6 การแก้แบบจำลองเชิงพลวัตแบบอินฟินิตฮอไรซอนแบบสโตแคสติกโดยการทำให้เป็นล็อกเส้นตรง

บทนี้เราศึกษาการแก้แบบจำลองเชิงพลวัตแบบอินฟินิตฮอไรซอน (infinite horizon) โดยวิธีทำให้เป็นล็อกเส้นตรง (log linearization) แบบจำลองที่เราศึกษาในบทนี้อยู่ในกลุ่มแบบจำลองวัฏจักรธุรกิจ (business cycle model) ส่วนที่ 6.1 และ 6.2 เราศึกษาการแก้แบบจำลองแบบอินฟินิตฮอไรซอนด้วยวิธีเชิงสัญลักษณ์และข้อจำกัดของวิธีเชิงสัญลักษณ์ ส่วนที่ 6.3 ทบทวนความรู้พื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการแก้แบบจำลองด้วยวิธีทำให้เป็นล็อกเส้นตรง ส่วนที่ 6.4 แสดงวิธีการแก้แบบจำลอง ด้วยวิธีทำให้เป็นล็อกเส้นตรง ส่วนที่ 6.5 และ 6.6 ประยุกต์วิธีทำให้เป็นล็อกเส้นตรงในการแก้แบบจำลองทางการคลังและการเงิน ส่วนสุดท้ายของบทนี้เราจะศึกษาวิธีการเดาและจับคู่สัมประสิทธิ์ (guess and coefficient matching)

6.1 การแก้แบบจำลองอินฟินิตฮอไรซอนด้วยวิธีเชิงสัญลักษณ์

ส่วนนี้แสดงหลักการทั่วไป (general principle) สำหรับแก้ปัญหาอินฟินิตฮอไรซอนด้วยวิธีเชิงสัญลักษณ์จากตัวอย่างปัญหาการบริโภคในแบบจำลองที่มีฟังก์ชันการผลิตเป็นเส้นตรงดังนี้

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

ภายใต้เงื่อนไข $k_{t+1} = k_t - c_t$, $u(c_t) = \ln(c_t)$, $k_1 = 1$, $\beta = 0.9$

ปัญหานี้จะคล้ายกับปัญหาที่เราศึกษาในส่วนที่ 5.2

เป้าหมายของการแก้แบบจำลองในบทนี้การหาค่าของตัวแปรทุกตัวให้อยู่ในรูปตัวแปรเลือก (choice variable) ณ เวลา t ให้อยู่ในรูปตัวแปรสถานะ [1](state variable) k_t และหาสมการกำหนดพลวัตตัวแปรสถานะ สำหรับแบบจำลองด้านบนตัวแปรเลือกและตัวแปรสถานะคือ c_t และ k_t ตามลำดับ

เหมือนที่ได้แสดงไปในส่วนที่ 5.2 เราสามารถเริ่มก้ปัญหานี้โดยหาของ c_1 โดยจากสามสมการคือ

1. สมการออยเลอร์: $c_{t+1} = \beta c_t$
2. ข้อจำกัดทางทรัพยากร: $k_{t+1} = k_1 - c_1 - c_2 - ... - c_t$

[1] ตัวแปรเลือกคือตัวแปรที่ผู้บริโภคเลือกในเวลา t เพื่อทำให้เกิดอรรถประโยชน์สูงสุด ตัวแปรสถานะคือตัวแปรที่สะท้อนข้อมูลที่จำเป็นสำหรับการตัดสินในในเวลา t

3. เงื่อนไขทราเวอซอริตี (traversality condition) $\lim_{t\to\infty} k_t = 0$.

ความหมายของเงื่อนไขทราเวอร์ซอลิตีในแบบจำลองนี้คือ ระดับสินค้าทุนในเวลาสุดท้าย ($t \to \infty$)จะต้องมีค่าเป็นศูนย์ จากสามสมการนี้เราสามารถหาค่า c_1 โดยการแทนสมการออยเลอร์และข้อจำกัดทางทรัพยากรลงในเงื่อนไขทราเวอซอริตีดังนี้

$$\lim_{t\to\infty} k_t = \lim_{t\to\infty} k_{t+1} = 0 = \lim_{t\to\infty}(k_1 - \sum_{i=1}^{t} c_1) = k_1 - c_1(1+\beta+\beta^2+...) \Rightarrow$$

$$c_1 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t = k_1 \Rightarrow \frac{c_1}{1-\beta} = k_1 \Rightarrow c_1 = (1-\beta)k_1$$

เมื่อเราได้ c_1 ในรูป k_1 แล้วเราสามารถหาค่า k_2 ในรูป k_1 และ c_2 ในรูป k_2 ดังนี้

$$k_2 = k_1 - c_1 = k_1 - (1-\beta)k_1 = \beta k_1$$
$$c_2 = \beta c_1 = \beta(1-\beta)k_1 = (1-\beta)k_2$$
$$k_3 = k_2 - c_2 = \beta k_2$$

ในทำนองเดียวกันเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$c_t = (1-\beta)k_t$$
$$k_{t+1} = \beta k_t$$

สำหรับ $t = 1,2,3,...$

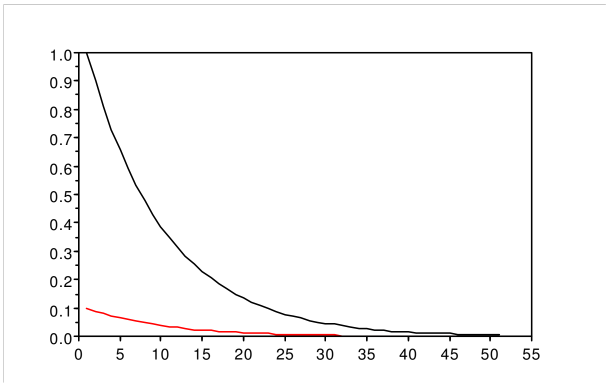
ในปัญหาอินฟินิตฮอไรซอนความสัมพันธ์ของ c_t กับ k_t นั้นไม่ขึ้นอยู่กับเวลา (time invariant) ซึ่งเป็นคุณสมบัติโดยทั่วไป (common characterististic) ของคำตอบที่ได้จากแบบจำลองอินฟินิตฮอร์ไรซอน

สมการ $c_t = (1-\beta)k_t$ แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรเลือก (choice variable) c_t กับตัวแปรสถานะ (state variable) c_t ส่วนสมการ $k_{t+1} = \beta k_t$ แสดงพลวัตของตัวแปรสถานะ (dynamics of state variables) k_t จากสองสมการนี้เราสามารถหาค่า c_t และ k_t สำหรับทุก t และสามารถซิมูเลทอนุกรมเวลา c_t และ k_t ตามโปรแกรมด้านล่างนี้

การแก้แบบจำลองอินฟินิตฮอไรซอนด้วยวิธีเชิงสัญลักษณ์

```
clear; b=0.9, k(1) = 1
for t=1:50
 c(t) = (1-b)*k(t);
 k(t+1) = b*k(t);
end
clf; plot(c, 'red'); plot(k, 'black');
```

ผลที่ได้จากโปรแกรม



6.1.1 รูปแบบทั่วไปของเงื่อนไขทราเวอร์ซอลิตี

สำหรับแบบจำลองในส่วน 6.1 เงื่อนไขทราเวอร์ซอลิตีที่เราใช้คือ $\lim_{t\to\infty} k_t = 0$ เงื่อนไขนี้เป็นกรณีพิเศษ (special case) สำหรับแบบจำลองในส่วน 6.1 เท่านั้น รูปแบบทั่วไป (general case) ของเงื่อนไขทราเวอซอลิตีคือ $\lim_{t\to\infty} \beta^t u'(c_t)k_{t+1} = 0$ เงื่อนไขนี้มีความหมายว่าผู้บริโภคจะไม่เหลือสินค้าทุนไว้หลังจากที่เสียชีวิต ($k_{t+1} = 0$) แล้ว

สำหรับแบบจำลองที่ไม่ซับซ้อนมากนักเงื่อนไข $\lim_{t\to\infty} \beta^t u'(c_t)k_{t+1} = 0$ จะเทียบเท่า (equivalent) กับเงื่อนไข $\lim_{t\to\infty} k_t = k^*$ โดยที่ k^* คือระดับสินค้าทุนที่สภาวะคงตัว (steady state)[2] หรือเราอาจกล่าวได้ว่าเงื่อนไขทราเวอร์ซอลิตีเป็นเงื่อนไขที่ทำให้เกิดสภาวะคงตัวในระยะยาว เนื่องจากแบบจำลองที่เราจะศึกษาต่อไปจะเป็นแบบจำลองที่ไม่ซับซ้อนมากนัก ดังนั้นเพื่อความง่ายต่อการเข้าใจเราจะใช้เงื่อนไขทราเวอร์ซอลิตีในรูป $\lim_{t\to\infty} k_t = k^*$

6.2 การแก้แบบจำลองแบบสโตแคสติกอินฟินิตฮอไรซอนด้วยวิธีเชิงสัญลักษณ์

แบบจำลองที่เราได้ศึกษาในบทที่ 5 และส่วนที่ 6.1 เป็นแบบจำลองแบบที่ไม่มีความไม่แน่นอนหรือนอนสโตแคสติก (non-stochastic) ทั้งหมด ในส่วนนี้เราจะศึกษาแบบจำลองที่มีความไม่แน่นอนหรือแบบจำลองที่มีลักษณะสโตแคสติก (stochastic model) โดยจะเริ่มศึกษาการแก้แบบจำลองระบบเศรษฐกิจเปิดขนาดเล็ก (small open economy) ด้านล่างนี้

$$\max_{c_t, k_{t+1}} E_1\left[\sum_{t=1}^{\infty} \beta^t u(c_t)\right]$$

ภายใต้เงื่อนไข $k_{t+1} = (1+r)k_t + y_t - c_t, \quad u(c_t) = \alpha c_t - \frac{\gamma}{2} c_t^2$

