{dx}a^w = a^w \ln a \dfrac{dw}{dx}$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

6. $f(x,y) = (x \ln x)^{y^2+y}$

7. $f(x, y, z) = z(\sec y^2)(\ln x) + (\cos z)^y$

การหาอนุพันธ์ย่อยโดยใช้บทนิยาม

ตัวอย่าง 4.3.2 จงหา $f_x(0,0)$ และ $f_y(0,0)$ เมื่อ

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+2y^2} & \text{เมื่อ } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ตัวอย่าง 4.3.3 กำหนด $f(x,y) = 2x + 3y + (x^2+y^2)^{2/3}$ จงหาค่าของ $f_x(0,0)$ และ $f_y(0,0)$

อนุพันธ์ย่อยอันดับสูง

ตัวอย่าง 4.3.4 จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของ

1. $f(x,y) = \sqrt{x}\ln y + y^3 e^{-x}$

2. $f(x,y) = \ln(x^2 - \sin y)$

ตัวอย่าง 4.3.5 กำหนดให้ $f(x,y) = (x^4+3)^y$ จงหา $D_2f(x,y)$ และ $D_{21}f(x,y)$

การเท่ากันของ f_{xy} และ f_{yx} ในตัวอย่างก่อนหน้านี้ไม่ใช่เรื่องบังเอิญ แต่เป็นไปตามทฤษฎีบทที่กล่าวว่า

ทฤษฎีบท 4.3.1 *ถ้า f เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรและ f_x, f_y และ f_{xy} มีความต่อเนื่องบนแผ่นกลมเปิดรอบจุด (x_0,y_0) แล้ว $f_{yx}(x_0,y_0)$ มีค่า และ $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$*

ตัวอย่างถัดไป จะแสดงว่า f_{xy} และ f_{yx} อาจมีค่าไม่เท่ากัน

ตัวอย่าง 4.3.6 กำหนดให้

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

จงหา $D_{12}f(0,0)$ และ $D_{21}f(0,0)$ (ถ้ามี)

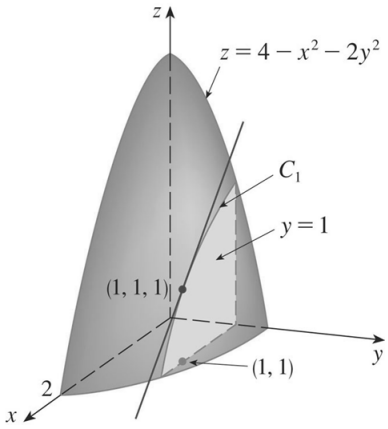
4.4 ค่าเชิงอนุพันธ์รวม

ความหมายทางเรขาคณิตของอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันสองตัวแปร

ตัวอย่าง 4.4.1 กำหนดผิว $z = f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$ ณ จุด $(1,1,1)$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x \quad \text{และ} \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)} = -2$$

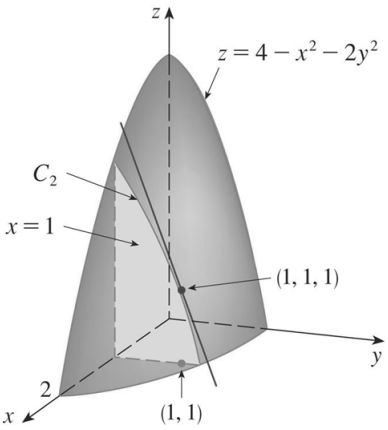
ซึ่งเป็นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง C_1 ที่เป็นรอยตัดของระนาบ $y = 1$ กับผิว $z = f(x,y)$ ดังรูป



และ ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -4y \quad \text{และ} \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)} = -4$$

เป็นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง C_2 ที่เป็นรอยตัดของระนาบ $x = 1$ กับผิว $z = f(x,y)$ ดังรูป



ในกรณีทั่วไป ถ้าเรามีผิว $z = f(x,y)$ ณ จุด (x_0, y_0) จะได้ว่า

$f_x(x_0, y_0)$ = ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่เป็นรอยตัดของระนาบ $y = y_0$ กับผิว $z = f(x,y)$ และ

$f_y(x_0, y_0)$ = ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่เป็นรอยตัดของระนาบ $x = x_0$ กับผิว $z = f(x,y)$

ตัวอย่าง 4.4.2 จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่เป็นรอยตัดของ

1. ผิว $4x^2 - 3y^2 + z = 5$ กับระนาบ $y = -1$ ที่จุด $(1, -1, 4)$

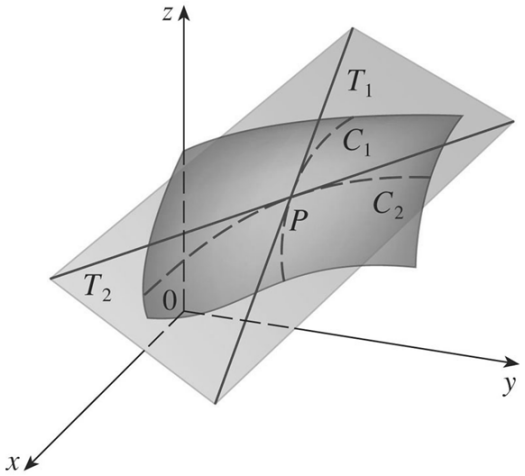
2. ผิว $z = \arctan(ye^{2x})$ กับระนาบ YZ ที่จุด $(0, 1, \pi/4)$

