สมมติฐานของรีมันน์ (Riemann's hypothesis)

ยศนันต์ มีมาก[†]

- **ฟังก์ชันรีมันน์ซีตา (Riemann's zeta function)** กำหนดโดย

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\,\text{prime}} \frac{1}{1-1/p^s} \quad \text{เมื่อ } \sigma = \operatorname{Re} s > 1$$

  ซึ่งจะได้ว่า ζ เป็น holomorphic function และมีค่า $\neq 0$ บน half plane $\sigma > 1$
- โดยปกติฟังก์ชันนี้ใช้ศึกษาการกระจายของจำนวนเฉพาะ และนำไปใช้เป็นเครื่องมือหลักของการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่เรียกว่า Prime Number Theorem (Hadamard and de la Vallée Poussin, independently, 1893): 'จำนวนเฉพาะที่ $\leq x$ จะมีอยู่จำนวนพอ ๆ กับค่าของ $\dfrac{x}{\ln x}$ เมื่อ x มีค่ามาก'
- ในปี 1860 รีมันน์ได้เขียนบทความ (ที่ต่อมาถูกเรียกว่า Riemann's memoir) ขึ้น ซึ่งถือกันว่าเป็นบทความทางทฤษฎีจำนวนเพียงบทความเดียวของเขา รีมันน์ได้แสดงว่าฟังก์ชันรีมันน์ซีตาสามารถขยายอย่างต่อเนื่องและวิเคราะห์ (มี analytic continuation) ไปบน $\mathbb{C}$ โดยจะเป็น meromorphic function ซึ่งมี simple pole ที่ $s = 1$ และมี residue เป็น 1) และสอดคล้องสมการเชิงฟังก์ชัน

$$\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\tfrac{1}{2}s)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1}{2}(1-s)}\Gamma(\tfrac{1}{2}(1-s))\zeta(1-s)$$

- สังเกตว่า ฟังก์ชันทางซ้ายมือเป็นฟังก์ชันคู่บนตัวแปร $s-\frac{1}{2}$ และสมการเชิงฟังก์ชันนี้ทำให้เราสรุปสมบัติของ ζ เมื่อ $\sigma < 0$ ได้โดยตรงจาก $\sigma > 1$ โดยสมบัติที่สำคัญอย่างหนึ่งคือ จาก $\zeta(s) \neq 0$ เมื่อ $\sigma > 1$ ดังนั้น ถ้า s ซึ่งมีส่วนจริง $\sigma < 0$ ทำให้ $\zeta(s) = 0$ แล้วจะได้ว่า s เหล่านั้นจะต้องเป็น pole ของ $\Gamma(\frac{1}{2}s)$ เพราะฉะนั้น s ที่มีส่วนจริงเป็นลบที่ทำให้ $\zeta(s) = 0$ คือ $s = -2, -4, -6, \ldots$ ซึ่งเราเรียก s ชนิดนี้ว่า trivial zeros และอาณาบริเวณที่ยังไม่ทราบ zero ของ ζ คือแถบซึ่ง $0 \leq \sigma \leq 1$ ที่จะเรียกว่า 'critical strip'
- รีมันน์ได้คาดการณ์ว่าจำนวนเชิงซ้อน s ใน critical strip ที่จะทำให้ $\zeta(s)$ มีค่าเท่ากับ 0 นั้นจะมีอยู่เป็นจำนวนอนันต์ตัวและเรียงอย่างเป็นระบบโดยจะมีสมมาตรกับแกนจริง (แกน X) และ *เส้นตรง* $\sigma = \frac{1}{2}$ *(จากสมการเชิงฟังก์ชัน)* ซึ่ง von Mangoldt สามารถประมาณจำนวนของศูนย์ของ ζ ใน critical strip เมื่อ $0 \leq \operatorname{Im} s \leq T$ เป็น $\frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\ln T)$ ได้อย่างสมบูรณ์เมื่อปี 1905
- ข้อคาดการณ์ที่เหลืออยู่ที่ถูกเรียกว่า Riemann's hypothesis คือ "จำนวนเชิงซ้อน s ใน critical strip ที่จะทำให้ $\zeta(s)$ มีค่าเท่ากับ 0 นั้นจะมีส่วนจริงเท่ากับ $\frac{1}{2}$ หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งคือ จะอยู่บนแกนกลางของ critical strip เสมอ"

อ้างอิง Davanport, H., *Multiplicative Number Theory*, Springer, New York, 1967.

[†]ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย