2301234 ข้อทดสอบย่อย/ข้อสอบกลางภาค/ข้อสอบปลายภาคปีการศึกษา 2550

1. โดยใช้เมทริกซ์แต่งเติม และ การดำเนิการแถวมูลฐาน จงพิจารณาว่าระบบเชิงเส้นต่อไปนี้เป็น ระบบเชิงเส้นต้องกัน (มีผลเฉลย) หรือไม่ ถ้าเป็น จงหาผลเฉลยทั่วไปของระบบเชิงเส้นนั้น

(ก) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 + 9x_2 - 7x_3 = 1 \end{cases}$ (ข) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$

2. จงหาค่าของ h ซึ่งทำให้ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ h \end{bmatrix}$ อยู่ใน $\text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

3. จงพิจารณาว่า $S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้นหรือไม่ เพราะเหตุใด

4. เมื่อกำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ จงพิจารณาว่าสมการเมทริกซ์ $A\vec{x} = \vec{b}$ มีผลเฉลย สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ หรือไม่ ถ้าไม่จงหาเงื่อนไขบน b_1, b_2 และ b_3 ซึ่งทำให้สมการนี้มีผลเฉลย

5. จงเติมคำตอบลงในช่องว่าง

1. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

   $2A + B =$ . . . . . , $A(B^T) =$ . . . . . .

2. เมทริกซ์แต่งเติม $\begin{bmatrix} \blacksquare & 0 & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \end{bmatrix}$ เมื่อ $\blacksquare \neq 0$ สมนัยกับระบบเชิงเส้นที่ไม่มีผลเฉลย, มีผลเฉลยชุดเดียว หรือ มีผลเฉลยอนันต์ชุด

   <u>**ตอบ**</u> . . . . . .

3. ค่าของ k ซึ่งทำให้ $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$ ไม่แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^2$ คือ $k =$ . . . . . .

4. ผลเฉลย**ในรูปเวกเตอร์อิงตัวแปรเสริม**ของสมการเชิงเส้น $x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$ คือ . . . . . .

5. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์มาตรฐานสำหรับการแปลงเชิงเส้น T แล้ว $T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) =$ . . . . . .

6. **เมทริกซ์มาตรฐาน**สำหรับการแปลงเชิงเส้น $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ซึ่ง $T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ คือ . . .

6. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ พร้อมแสดงเหตุผลประกอบสั้น ๆ

(ก) หลักของเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^3$

(ข) $T(x_1, x_2) = (|x_2|, x_1)$ เป็นการแปลงเชิงเส้น

(ค) มีการแปลงเชิงเส้น $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ซึ่งหนึ่งต่อหนึ่ง

7. ให้ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ เป็นเวกเตอร์ที่แตกต่างกันใน $\mathbb{R}^4$ ซึ่งไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ จงอธิบายว่าข้อความต่อไปนี้ เป็น**เท็จ** โดยแสดงเหตุผลประกอบ

(ก) $\{\vec{0}_4, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น (ข) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^4$

8. กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 4 & -8 & h \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ h ซึ่งทำให้เซตของหลักของเมทริกซ์ A เป็นเซตอิสระเชิงเส้น

9. จงใช้การดำเนินการแถวเบื้องต้นหาผลเฉลยของระบบเชิงเส้น (ถ้ามี)

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & x_2 & - & 3x_3 & = & -5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 7 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 10 \end{array}$$

10. จงหาผลเฉลยในรูปเวกเตอร์อิงตัวแปรเสริมจากเมทริกซ์แต่งเติม

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 & 0 \\ -2 & -3 & 9 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

11. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 3 & -4 \\ 4 & -8 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ จงหาเวกเตอร์ $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ ทั้งหมดซึ่ง การแปลงเมทริกซ์ $T : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ ส่งไปเวกเตอร์ศูนย์ และ จงพิจารณาว่าเวกเตอร์ $\vec{b}$ อยู่ในเรนจ์ของ T หรือไม่ เพราะเหตุใด