3. ผิว $z = 1 + 2x^2 + \sin 2y$ กับระนาบ $x = 2$ ที่จุด $(2, \pi, 9)$

ตัวอย่าง 4.4.3 กำหนดให้ $z = 8 - Ax^2 - By^2$ เป็นผิวซึ่งผ่านจุด $(2, 1, 4)$ ถ้าความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่เป็นรอยตัดของผิวนี้กับระนาบ $x = 2$ ที่จุด $(2, 1, 4)$ มีค่าเป็น -4 จงหาค่าของ A และ B

ทำแบบฝึกหัด 4.3 ในหนังสือแคลคูลัส ๒

ระนาบสัมผัสและการประมาณค่า



ให้ $z = f(x,y)$ สังเกตว่า ณ จุด $P(x_0, y_0, z_0)$ เส้นสัมผัส T_1 มีสมการเป็น

$$\frac{z - z_0}{x - x_0} = f_x(x_0, y_0) \quad \text{หรือ} \quad \frac{x - x_0}{1} = \frac{z - z_0}{f_x(x_0, y_0)}, y = y_0$$

และเส้นสัมผัส T_2 มีสมการเป็น

$$\frac{z - z_0}{y - y_0} = f_y(x_0, y_0) \quad \text{หรือ} \quad \frac{y - y_0}{1} = \frac{z - z_0}{f_y(x_0, y_0)}, x = x_0$$

ดังนั้น เราสามารถหาเวกเตอร์แนวฉากของระนาบสัมผัสผิว $z = f(x,y)$ ณ จุด P ได้จาก

$$\vec{A}_{T_1} \times \vec{A}_{T_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = -\big(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1\big)$$

เพราะฉะนั้น สมการของ**ระนาบสัมผัส (tangent plane) ผิว** $z = f(x,y)$ **ที่จุด** $P(x_0, y_0, z_0)$ คือ

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

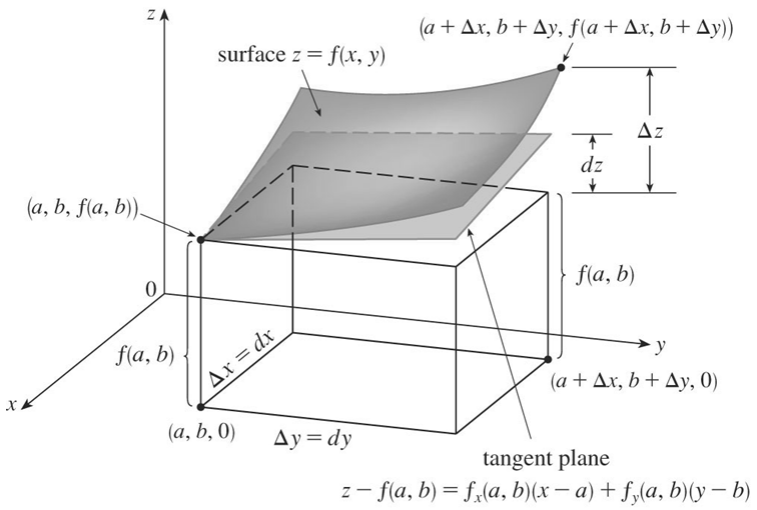
นั่นคือ

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{4.4.1}$$

หรือเราเขียนเป็น

$$dz = f_x\, dx + f_y\, dy$$

เรียกว่า **ค่าเชิงอนุพันธ์รวม (total differential) ของ** f



สำหรับ Δx และ Δy เล็กๆ เราได้จากสมการ (4.4.1) ว่า

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

หรือ

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

ตัวอย่าง 4.4.4 จงหาค่าเชิงอนุพันธ์รวมของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x, y) = y \cos x + e^{2y+x^2}$

2. $f(x, y) = \sin(x^3 + \sqrt{y})$

ตัวอย่าง 4.4.5 1. ถ้า $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$ จงหาค่าเชิงอนุพันธ์รวม dz

2. ถ้า x เปลี่ยนจาก 2 เป็น 2.05 และ y เปลี่ยนจาก 3 เป็น 2.96
จงหาและเปรียบเทียบค่าของ dz และ Δz

ตัวอย่าง 4.4.6 จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์รวมหาค่าประมาณของ $\sqrt{(3.05)^2-(1.97)^3}$

ตัวอย่าง 4.4.7 ให้ $f(x,y)=\dfrac{y^2}{(1+\sin x)^y}$
จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์รวมหาค่าประมาณของ $f(0.03,1.98)$

ค่าผิดพลาดโดยประมาณของ f

สำหรับฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ ให้ $z_0 = f(x_0, y_0)$ แสดงว่า z_0 เป็นค่าที่แท้จริงของ f ที่ $(x, y) = (x_0, y_0)$ ถ้าให้ $x = x_0 + dx$ และ $y = y_0 + dy$ จะได้ค่าประมาณของ $f(x_0 + dx, y_0 + dy)$ คือ $z_0 + dz$ ซึ่งความผิดพลาดที่เกิดจากการประมาณค่าคือ $dz = df$

ความผิดพลาดสัมพัทธ์ของ f เมื่อ x ผิดพลาดไป dx และ y ผิดพลาดไป dy คือ $\dfrac{\Delta z}{z_0}$ ซึ่งประมาณได้จาก $\dfrac{dz}{z}$ เมื่อ $z = z_0$ และ $dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$ นั่นคือ

$$\text{ความผิดพลาดสัมพัทธ์ของ } f \approx \frac{df}{f}$$

และ

$$\text{ร้อยละความผิดพลาดสัมพัทธ์ของ } f \approx \frac{df}{f} \times 100$$

ตัวอย่าง 4.4.8 กระป๋องกลมใบหนึ่งวัดความสูงได้ 25 เซนติเมตร และวัดรัศมีฐานได้ 6 เซนติเมตร ถ้าการวัดนี้มีความผิดพลาดไม่เกิน 0.1 เซนติเมตร จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์รวมประมาณ