---

[2] จะเห็นได้ว่า $\lim_{t\to\infty} k_t = k^* \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \beta^t u'(c_t)k_{t+1} = u'(c^*)k^* \lim_{t\to\infty} \beta^t = 0$

$$k_1 = 1,\ prob(y_t = 0) = prob(y_t = 1) = \frac{1}{2}, \beta = 0.9,\ \beta(1+r) = 1$$

โดยที่ $E_t[.]$ คือฟังก์ชันค่าคาดหวัง (expectation function) ภายใต้ข้อมูล ณ เวลา t และ k_t คือปริมาณสินค้าทุน r คืออัตราดอกเบี้ยของโลกโดยกำหนดให้มีค่าคงที่โดยที่ $\beta(1+r) = 1$ หรือ $r = 1/\beta - 1$, y_t คือระดับผลผลิต $prob(.)$ คือฟังก์ชันความน่าจะเป็น (probability function) จะเห็นได้ว่าแบบจำลองนี้ มีความไม่แน่นอนอันเกิดจากความไม่แน่นอนของระดับผลผลิต

แบบจำลองนี้มีลักษณะพิเศษคือ มีฟังก์ชันการผลิตเป็นเส้นตรงและฟังก์ชันอรรถประโยชน์เป็นฟังก์ชันควอดดราติก (quadratic function) ลักษณะพิเศษสองข้อนี้ทำให้สมการออยเลอร์และข้อจำกัดทรัพยากรมีลักษณะเป็นสมการเส้นตรง (linear equation) ลักษณะพิเศษนี้ทำให้เราสามารถแก้ปัญหานี้ด้วยวิธีการเชิงสัญลักษณ์ได้ หากไม่มีคุณสมบัติพิเศษนี้เราจะไม่สามารถแก้แบบจำลองด้วยวิธีการเชิงสัญลักษณ์ได้

ตัวแปรสถานะในแบบจำลองนี้คือ k_t และ y_t ในการแก้แบบจำลองนี้เราต้องหาค่าของตัวแปรเลือก c_t ในรูปของ k_t และ y_t เราสามารถหาค่า c_t ในรูปของตัวแปรสถานะ โดยการใช้สมการออยเลอร์ร่วมกับข้อจำกัดทรัพยากรและเงื่อนไขทราเวอร์ซอลิตีดังนี้

จากสมการของลากรานจ์ดังต่อไปนี้

$$L = E_t \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \left[(\alpha c_t - \frac{\gamma}{2} c_t^2) + \lambda_t \big((1+r)k_t + y_t - c_t - k_{t+1}\big) \right]$$

จากการหาค่าอนุพันธ์ของ L เราจะได้เงื่อนไขอนุพันธ์อันดับหนึ่งดังนี้

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = 0 \Rightarrow u'(c_t) = \lambda_t$$

$$\frac{\partial L}{\partial k_{t+1}} = 0 \Rightarrow \lambda_t = \beta E_t \lambda_{t+1}(1+r)$$

จากเงื่อนไขอนุพันธ์อันดับหนึ่ง เราสามารถจัดรูปเป็นสมการออยเลอร์ดังนี้

$$u'(c_t) = \beta(1+r)E_t[u'(c_{t+1})]$$

$$\alpha - \gamma c_t = \beta(1+r)E_t[\alpha - \gamma c_{t+1}]$$

$$\alpha - \gamma c_t = \beta(1+r)E_t[\alpha - \gamma c_{t+1}]$$

$$\alpha - \gamma c_t = E_t[\alpha - \gamma c_{t+1}]$$

$$\alpha - \gamma c_t = \alpha + \gamma E_t[c_{t+1}]$$

$$E_t(c_{t+1}) = c_t$$

เงื่อนไขทราเวซอลิตีสำหรับปัญหานี้ที่เวลา $t = 1$ คือ

$$E_1 \lim_{t\to\infty} k_t = k^*$$

จากข้อจำกัดทรัพยากร

$$k_2 = (1+r)k_1 + y_1 - c_1$$
$$k_3 = (1+r)k_2 + y_2 - c_2$$

จะได้ว่า

$$k_3 = (1+r)((1+r)k_1 + y_1 - c_1) + y_2 - c_2$$
$$k_3 = (1+r)^2 k_1 + (1+r)[y_1 - c_1] + y_2 - c_2$$
$$\frac{k_3}{(1+r)^2} = k_1 + \frac{y_1 - c_1}{1+r} + \frac{y_2 - c_2}{(1+r)^2}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{k_{t+1}}{(1+r)^t} = k_1 + \sum_{i=1}^{t} \frac{y_i - c_i}{(1+r)^i}$$

สมการนี้แสดงว่ามูลค่าปัจจุบันของสินทรัพย์ในอนาคตจะเท่ากับมูลค่าในปัจจุบันของสินทรัพย์ในปัจจุบันบวกกว่าผลรวมของมูลค่าปัจจุบันของการออม $y_i - c_i$ ที่จะเกิดขึ้นในอนาคต