12. กำหนดฟังก์ชัน $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ โดย

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1 - x_3, 2x_2 + x_3, 4x_1 - x_2)$$

สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ จงแสดงว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้นโดยหาเมทริกซ์มาตรฐาน A ซึ่งทำให้ $T : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ พร้อมทั้งพิจารณาว่า T มีสมบัติทั่วถึง หรือ มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง หรือไม่ เพราะเหตุใด

13. จงหาฐานหลักสำหรับ ปริภูมิหลัก (column space) และ ปริภูมิสู่ศูนย์ (null space) ของเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

พร้อมทั้งหา $\operatorname{rank} A$ และ $\operatorname{nullity} A$

14. ให้ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^2$ และ $\mathcal{C} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^3$
ถ้า $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้น ซึ่ง

$$T(\vec{v}_1) = 3\vec{w}_1 + \vec{w}_3 \quad \text{และ} \quad T(\vec{v}_2) = -2\vec{w}_1 + 2\vec{w}_2 - \vec{w}_3$$

(ก) จงหาเมทริกซ์ $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ สำหรับ T สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$ และ $\mathcal{C}$

(ข) ถ้า $\vec{x} = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$ จงหา $[T(\vec{x})]_{\mathcal{C}}$

15. ให้ $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ และ $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^2$ และ $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ของการเปลี่ยนพิกัดจาก $\mathcal{B}$ ไป $\mathcal{B}'$ และ $[\vec{x}]_{\mathcal{B}'}$

16. ให้ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้น ซึ่งกำหนดโดย

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 - x_2)$$

จงหาเมทริกซ์ $[T]_{\mathcal{B}}$ สำหรับ T สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

17. จงตอบคำถามต่อไปนี้พร้อมอธิบายเหตุผลประกอบ หรือ แสดงวิธีทำสั้น ๆ

1) ให้ A เป็น 10×15 เมทริกซ์ ซึ่งมี $\operatorname{nullity} A = 6$ จงหา $\operatorname{rank} A$

2) ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์มิติ 3×3 ซึ่ง $\det A = -1$ และ $\det B = 4$ ถ้า $C = ((2A)^T)^{-1}B^3$ จงหา $\det C$

3) ให้ $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & h \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ h ซึ่งทำให้ $\operatorname{rank} A \neq 2$

4) จงบอกข้อความซึ่งสมมูลกับ "เมทริกซ์จัตุรัส A มิติ $n \times n$ มีเมทริกซ์ผกผัน" จากทฤษฎีบทเมทริกซ์หาตัวผกผันได้ (Invertible Matrix Theorem) มา 2 ข้อความ

5) กำหนดให้ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -5$ จงหา $\begin{vmatrix} d-2a & e-2b & f-2c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$

6) จงหาค่าเจาะจงของเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ ซึ่งสมนัยกับเวกเตอร์เจาะจง $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

18. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ พร้อมแสดงเหตุผลประกอบสั้น ๆ

1) $H = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1x_2 = 0\}$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^2$

2) ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสซึ่งคล้ายกัน แล้ว $\det(A) = \det(B)$

3) ถ้า 0 เป็นค่าเจาะจงของ A แล้ว A ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

19. จงใช้กฎของคราเมอร์หา x_1 ซึ่งสอดคล้องระบบเชิงเส้น

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

20. ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา $\operatorname{nullity} A$ และ $\operatorname{rank} A$ (อธิบายสั้น ๆ)

21. จงให้เหตุผลว่าเซต

$$H = \{(x_1 - 2x_3, x_2, x_2) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$ พร้อมทั้งหาฐานหลัก และ มิติของ H

22. ให้ $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ และ $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^2$
และ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้น กำหนดโดย

$$T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2)$$

สำหรับทุก ๆ $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ จงหา

(ก) $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, เมทริกซ์สำหรับ T สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{B}$ และ $\mathcal{C}$