1. ขอบเขตของความผิดพลาดในการคำนวณปริมาตรของกระป๋อง
2. ความผิดพลาดสัมพัทธ์และร้อยละความผิดพลาดสัมพัทธ์ในการคำนวณปริมาตรของกระป๋อง

ตัวอย่าง 4.4.9 ความดันของก๊าซมีความสัมพันธ์กับปริมาตรและอุณหภูมิของก๊าซตามสูตร

$$P = \frac{kT}{V}$$

เมื่อ k เป็นค่าคงตัว P, V และ T เป็นความดัน ปริมาตร และอุณหภูมิของก๊าซ ตามลำดับ
จงหาขอบเขตของร้อยละความผิดพลาดสัมพัทธ์ในการคำนวณความดัน
ถ้าการวัดอุณหภูมิผิดพลาดสัมพัทธ์ไม่เกิน 0.4% และการวัดปริมาตรผิดพลาดสัมพัทธ์ไม่เกิน 0.9%

ทำแบบฝึกหัด 4.6 ในหนังสือแคลคูลัส ๒

4.5 กฎลูกโซ่

อนุพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปร

ให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร เรากล่าวว่า f **มีอนุพันธ์ที่จุด** (x_0, y_0)
ก็ต่อเมื่อ $f_x(x_0, y_0)$ และ $f_y(x_0, y_0)$ มีค่าและมีฟังก์ชัน ε_1 และ ε_2 ของสองตัวแปร ที่ทำให้

$$\begin{aligned} &f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &\qquad = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y \end{aligned}$$

โดยที่ ε_1 และ $\varepsilon_2 \to 0$ เมื่อ $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$

ทฤษฎีบท 4.5.1 *ถ้า f มีอนุพันธ์ที่จุด (x_0, y_0) แล้วจะได้ว่า f มีความต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0)*

สำหรับฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปรการกล่าวว่า $f'(x_0)$ มีค่า ก็หมายความว่า f มี อนุพันธ์ที่จุด x_0 แต่สำหรับฟังก์ชันของสองตัวแปรการกล่าวว่า $f_x(x_0, y_0)$ และ $f_y(x_0, y_0)$ มีค่านั้น ไม่ได้หมายความว่า f มีอนุพันธ์ที่จุด (x_0, y_0) เช่น ฟังก์ชัน

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

จะได้ว่า $f_x(0, 0) = 0$ และ $f_y(0, 0) = 0$ แต่ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ ไม่มีค่า แสดงว่า f ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$ เพราะฉะนั้น f จึงต้องไม่มีอนุพันธ์ที่จุด $(0, 0)$

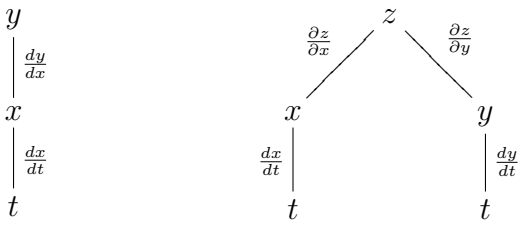
ดังนั้นการที่อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันสองตัวแปรมีค่า ไม่เพียงพอที่จะสรุปว่าฟังก์ชันนั้นมีอนุพันธ์

ทฤษฎีบท 4.5.2 *ให้ f เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร*
ถ้า f_x และ f_y มีค่าและมีความต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0) แล้วจะได้ว่า f มีอนุพันธ์ที่จุด (x_0, y_0)

กฎลูกโซ่ (chain rule)

(ตัวแปรเดียว) ถ้า $y = f(x)$ และ $x = g(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด x และ t ตามลำดับ แล้วจะได้ว่า $y = (f \circ g)(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด t โดยที่

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t))g'(t) \qquad \text{หรือ} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$



(สองตัวแปร) กรณีที่ ๑ ให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร และ $x = x(t), y = y(t)$ เป็นฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปร จะได้ว่า $z = f(x(t), y(t))$ จะเป็นฟังก์ชันของตัวแปร t เพียงตัวเดียว ดังนั้นเราสามารถกล่าวถึงอนุพันธ์ $\dfrac{dz}{dt}$ ได้ และเราได้ว่า

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

ตัวอย่าง 4.5.1 ให้ $z = f(x, y) = e^{x^2+y}$, $x(t) = \sin t$ และ $y(t) = 3t$ จงหา $\dfrac{dz}{dt}$

ตัวอย่าง 4.5.2 1. ให้ $z = x^2 - 2xy + xy^3$, $x = t^3 + 1$ และ $y = \dfrac{1}{t}$ จงหา $\dfrac{dz}{dt}$ เมื่อ $t = 1$

2. ให้ $z = \sqrt{x} + we^y + \sin(xw)$, $x = 2t$, $y = t^2$ และ $w = \sec t$ จงหา $\dfrac{dz}{dt}$

3. ให้ $z = \sin(y^2 + \ln x)$, $x = 2t^3 + t + e$, $y = \sec t$ จงหา $\dfrac{dz}{dt}$ เมื่อ $t = 0$

ปัญหาอัตราสัมพัทธ์

ตัวอย่าง 4.5.3 สมมติว่ารัศมีของทรงกระบอกกลมตรงเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 2 ซั่วโมง/นาที และส่วนสูงลดลงด้วยอัตรา 4 ซั่วโมง/นาที จงคำนวณหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของทรงกระบอกที่มีรัศมียาว 4 เซนติเมตร และ สูง 10 เซนติเมตร