ลิมิตของสมการ

$$\frac{k_{t+1}}{(1+r)^t} = k_1 + \sum_{i=1}^{t} \frac{y_i - c_i}{(1+r)^i}$$

เมื่อ t มีค่าเข้าใกล้อนันต์คือ

$$\lim_{t\to\infty} \frac{k_{t+1}}{(1+r)^t} = k_1 + \lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{t} \frac{y_i - c_i}{(1+r)^i}$$

ค่าคาดหวังของสมการนี้เมื่อ $t = 1$ คือ

$$E_1 \lim_{t\to\infty} \frac{k_{t+1}}{(1+r)^t} = k_1 + E_1 \lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{t} \frac{y_i - c_i}{(1+r)^i}$$

จากเงื่อนไขทราเวอร์ซอลิตีจะได้ว่า

$$E_1 \lim_{t\to\infty} \frac{k_{t+1}}{(1+r)^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{E_1[k_{t+1}]}{(1+r)^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{k^*}{(1+r)^t} = 0$$

ดังนั้น

$$0 = k_1 + E_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i - c_i}{(1+r)^i}$$
$$E_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{(1+r)^i} = k_1 + E_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{(1+r)^i}$$

สมการนี้แสดงว่ามูลค่าปัจจุบันของการบริโภคตลอดชีวิต ต้องมีค่าเท่ากับมูลค่าปัจจุบันของทรัพย์สินรวมกับรายได้ตลอดชีวิต เมื่อแทนค่า $\beta = 1/(1+r)$ เราสามารถเปลี่ยนรูปสมการเป็น

$$E_1 \sum_{i=1}^{\infty} \beta^i c_i = k_1 + E_1 \sum_{i=1}^{\infty} \beta^i y_i \ ; \ \ \beta = 1/(1+r)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta^i c_1 = k_1 + \beta y_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\beta^i}{2}$$

$$\frac{\beta c_1}{1-\beta} = k_1 + \beta y_1 + \frac{1}{2}\frac{\beta^2}{1-\beta}$$

$$c_1 = \frac{1-\beta}{\beta} k_1 + (1-\beta) y_1 + \frac{\beta}{2}$$

ดังนั้น

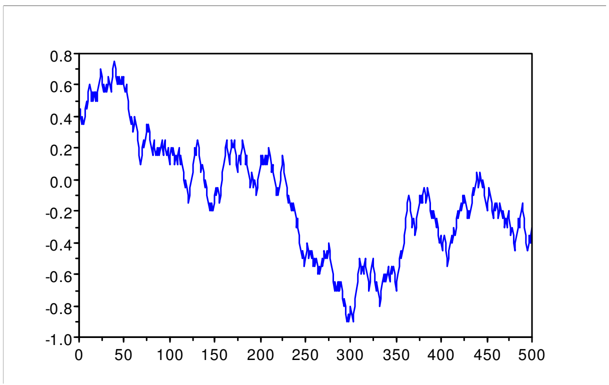
$$c_t = \frac{1-\beta}{\beta} k_t + (1-\beta) y_t + \frac{\beta}{2} \quad \text{และ} \quad k_{t+1} = (1+r)k_t + y_t - c_t$$

สำหรับทุกค่า t สมการสองสมการสุดท้ายบอกถึง c_t ในรูปตัวแปรสถานะ k_t และ y_t และพลวัตของ k_t เราสามารถเขียนโปรแกรมเพื่อแสดงค่าระดับการบริโภคได้ดังนี้

แบบจำลองแบบสโตแคสติกอินฟินิตฮอไรซอน

```
clear; k(1) = 0; b = 0.9;  r = 1/b-1;
y = grand(1000, 1, 'uin', 0,1);
for t=1:500
 c(t) = (1-b)/b*k(t) + (1-b)*y(t) + b/2;
 k(t+1) = (1+r)*k(t) + y(t) - c(t);
end
clf; plot(c);
```

ผลที่ได้จากโปรแกรม



จะสังเกตได้ว่ากราฟของระดับการบริโภคที่ได้จะมีลักษณะเป็นการเดินสุ่ม (random walk) สอดคล้องกับสมการออยเลอร์ $c_t = E_t(c_{t+1})$ โดยกราฟที่ได้นี้จะมีลักษณะเปลี่ยนไปตามค่าของ y_t ที่ถูกสุ่มได้จากโปรแกรมแต่ละครั้ง

6.3 ความรู้พื้นฐานสำหรับการแก้ปัญหาอินฟินิตฮอร์ไรซอนด้วยวิธีทำให้เป็นล็อกเส้นตรง

6.3.1 วิธีทำให้เป็นล็อกเส้นตรง

เป็นที่ทราบกันดีในทางคณิตศาสตร์ การแก้ปัญหาระบบสมการที่มีลักษณะไม่เป็นเส้นตรงโดยตรงมีความซับซ้อนและเป็นไปได้ยาก เทคนิคถูกใช้อย่างแพร่หลายในการแก้หาคำตอบของระบบสมการที่ไม่เป็นเส้นตรงคือการเปลี่ยนระบบสมการที่ไม่เป็นเส้นตรงให้อยู่ในรูปเส้นตรงโดยใช้การประมาณของเทย์เลอร์ (Taylor's approximation) ก่อน

การประมาณของเทย์เลอร์ทำได้โดยขั้นตอนดังนี้ หากเรามีสมการเริ่มต้นที่ไม่เป็นเส้นตรง

$$y = f(x)$$

เมื่อเราโทเทลดิฟเฟอเร็นชิเอท (total differentiate) จะได้ว่า

$$dy = f^{/}(x)dx$$

เมื่อเราประมาณสมการนี้รอบจุด (x_0, y_0) จะได้ว่า

$$\Delta y \approx f^{/}(x_0)\Delta x$$

โดยที่ $\Delta y \equiv y - y_0$, $\Delta x \equiv x - x_0$

ในทางเศรษฐศาสตร์นิยมใช้การประมาณแบบล็อกเส้นตรงเนื่องจากการประมาณแบบนี้จะทำให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการเจริญเติบโตของตัวแปรในแบบจำลองซึ่งง่ายต่อการทำความเข้าใจในทางเศรษฐศาสตร์ การประมาณแบบแบบล็อกเส้นตรงทำได้ดังนี้ จากสมการ

$$y = f(x)$$

เมื่อทำให้เป็นรูปล็อก

$$\ln(y) = \ln(f(x))$$

โทเทลดิฟเฟอเร็นชิเอท (total differentiate) จะได้

$$d\ln(y) = d\ln(f(x))$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{f^{/}(x)}{f(x)}dx$$

เมื่อเราประมาณสมการนี้รอบจุด (x_0, y_0) จะได้ว่า

$$\frac{y - y_0}{y_0} \approx \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}(x - x_0)$$

$$\frac{y - y_0}{y_0} \approx \frac{f'(x_0)x_0}{f(x_0)}\frac{x - x_0}{x_0}$$

$$\hat{y} \approx \frac{f'(x_0)x_0}{f(x_0)}\hat{x} = \frac{f'(x_0)x_0}{y_0}\hat{x}$$

โดยที่ $\hat{z} = \dfrac{z - z_0}{z_0}$ และความหมายของ $\hat{z}$ คือความเปลี่ยนแปลงหรือระดับการเจริญโตของของ z เมื่อเทียบกับค่า z_0

เพื่อความง่ายแก่การเข้าใจเราจะใช้สัญลักษณ์ $=$ แทนสัญลักษณ์ $\approx$และสมมติว่าความผิดพลาดจากการประมาณมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น $\hat{y} \approx \dfrac{f'(x_0)x_0}{f(x_0)}\hat{x}$ จะเปลี่ยนเป็น

$$\hat{y} = \frac{f'(x_0)x_0}{y_0}\hat{x}$$

สมการข้างต้นนี้สามารถขยายให้ใช้กับกรณีของฟังก์ชัน 2 ตัวแปร: $y = f(x,z)$ ได้ดังนี้

$$\hat{y} = \frac{f_x(x_0, z_0)x_0}{y_0}\hat{x} + \frac{f_x(x_0, z_0)}{y_0}\hat{z}$$

จากสมการนี้เราสามารถสร้างกฎพื้นฐานของวิธีการทำให้เป็นล็อกเส้นตรงได้ 4 กฎดังนี้

1) กฎค่าคงที่: $y = \alpha \rightarrow \hat{y} = 0$

2) กฎการบวก: $y = x \pm z \rightarrow \hat{y} = s_x\hat{x} \pm s_z\hat{z}$; $s_x = \dfrac{x_0}{y_0}, s_z = \dfrac{z_0}{y_0}$

3) กฎการคูณ: $y = xz \rightarrow \hat{y} = \hat{x} + \hat{z}$

4) กฎการยกกำลัง: $y = \alpha x^{\beta} \rightarrow \hat{y} = \beta\hat{x}$

โดยที่ x, y, z คือตัวแปร α และ β คือค่าคงที่

ในทำให้เป็นล็อกเส้นตรงเราจะใช้กฎทั้งสี่ข้อนี้เป็นหลักโดยลำดับการใช้กฎจะเป็นดังนี้ ใช้กฎการบวกก่อนกฎการคูณ และกฎการคูณก่อนกฎการยกกำลัง หากเจอวงเล็บให้ทำสิ่งที่อยู่ในวงเล็บหลังสุด