(ข) $\underset{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}{P}$, เมทริกซ์การเปลี่ยนพิกัดจาก $\mathcal{C}$ ไป $\mathcal{B}$

(ค) $[T]_{\mathcal{C}}$, เมทริกซ์สำหรับ T สัมพัทธ์กับฐานหลัก $\mathcal{C}$ โดยใช้เมทริกซ์ที่ได้ในข้อ (ก) และ (ข)

23. จงแปลงเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

นั่นคือ จงหาเมทริกซ์ไม่เอกฐาน P และ เมทริกซ์ทแยงมุม D ที่ทำให้ $A = PDP^{-1}$ พร้อมทั้งหาสูตรสำหรับ A^k สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก k

24. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ มีพหุนามลักษณะเฉพาะเป็น $-(\lambda-2)^2(\lambda+1)$

จงหาฐานหลักและมิติของปริภูมิเจาะจง A_{-1} และ A_2 พร้อมทั้งพิจารณาว่า A สามารถแปลงเป็นทแยงมุมได้ หรือไม่ เพราะเหตุใด

25. ให้ $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ และ $\vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ก) จงแสดงว่าเซต S เป็นเซตเชิงตั้งฉาก

(ข) ให้ $H = \operatorname{Span} S$ จงแยกเวกเตอร์ $\vec{y}$ เป็นผลบวกของเวกเตอร์ใน H และ $H^{\perp}$

26. ให้ $H = \operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

(ก) จงหาฐานหลักสำหรับ $H^{\perp}$

(ข) จงใช้กระบวนการกราม-ชมิดท์สร้างฐานหลักเชิงตั้งฉาก<u>**ปรกติ**</u>สำหรับ $H^{\perp}$

27. จงหาผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{aligned} x_1' &= & & x_2 \\ x_2' &= -3x_1 & + & 4x_2 \end{aligned}$$

28. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ พร้อมแสดงเหตุผลประกอบสั้น ๆ

1) ระยะทางระหว่าง $\vec{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ และเส้นตรง $\operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ เท่ากับ $2\sqrt{10}$

2) ถ้า U เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก แล้ว U^T เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก

29. กำหนดให้ $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยใน $\mathbb{R}^n$ ซึ่งตั้งฉากกัน และ
U เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากปรกติมิติ $n \times n$

1) จงแสดงว่า $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น

2) จงแสดงว่า $\{U\vec{v}, U\vec{w}\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติ

3) จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\vec{v} - 2\vec{w}$

30. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 1 & -5 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \\ -9 \end{bmatrix}$

1) จงแสดงว่าเซตของหลักของเมทริกซ์ A เป็นเซตเชิงตั้งฉาก

2) จงหาผลเฉลยกำลังสองน้อยสุดของระบบเชิงเส้น $A\vec{x} = \vec{b}$

3) จงหาค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองน้อยสุดของการประมาณในข้อ 2) (คำนวณให้เป็นตัวเลข)

31. จงหาการแยกตัวประกอบ QR ของเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (คำนวณให้เรียบร้อย)

32. กำหนดให้หลักของเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

จงใช้กระบวนการกราม-ชมิดท์สร้างฐานหลักเชิงตั้งฉาก**<u>ปรกติ</u>**สำหรับ $\operatorname{Col} A$

33. จงหา**<u>สมการ</u>**ของเส้นกำลังสองน้อยสุดจากจุดข้อมูล $(-1,-1),(0,1),(1,1),(2,3)$

34. จงพิจารณาว่าเซตต่อไปนี้เป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ที่กำหนดให้หรือไม่ เพราะเหตุใด

(ก) $W_1 = \{p(x) \in F[x] : p(0) = p(1)\} \subseteq F[x]$

(ข) $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : ad = b \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$

35. ให้ $S = \{2+x, x+x^2, 2x-x^2\}$ จงพิจารณาว่า S เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}_2[x]$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