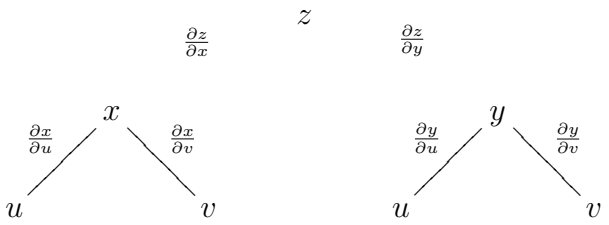
ตัวอย่าง 4.5.4 จุดๆ หนึ่งเคลื่อนที่ไปตามรอยตัดของพื้นผิว $x^2 + xy + y^2 = z$ กับระนาบ $x - y + 2 = 0$ ถ้า x เพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 2 หน่วยต่อวินาที จงหา

ก. อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y ขณะที่ $x = 3$

ข. อัตราการเปลี่ยนแปลงของ z ขณะที่ $x = 3$

(สองตัวแปร) กรณีที่ ๒ ให้ $z = f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร
และ $x = x(u,v), y = y(u,v)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร
จะได้ว่า $z = f(x(u,v), y(u,v))$ จะเป็นฟังก์ชันสองตัวแปร u และ v
ดังนั้น เราสามารถกล่าวถึงอนุพันธ์ย่อย $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ ได้ และเราได้ว่า

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$



ตัวอย่าง 4.5.5 1. ให้ $z = e^y \sin x$, $x = u^3v^2$ และ $y = \sqrt{v}\ln u$ จงหา $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial v}$

2. ให้ $w = x^2 + \sin(yz) - e^x$, $x = uv$, $y = \ln(v^2 + 1)$ และ $z = u\cos v$
จงหา $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ และ $\dfrac{\partial w}{\partial v}$ เมื่อ $u = -1$ และ $v = 0$

3. ให้ $z = \arctan(u^2 v)$, $u = 2x + 3y$ และ $v = x^2 + y^2$
   จงหา $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ เมื่อ $x = -1$ และ $y = 1$

ตัวอย่าง 4.5.6 จงแสดงว่า $z = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ สอดคล้องสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$t\frac{\partial z}{\partial s} + s\frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

ตัวอย่าง 4.5.7 ให้ $z = f(x, y)$, $x = u^2 + v^2$ และ $y = 2uv$ จงหา $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ และ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}$

ตัวอย่าง 4.5.8 ให้ $z = f(x, y)$, $x = x(s, t)$ และ $y = y(s, t)$ จงหา $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$ และ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$

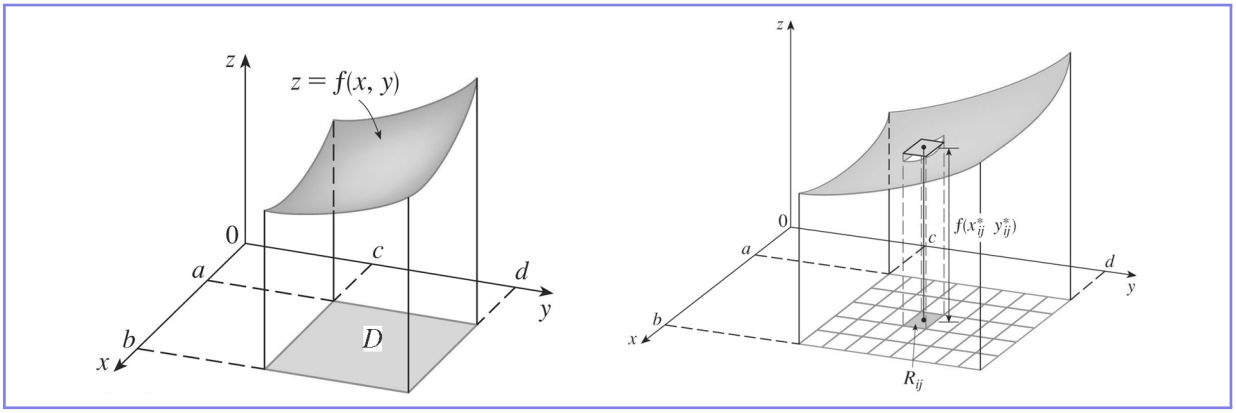
ตัวอย่าง 4.5.9 จงแสดงว่า $z = f(x+2t) + g(x-2t)$ สอดคล้องสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

ทำแบบฝึกหัด 4.4–4.5 ในหนังสือแคลคูลัส ๒

5 อินทิกรัลของฟังก์ชันสองตัวแปร

5.1 อินทิกรัลของฟังก์ชันสองตัวแปรบนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า



ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบน $D = [a,b] \times [c,d]$ และ $f(x,y) \geq 0$ ทุก $(x,y) \in D$ แล้วค่าของ

$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \times \text{พื้นที่ } R_{ij} = f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta x_i \Delta y_j$$

คือปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อยที่มีความสูง $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ บนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าย่อย R_{ij} ดังนั้น

$$S_{mn} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta y_j \Delta x_i$$

(เรียกว่า **ผลบวกรีมันน์ของ** f **บน** D) จะเป็นผลบวกของปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อยทั้งหมดบน D เราจึงได้ว่า

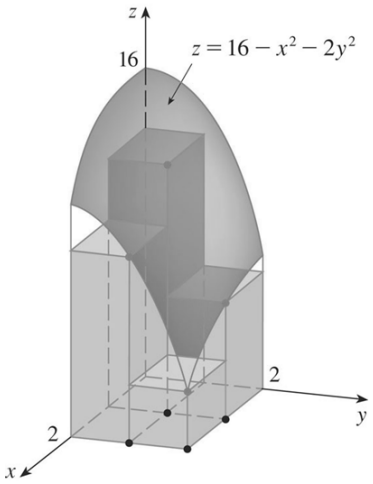
$$\iint_D f\,dA = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} S_{mn}$$