ตัวอย่างเช่น หากเราต้องการทำสมการ $y + zx^2 = 3(z + \beta)/w$ ให้เป็นรูปล็อกเส้นตรงเราสามารถทำได้ดังนี้โดยเริ่มจากด้านซ้ายก่อนโดยให้

$$L = y + zx^2$$

กำหนดให้ $\theta[x] \equiv \hat{x}$ โดยที่ $\theta[.]$ คือฟังก์ชันทำให้เป็นล็อกเส้นตรง (log-linearizing function) จะได้ว่า

$$\theta[L] = \theta[y + zx^2]$$
$$\hat{L} = \frac{y_0}{L_0}\hat{y} + \frac{z_0 x_0^2}{L_0}\theta[zx^2]; \text{ จากกฎการบวก}$$
$$\hat{L} = \frac{y_0}{L_0}\hat{y} + \frac{z_0 x_0^2}{L_0}[\theta(z) + \theta(x^2)]; \text{ จากกฎการคูณ}$$
$$\hat{L} = \frac{y_0}{L_0}\hat{y} + \frac{z_0 x_0^2}{L_0}[\hat{z} + 2\hat{x}]; \text{ จากกฎการยกกำลัง}$$
$$\hat{L} = \frac{y_0}{y_0 + z_0 x_0^2}\hat{y} + \frac{z_0 x_0^2}{y_0 + z_0 x_0^2}[\hat{z} + 2\hat{x}];\ L_0 = y_0 + z_0 x_0{}^2$$

เมื่อเราเปลี่ยนด้านซ้ายของสมการให้อยู่ในรูปล็อกเส้นตรงเสร็จแล้ว เราสามารถเปลี่ยนด้านขวาของสมการให้อยู่ในรูปล็อกเส้นตรงเช่นเดียวกัน โดยให้

$$R = 3(z + \beta)/w$$
$$\theta[R] = \theta[3] + \theta[(z + \beta)/w]$$
$$\hat{R} = \theta(z + \beta) + \theta(w^{-1})$$
$$\hat{R} = \frac{z_0}{z_0 + \beta}\hat{z} + \frac{\beta}{z_0 + \beta}\hat{\beta} - \hat{w}$$
$$\hat{R} = \frac{z_0}{z_0 + \beta}\hat{z} - \hat{w}$$

ดังนั้นสมการ $y + zx^2 = 3(z + \beta)/w$ จะถูกเปลี่ยนเป็น

$$\hat{L} = \hat{R} \Leftrightarrow \frac{y_0}{y_0 + z_0 x_0^2}\hat{y} + \frac{z_0 x_0^2}{y_0 + z_0 x_0^2}[\hat{z} + 2\hat{x}] = \frac{z_0}{z_0 + \beta}\hat{z} - \hat{w}$$

ตัวอย่างถัดมาเราจะใช้วิธีการทำให้เป็นล็อกเส้นตรงในการแก้ปัญหาระบบสมการตัวอย่างด้านล่างนี้

$$x^2 + y^2 = a^2$$
$$x - y = 1$$

กำหนดให้ที่จุดเริ่มต้น $a_0 = 5$, $x_0 = 4$, $y_0 = 3$ เราต้องการคำนวณว่าหาก a มีค่าเพิ่มขึ้น 1 เปอร์เซ็นต์ ($\hat{a} = 0.01$) จะทำให้ x และ y มีการเปลี่ยนแปลงอย่างไร เราสามารถทำระบบสมการให้เป็นแบบล็อกเส้นตรงได้ดังนี้

$$2\frac{x_0^2}{a_0^2}\hat{x} + 2\frac{y_0^2}{a_0^2}\hat{y} = 2\hat{a} \quad \Leftrightarrow \frac{16}{25}\hat{x} + \frac{9}{25}\hat{y} = \hat{a}$$

$$\hat{x} = \frac{y_0}{1+y_0}\hat{y} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{x} = \frac{3}{4}\hat{y}$$

เมื่อแก้สมการเส้นตรงสองสมการสุดท้ายเพื่อหาค่า $\hat{x}$ และ $\hat{y}$ จะได้

$$\hat{x} = \frac{25}{28}\hat{a}, \quad \hat{y} = \frac{25}{21}\hat{a}$$

ดังนั้นเมื่อ a มีค่าเพิ่มขึ้น 1 เปอร์เซ็นต์ x และ $\hat{y}$ จะมีค่าเปลี่ยนไป 25/28 และ 25/21 เปอร์เซ็นต์ตามลำดับ

6.3.2 การแยกส่วนของจอร์แดน

นอกจากการทำให้เป็นล็อกเส้นตรงแล้ว เครื่องสำคัญที่จำเป็นสำหรับการแก้แบบจำลองแบบอินฟินิตฮอไรซอนก็คือการแยกส่วนแมทริกซ์ของจอร์แดน (Jordan decomposition) จากวิชาพีชคณิตเชิงเส้น (linear algebra) เราสามารถแยกส่วนแมทริกซ์จัตุรัส $\mathbf{W}$ ใดๆให้อยู่ในรูป

$$\mathbf{W} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{Q}$$

โดยที่ $\mathbf{Q}$ และ $\mathbf{P}$ เป็นแมทริกซ์จัตุรัสและ $\mathbf{P}$ เป็นแมทริกซ์ทแยงมุม (diagonal matrix) ตัวอย่างเช่น ถ้า