36. จงตอบคำถามต่อไปนี้

(ก) ให้ A เป็น 2×2 เมทริกซ์ ซึ่งมี $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์เจาะจงซึ่งสมนัยค่าเจาะจง $\lambda = -4$ และ $\lambda = 2$ ตามลำดับ จงหาการแยกเชิงสเปกตรัมของเมทริกซ์ A

(ข) ให้ $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{C}$ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่ง $T(1+x) = i,\ T(x+x^2) = 1+i$ และ $T(1-2x^2) = 2-i$ จงหา $T(3-x-5x^2)$

(ค) ให้ $\mathcal{B} = \{e^{-x}, 2xe^{-x}\}$ เป็นฐานหลักสำหรับ $H = \operatorname{Span}\mathcal{B}$ ซึ่งปริภูมิย่อยของ $C^1(-\infty,\infty)$ และ $D : H \to H$ กำหนดโดย $D(f) = f'$ สำหรับทุก ๆ ฟังก์ชัน $f \in H$ จงหา $[D]_{\mathcal{B}}$

(ง) ให้ $V = C^0[a,b]$ เป็นปริภูมิของฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0,1]$ ทั้งหมด ซึ่งเป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ สำหรับฟังก์ชันต่อเนื่อง f และ g ใน $C^0[0,1]$ เรากำหนดผลคูณภายในบน V โดย

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางเดียวกับ $f(x) = 1 - 2\sqrt{x}$

37. จงแปลงเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งมีสมการลักษณะเฉพาะเป็น $(2-\lambda)(\lambda+1)^2 = 0$ เป็นทแยงมุมเชิงตั้งฉาก นั่นคือ จงหาเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก**<u>ปรกติ</u>** P และเมทริกซ์ทแยงมุม D ที่ทำให้ $A = PDP^T$

38. กำหนดให้

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ b \\ a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 : a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \text{ และ } W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} d \\ e \\ 0 \\ d \\ e \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 : d,e \in \mathbb{R} \right\}$$

เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^5$ (ไม่ต้องแสดง)

(ก) จงหาฐานหลัก และ มิติของ W_1 และ W_2

(ข) จงหาฐานหลัก และ มิติของ $W_1 + W_2$ และ $W_1 \cap W_2$

39. กำหนดรูปแบบกำลังสอง $Q(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 7x_2^2 - 4x_1x_2$ สำหรับทุก ๆ $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

(ก) จงหาเมทริกซ์ของรูปแบบกำลังสอง Q

(ข) จงพิจารณาว่า Q เป็นบวกแน่นอน เป็นลบแน่นอน หรือ ไม่แน่นอน

(ค) จงเปลี่ยนตัวแปร $\vec{x} = P\vec{y}$ ซึ่งทำให้ Q ไม่มีพจน์ผลคูณไขว้

40. ให้ $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ กำหนดโดย

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + bx + (c - 2d)x^2$$

สำหรับทุก ๆ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

(ก) จงแสดงว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้น

(ข) จงหาฐานหลักสำหรับเคอร์เนลของ T และ ฐานหลักสำหรับเรนจ์ของ T

(ค) จงหา $\operatorname{nullity} T$ และ $\operatorname{rank} T$

(ง) จงพิจารณาว่า T มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง หรือ มีสมบัติทั่วถึง หรือไม่ เพราะเหตุใด

41. สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ และ $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ใน $\mathbb{R}^3$ กำหนด

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 2u_2v_2 + u_2v_3 + u_3v_2 + 4u_3v_3$$

(ก) จงแสดงว่าการกำหนดนี้เป็นผลคูณภายในบน $\mathbb{R}^3$

(ข) โดยใช้ผลคูณภายในข้างต้น และ กระบวนการกราม-ชมิดท์ จงสร้างฐานหลักเชิงตั้งฉาก**<u>ปรกติ</u>** จากฐานหลักมาตรฐานสำหรับ $\mathbb{R}^3$