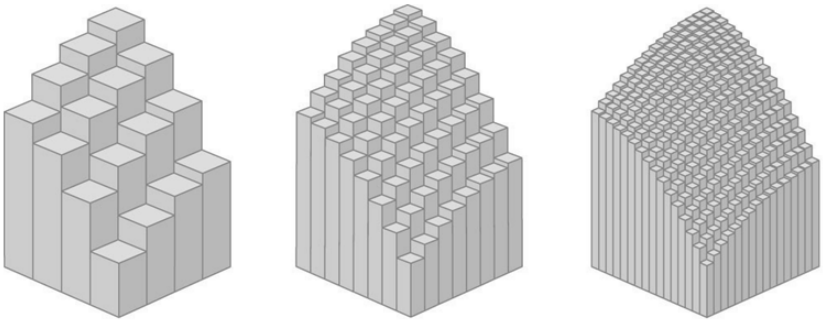
ก็คือ**ปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งอยู่ภายใต้ผิว** $z = f(x,y)$ **บน** $D = [a,b] \times [c,d]$

ทฤษฎีบท 5.1.1 *ให้* $f : D \to \mathbb{R}$ *เมื่อ* $D = [a,b] \times [c,d]$
ถ้า f *เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน* D *แล้วจะได้ว่า*

$$\iint_D f\,dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx$$

ตัวอย่าง 5.1.1 พิจารณาการหาปริมาตรของรูปทรงตันที่อยู่เหนือระนาบ XY ซึ่งอยู่ภายใต้ผิว $z = 16 - x^2 - 2y^2$ บน $D = [0, 2] \times [0, 2]$





(a) $m = n = 4, V \approx 41.5$ (b) $m = n = 8, V \approx 44.875$ (c) $m = n = 16, V \approx 46.46875$

ตัวอย่าง 5.1.2 จงคำนวณค่า $\iint_D xy^2\,dA$ เมื่อ $D = [1,2] \times [-3,0]$

ตัวอย่าง 5.1.3 จงหาค่าของ

1. $\iint_D \frac{2y}{1+x^2}\,dA$ เมื่อ $[0,1]\times[1,3]$

2. $\iint_D xe^y + \frac{y}{x}\,dA$ เมื่อ $[1,e]\times[0,2]$

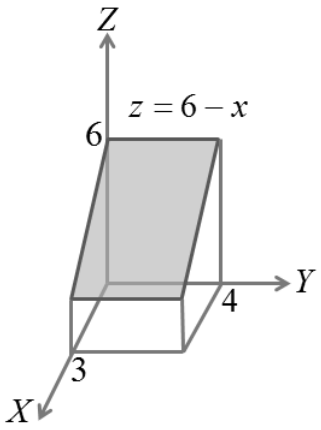
ตัวอย่าง 5.1.4 จงหาค่าของ $\iint_D ye^{x+y^2}\,dA$ เมื่อ $D = [0,1] \times [0,1]$

ตัวอย่าง 5.1.5 จงหาค่าของ $\int_0^{1/2}\int_0^{\pi/2} x\cos(xy)\,dydx$

ตัวอย่าง 5.1.6 จงหาค่าของ $\int_1^3\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+y}}\,dydx$

ตัวอย่าง 5.1.7 จงหาค่าของ $\iint_D e^y \sin\left(\frac{x}{y}\right) dA$ เมื่อ $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [1, 2]$

ตัวอย่าง 5.1.8 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งอยู่ใต้ระนาบ $z = 6 - x$ และเหนือรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $[0, 3] \times [0, 4]$ ดังรูป

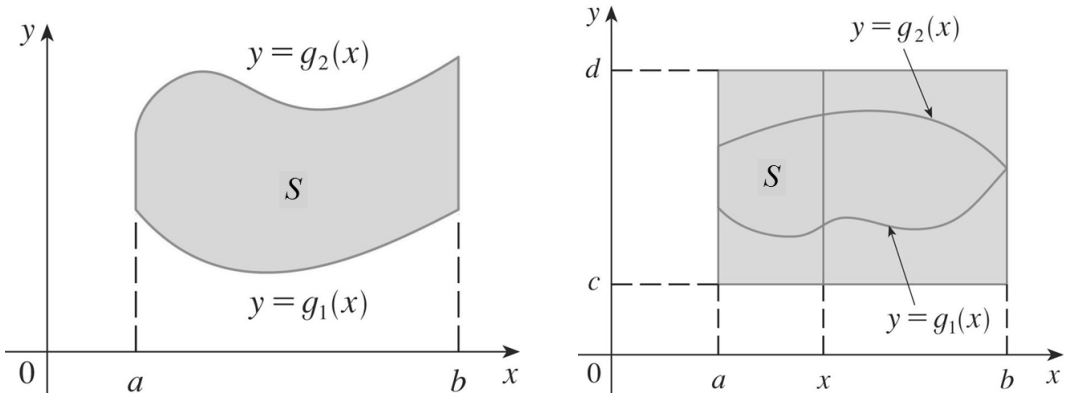


ทำแบบฝึกหัด 5.1 ในหนังสือแคลคูลัส ๒

5.2 อินทิกรัลของฟังก์ชันสองตัวแปรบนโดเมนทั่วไป

ให้ $f : S \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบน

$$S = \{(x, y) \mid a \le x \le b \text{ และ } g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