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

เราสามารถเขียน $\mathbf{W} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{Q}$ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.57 & 0.84 \\ -0.92 & 0.42 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5.37 & 0 \\ 0 & 0.37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.57 & 0.84 \\ -0.92 & 0.42 \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.57 & 0.84 \\ -0.92 & 0.42 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 5.37 & 0 \\ 0 & 0.37 \end{bmatrix}$$

คำสั่งไซแลบในการแยกส่วนของจอร์แดนทำได้ตามตัวอย่างด้านล่างนี้

```
การแยกส่วนของจอร์แดน
W=[1 2; 3 4];
[R  P] = spec(W);
Q=inv(R);
M= Q^(-1)*P*Q;
Q
```

P
M

ผลที่ได้จากโปรแกรม

Q = 0.5742757 0.8369650
-0.9230523 0.4222292
P = 5.3722813 0
0 - 0.3722813
M = 1 2
3 4

เนื่องจากการแยกส่วนของจอร์แดนมีอาจมีหลายคำตอบ (multiple solutions) โปรแกรมไซแลบเวอร์ชันที่ต่างกันอาจจะให้ผลการแยกส่วนที่ต่างกันออกไป

6.3.3 ค่าลิมิตของระบบสมการวีเออาร์

เมื่อแบบจำลองถูกแปลงให้อยู่ในรูปล็อกเส้นตรงแล้ว แบบจำลองจะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการวีเออาร์ดังนี้

$$\mathbf{X_{t+1}} = \mathbf{WX_t}$$

โดยที่ $\mathbf{X_t} = [x_{1t}\ x_{2t}\ x_{3t}\ \ldots .x_{Nt}]'$ คือเวกเตอร์ของตัวแปรในแบบจำลอง และ $\mathbf{W}$ เป็นแมทริกซ์ค่าคงที่ขนาด $N \times N$ และ N คือจำนวนตัวแปรในแบบจำลอง

ในส่วนนี้เราจะศึกษาเงื่อนไขที่ทำให้ $\lim_{k\to\infty} \mathbf{X}_{t+k} = 0$ ซึ่งเงื่อนไขนี้จะเป็นเครื่องมือสำคัญที่เราจะใช้ในการแก้แบบจำลองในส่วนถัดไป

ในกรณีที่ $N = 1$ จะได้ว่า $\mathbf{X_t} = [x_{1t}]$ และ $\mathbf{W} = w$ จะได้ว่า

$$\mathbf{X}_{t+k} = w^k \mathbf{X}_t$$

จะเห็นได้ว่า $\lim_{k\to\infty} \mathbf{X}_{t+k}$ หรือค่าในระยะยาวค่าของ $\mathbf{X}$ จะมีค่าก็ต่อเมื่อ $x_{1t} = 0$ หรือ $|w| < 1$

ในกรณีที่ $N = 2$ โดยที่ $\mathbf{X_t} = [x_{1t}\ x_{2t}]'$ และ

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}$$

เราสามารถใช้การแยกส่วนของจอร์แดนแยกส่วน $\mathbf{W} = \mathbf{Q^{-1}PQ}$ โดยที่ $\mathbf{Q}$ เป็นแมทริกซ์จตุรัสขนาด 2x2 และ $\mathbf{P}$ เป็นแมทริกซ์ทแยงมุมขนาด 2x2 ดังนี้

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix}$$

เมื่อแทน $\mathbf{W} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{PQ}$ ในสมการ $\mathbf{X_{t+1}} = \mathbf{WX_t}$ จะได้ว่า

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{PQX}_t$$

จาก $\mathbf{X}_{t+2} = \mathbf{WX}_{t+1}$ จะได้ว่า

$$\mathbf{X}_{t+2} = \mathbf{WX}_{t+1} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{PQQ}^{-1}\mathbf{PQX}_t = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}^2\mathbf{QX}_t$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$\mathbf{X}_{t+k} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}^k\mathbf{QX}_t$$

$$\begin{bmatrix} x_{1t+k} \\ x_{2t+k} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{-1}\begin{bmatrix} p_1^k & 0 \\ 0 & p_2^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix}; \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1t+k} \\ x_{2t+k} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{-1}\begin{bmatrix} p_1^k & 0 \\ 0 & p_2^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{11}x_{1t} + q_{12}x_{2t} \\ q_{21}x_{1t} + q_{22}x_{2t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1t+k} \\ x_{2t+k} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{-1}\begin{bmatrix} p_1^k(q_{11}x_{1t} + q_{12}x_{2t}) \\ p_2^k(q_{21}x_{1t} + q_{22}x_{2t}) \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\lim_{k\to\infty}\mathbf{X}_{t+k} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $|p_i| < 1$ หรือ $(q_{i1}x_{1t} + q_{i2}x_{2t}) = 0$ สำหรับ $i = 1$ และ 2. ในทำนองเดียวกันจากกรณีที่จำนวนตัวแปร $N > 2$ $\lim_{k\to\infty}\mathbf{X}_{t+k} = 0$ จะมีค่าก็ต่อเมื่อ $|p_i| < 1$ หรือ $(q_{i1}x_{1t} + q_{i2}x_{2t} + \ldots + q_{iN}x_{Nt}) = 0$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots N$