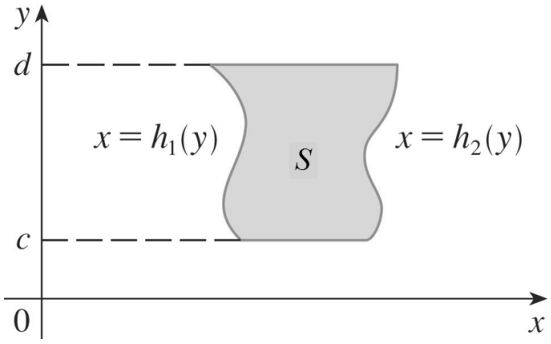


เราจะได้ว่า

$$\iint_S f\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dydx$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเรามี

$$S = \{(x, y) \mid c \le y \le d \text{ และ } h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

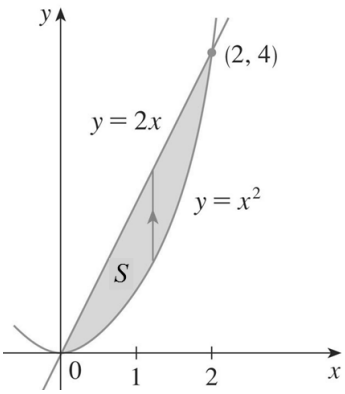


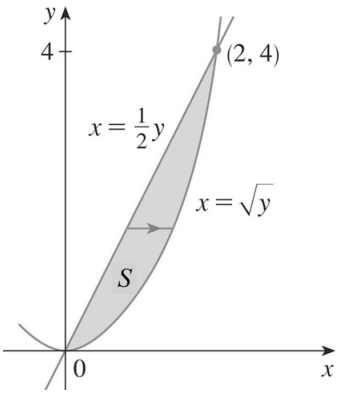
จะได้

$$\iint_S f\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\,dxdy$$

ตัวอย่าง 5.2.1 จงหาค่าของ $\iint_S y - x\,dA$

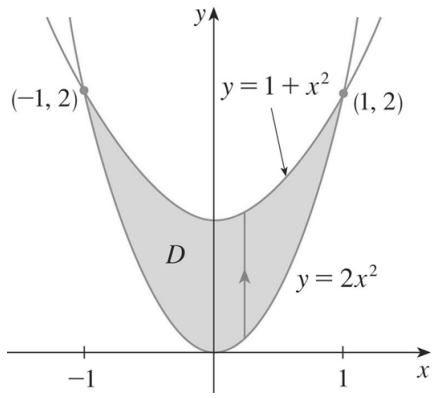
เมื่อ S เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $y = 2x$ และพาราโบลา $y = x^2$





ตัวอย่าง 5.2.2 จงหาค่าของ $\iint_D x^2\,dA$

เมื่อ D เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยพาราโบลา $y = 2x^2$ และ $y = 1 + x^2$



ตัวอย่าง 5.2.3 จงหาค่าของ $\iint_S xe^{y^2}\,dA$

เมื่อ S เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยแกน Y, เส้นตรง $y=4$ และพาราโบลา $y=x^2$ เมื่อ $x \geq 0$

ตัวอย่าง 5.2.4 จงหาค่าของ $\iint_S \frac{\ln|x|}{y^2}\,dA$

เมื่อ S เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $y = x$ และ $y = 2x$ เมื่อ $1 \leq x \leq 3$

ตัวอย่าง 5.2.5 จงเปลี่ยนลำดับของการอินทิเกรตของอินทิกรัลซ้อนต่อไปนี้

1. $\int_0^1 \int_0^{2x} f(x,y)\,dydx$

2. $\int_0^2 \int_0^{y^2} f(x,y)\,dxdy$

ตัวอย่าง 5.2.6 จงหาค่าของอินทิกรัลซ้อนต่อไปนี้

1. $\int_0^{\pi}\int_x^{\pi}\frac{\sin y}{y}\,dydx$

2. $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 \frac{1}{1+x^4}\,dxdy$

ตัวอย่าง 5.2.7 จงเขียนรูปบริเวณของการอินทิเกรตของอินทิกรัลซ้อน

$$\int_0^3 \int_{4y/3}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)\,dxdy$$

และ จงเปลี่ยนลำดับของการอินทิเกรต

ตัวอย่าง 5.2.8 จงหาค่าของ $\int_0^1 \int_0^1 |x-y|\,dydx$

ตัวอย่าง 5.2.9 กำหนดให้ S เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง 3 เส้น คือ

$$y = x,\ y = -x \text{ และ } 2x + y = 3$$

จงเขียนรูปแสดง S และเขียนอินทิกรัลซ้อน $\iint_S f\,dA$ ในระบบพิกัดฉาก

โดยใช้ $dA = dxdy$ และ $dA = dydx$

ตัวอย่าง 5.2.10 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่ปิดล้อมด้วยระนาบ $x + 2y + z = 4$ ในอัฐภาคที่หนึ่ง

ตัวอย่าง 5.2.11 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันเหนือระนาบ XY และใต้ผิว $z = e^{-(x^3+1)}$ บน

$$S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 4 \text{ และ } \sqrt{y} \leq x \leq 2\}$$

พร้อมทั้งเขียนรูปและแรเงาอาณาบริเวณ S

ตัวอย่าง 5.2.12 จงหาค่าของ $\iint_S xy^2\,dA$

เมื่อ S เป็นอาณาบริเวณที่อยู่เหนือเส้นตรง $y = 1 - x$ และอยู่ภายในวงกลม $x^2 + y^2 = 1$

ทำแบบฝึกหัด 5.2 ข้อ 1–5 ในหนังสือแคลคูลัส ๒
(ไม่เรียนประโยชน์ของอินทิกรัลของฟังก์ชันสองตัวแปรหน้า 276–278 และไม่เรียนหัวข้อ 5.3)

6 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation) คือสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันและอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น เช่น

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 2x - 4$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 = e^x$

จาก (1) เราได้ว่า $y = x^2 - 4x + C$ เป็นคำตอบ เรียกว่า **ผลเฉลยทั่วไป (general solution)**
ถ้าเรากำหนดค่าของ y สำหรับบางค่า x เราจะได้ **ผลเฉลยเฉพาะ (particular solution)**
เช่น ถ้าเราสมมติ $y(2) = -1$ ในสมการ (1) จะได้

$$-1 = 2^2 - 4(2) + C \Longrightarrow C = 3$$

ดังนั้น

$y = x^2 - 4x + 3$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (1)

6.1 สมการแยกตัวแปรได้

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งในรูปแบบ

$$g(y)y' = f(x)$$

เรียกว่า **สมการแยกตัวแปรได้ (separable equation)** ซึ่งเราหาผลเฉลยได้โดย

$$\begin{aligned} g(y)\frac{dy}{dx} &= f(x) \\ g(y)\,dy &= f(x)\,dx \\ \int g(y)\,dy &= \int f(x)\,dx \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.1.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $y' = e^{3x}\sin^2 y$

2. $(1+y^2)\,dx + y^2\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$

ตัวอย่าง 6.1.2 จงหาผลเฉลยเฉพาะของ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos x}{1-2y^2} \quad \text{และ} \quad y(0) = 1$$

ทำแบบฝึกหัด 6.1 ในหนังสือแคลคูลัส ๒

6.2 สมการเอกพันธุ์

ตัวอย่าง 6.2.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ

$$2xy\,dy - (y^2 - x^2)\,dx = 0$$

ตัวอย่าง 6.2.2 จงหาผลเฉลยเฉพาะของ

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{2x^3\cos(x^2)}{y} \quad \text{และ} \quad y(\sqrt{\pi}) = 1$$

สังเกตว่าเราสามารถใช้วิธีแทนค่า $v = \dfrac{y}{x}$ สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ที่สามารถเขียนได้ในรูปแบบ

$$\begin{aligned} y' &= g\left(\frac{y}{x}\right) \\ dy &= g\left(\frac{y}{x}\right)\,dx \\ x\,dv + v\,dx &= g(v)\,dx \\ x\,dv &= (g(v) - v)\,dx \\ \frac{1}{g(v)-v}\,dv &= \frac{1}{x}\,dx \end{aligned}$$

ดังเช่นที่แสดงไปในตัวอย่าง 6.2.1

เราเรียก $f(x,y)$ ว่า**ฟังก์ชันเอกพันธุ์ดีกรี** n **(homogeneous function of degree** n**)** ถ้า

$$f(kx, ky) = k^n f(x,y), \qquad k > 0 \tag{6.2.1}$$

เช่น

1. $y^3 - 2xy^2$

2. $x^2 e^{y/x}$

3. $\sqrt{x+y}$

4. $\dfrac{1}{x-2y}$

5. $F\left(\dfrac{y}{x}\right)$

จาก (6.2.1) ถ้า $x > 0$ ให้ $k = \frac{1}{x}$ และ ถ้า $x < 0$ ให้ $k = -\frac{1}{x}$ จะได้

$$f(x,y) = \begin{cases} x^n f\big(1, \frac{y}{x}\big), & \text{ถ้า } x > 0 \\ (-x)^n f\big(-1, -\frac{y}{x}\big), & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งในรูปแบบ

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

เมื่อ $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ดีกรีเดียวกันเรียกว่า**สมการเอกพันธุ์ (homogeneous equation)** ซึ่งสามารถจัดรูปได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = \begin{cases} -\dfrac{M(1,y/x)}{N(1,y/x)}, & \text{ถ้า } x > 0 \\ -\dfrac{M(-1,-y/x)}{N(-1,-y/x)}, & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

ดังนั้น เราอาจแทนค่า $v = \frac{y}{x}$ และหาผลเฉลยได้

ตัวอย่าง 6.2.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ

1. $(x^2y + 2y^3)\,dx - x^3\,dy = 0$

2. $\left(y + y\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx - x\,dy = 0$

3. $\left(\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)dx+\left(\dfrac{1}{y-x}+\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)dy=0$

ตัวอย่าง 6.2.4 จงหาผลเฉลยเฉพาะของ

$$xy' \operatorname{cosec}^2\left(\frac{y}{x}\right) = y \operatorname{cosec}^2\left(\frac{y}{x}\right) - x \quad \text{และ} \quad y(2) = \pi$$

ทำแบบฝึกหัด 6.2 ในหนังสือแคลคูลัส ๒

6.3 สมการแม่นตรง

เราเรียกสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งในรูป

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{6.3.1}$$

ว่า**สมการแม่นตรง (exact equation)** ถ้ามีฟังก์ชัน $u(x,y)$ ซึ่ง

$$d\,u(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

ดังนั้น $u(x,y) = C$ จะเป็นผลเฉลยของสมการแม่นตรง (6.3.1)

จากค่าเชิงอนุพันธ์รวมเราได้

$$du(x,y) = u_x\,dx + u_y\,dy$$

เพราะฉะนั้น

$$M = u_x \quad \text{และ} \quad N = u_y$$

เพราะว่า $u_{xy} = u_{yx}$ ทำให้เรามี

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

นั่นคือ

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ เป็นสมการแม่นตรง ก็ต่อเมื่อ $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

และจาก $u_x = M$ และ $u_y = N$ เรายังได้ว่า

$$u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + k(y)$$

หรือ

$$u(x,y) = \int N(x,y)\,dy + \ell(x)$$

ตัวอย่าง 6.3.1 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $(3x^2y + 2xy)dx + (x^3 + x^2 + 2y)dy = 0$

2. $(e^x - \cos y + \sin 2x)\,dx + (\sqrt{y} + x \sin y)\,dy = 0$

3. $3y(x^2-1)dx + (x^3 + \sec^2 y - 3x)dy = 0$ เมื่อ $y(3) = \frac{\pi}{6}$

4. $[xy\cos(xy) + \sin(xy)]dx + [x^2\cos(xy) + e^y]dy = 0$

ทำแบบฝึกหัด 6.3 ในหนังสือแคลคูลัส ๒

ตัวประกอบอินทิเกรต

ในกรณีที่สมการ

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

*ไม่*เป็นสมการแม่นตรง อาจมีฟังก์ชัน $\mu(x,y)$ มาคูณตลอดสมการ แล้วทำให้สมการกลายเป็นสมการแม่นตรง เราเรียก $\mu(x,y)$ เช่นนี้ว่า**ตัวประกอบอินทิเกรต (integrating factor)** เช่น

$y\,dx - x\,dy = 0$

$3y^2\,dx + 2xy\,dy = 0$

การหาตัวประกอบอินทิเกรต

สมมติว่า $\mu(x,y)$ เป็นตัวประกอบอินทิเกรต ทำให้สมการ

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$$

เป็นสมการแม่นตรง เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\mu M &= \frac{\partial}{\partial x}\mu N\\ \mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} &= \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x}\\ \frac{1}{\mu}\left[N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y}\right] &= \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\end{aligned}$$

ถ้า μ เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว จะได้ $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ ทำให้เรามี

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = f(x)$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\mu}\,d\mu &= \int f(x)\,dx\\ \ln \mu &= \int f(x)\,dx\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\mu = \exp\left(\int f(x)\,dx\right)$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า μ เป็นฟังก์ชันของ y อย่างเดียว จะได้

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = g(y)$$

ดังนั้น

$$\mu = \exp\left(\int g(y)\,dy\right)$$

ตัวอย่าง 6.3.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ

1. $(4xy + 3y^2 - x)dx + x(x + 2y)dy = 0$

2. $y(x+y)dx + (x+2y-1)dy = 0$

3. $(xy - x^2)y' - xy + 1 = 0$

4. $e^x\,dx + (e^x \cot y + 2y \operatorname{cosec} y)\,dy = 0$

ตัวอย่าง 6.3.3 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy^2 - ye^{2x}}{x^2y - 4y^3 - e^{2x}} \qquad \text{เมื่อ} \qquad y(0) = \frac{1}{2}$$

ทำแบบฝึกหัด 6.3.1 ในหนังสือแคลคูลัส ๒

6.4 สมการเชิงเส้น

สมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบ

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{6.4.1}$$

เรียกว่า**สมการเชิงเส้น (linear equation)** ซึ่งจัดรูปได้เป็น

$$(P(x)y - Q(x))dx + dy = 0$$

เพราะว่า

$$\frac{\partial}{\partial y}(P(x)y - Q(x)) = P(x) \quad \text{และ} \quad \frac{\partial\, 1}{\partial x} = 0$$

ดังนั้น สมการ (6.4.1) ไม่เป็นสมการแม่นตรงและมีตัวประกอบอินทิเกรต คือ

$$\mu = \exp\left(\int P(x)\,dx\right)$$

สังเกตว่า

$$\frac{d\mu}{dx} = \exp\left(\int P(x)\,dx\right)P(x) = \mu P(x)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\mu\frac{dy}{dx} + \mu P(x)y &= \mu Q(x) \\
\mu\,dy + y\mu P(x)\,dx &= \mu Q(x)\,dx \\
\mu\,dy + y\,d\mu &= \mu Q(x)\,dx \\
d(\mu y) &= \mu Q(x)\,dx \\
\mu y &= \int \mu Q(x)\,dx
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยของสมการ (6.4.1) คือ

$$y = \frac{1}{\mu}\int \mu Q(x)\,dx \quad \text{เมื่อ} \quad \mu = \exp\left(\int P(x)\,dx\right)$$

ตัวอย่าง 6.4.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ

1. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = xe^{-x^2}$

2. $y' + y\tan x = \sin 2x$

ตัวอย่าง 6.4.2 จงหาผลเฉลยเฉพาะของ

$$(x^2+1)y' = 2xy + x^4 - 1 \quad \text{เมื่อ} \quad y(1) = \pi$$

สมการแบร์นูลลี (Bernoulli equation) คือสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบ

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \tag{6.4.2}$$

ซึ่งหากหารตลอดด้วย y^n จะได้

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

ทำให้เมื่อ $n \neq 1$ เราได้ว่า

$$\frac{1}{1-n}\frac{d}{dx}y^{1-n} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

หรือ

$$\frac{d}{dx}y^{1-n} + (1-n)P(x)y^{1-n} = (1-n)Q(x)$$

ดั้งนั้น ถ้าเราให้ $z = y^{1-n}$ และแทนค่า จะได้สมการในรูปแบบ

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

ซึ่งเป็น "สมการเชิงเส้นในตัวแปร z และ x" และสามารถหาผลเฉลยได้โดยวิธีที่กล่าวมาแล้ว

ตัวอย่าง 6.4.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ

1. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = y^2e^{x^2}$

2. $x\dfrac{dy}{dx} + 6y = -3x^2y^{4/3}$

3. $y^4(xy' + y)\sqrt{1 + x^6} = x$

ตัวอย่าง 6.4.4 จงหาผลเฉลยเฉพาะของ

$$xy' + y = (xy)^2 e^x \quad \text{และ} \quad y(1) = e$$

ทำแบบฝึกหัด 6.4 และ แบบฝึกหัดระคน ในหนังสือแคลคูลัส ๒ หน้า 334