6.4 การแก้ปัญหาอินฟินิตฮอไรซอนโดยใช้วิธีการทำให้เป็นล็อกเส้นตรงและการซิมูเลทแบบจำลอง

ส่วนนี้จะแสดงตัวอย่างการใช้วิธีทำให้เป็นล็อกเส้นตรงเพื่อแก้แบบจำลองต่อไปนี้

$$\max_{c_t, k_{t+1}} E_1 \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

$$\text{ภายใต้เงื่อนไข } k_{t+1} = (1-d)k_t + a_t f(k_t) - c_t,$$

$$a_{t+1} - 1 = \gamma(a_t - 1) + \varepsilon_{t+1},\ f(k_t) = k_t^{\alpha},\ u(c_t) = \ln(c_t)$$

$$\beta = 0.9,\ d = 1,\ \alpha = 0.66,\ \gamma = 0.6$$

ε_{t+1} มีการกระจายแบบยูนิฟอร์มในช่วง [-0.01. 0.01] และเป็นอิสระต่อกัน (independent) เพื่อความง่ายในเชิงพีชคณิตในแบบจำลองนี้เราสมมติให้อัตราค่าเสื่อมราคามีค่าเท่ากับ 1

เหมือนในแบบจำลองในส่วน 6.2 สมการที่หลักที่จะใช้สำหรับการแก้แบบจำลองนี้คือ

สมการของออยเลอร์: $u'(c_t) = \beta E_t[a_{t+1} f'(k_{t+1}) u'(c_{t+1})]$

ข้อจำกัดทรัพยากร: $k_{t+1} = (1-d)k_t + a_t f(k_t) - c_t$

$a_{t+1} - 1 = \gamma(a_t - 1) + \varepsilon_{t+1}$

เงื่อนไขทราเวอร์ซอลิตี: $\lim\limits_{t->\infty} E_1[k_t] = k^*$

เราทำการแก้แบบจำลองนี้ตามขั้นตอนดังนี้ 1. หาค่าสภาวะคงตัว (steady state) 2. เปลี่ยนรูปแบบจำลองให้อยู่ในรูปแบบล็อกเส้นตรงและจัดรูปตัวแปรในเวลา t+1 ให้อยู่ในรูปตัวแปรในเวลา t 3. แก้หาตัวแปรเลือกในรูปตัวแปรสถานะ และ 4. ซิมมูเลทแบบจำลอง

6.4.1 การหาสภาวะคงตัว

เนื่องจากการทำแบบจำลองให้เป็นล็อกเส้นตรงเราต้องเลือกจุดตั้งต้นก่อน จุดตั้งต้นที่เหมาะสมในก็คือค่าของตัวแปรสภาวะคงตัว เนื่องจากในระยะยาวตัวแปรต่างๆจะเคลื่อนไหวรอบๆค่าที่สภาวะคงตัว

เราจะหาค่าคงตัว (steady state value) ระดับเทคโนโลยี (a^*) และค่าคงตัวของระดับสินค้าทุน (k^*) และค่าคงตัวของการบริโภค (c^*) จากสมการ

$$a_{t+1} - 1 = \gamma(a_t - 1) + \varepsilon_{t+1}$$

เนื่องจากที่สภาวะคงตัวโดย $a_{t+1} = a_t = a^*$ และ $\varepsilon_{t+1} = 0$ จะได้ว่า

$$a^* - 1 = \gamma(a^* - 1) \Rightarrow a^* = 1$$

จากสมการออยเลอร์

$$u'(c_t) = \beta E_t[a_{t+1} f'(k_{t+1}) u'(c_{t+1})]$$

ที่สภาวะคงตัว เราแทนค่า $c_t = c_{t+1} = c^*$, $a_{t+1} = a^* = 1$และ $k_{t+1} = k^*$ ในสมการออยเลอร์จะได้

$$u'(c_t) = \beta a^* f'(k^*) u'(c^*)$$
$$1 = \beta f'(k^*)$$
$$f'(k^*) = \frac{1}{\beta}$$
$$k^* = (\alpha\beta)^{1/(1-\alpha)}$$

จากสมการข้อจำกัดทางทรัพยากร เมื่อแทนค่าที่สภาวะคงตัวจะได้

$$k^* = a^* f(k^*) - c^* \Rightarrow c^* = k^{*\alpha} - k^*$$

ดังนั้นเราจะได้ค่าของตัวแปรีทีสภาวะคงตัวดังนี้

$$a^* = 1,\ k^* = (\alpha\beta)^{1/(1-\alpha)},\ c^* = k^{*\alpha} - k^*$$

6.4.2 การเปลี่ยนแบบจำลองให้อยู่ในรูปแบบล็อกเส้นตรง

หลังจากหาสภาวะคงตัวแล้ว เราจะทำการเปลี่ยนแบบจำลองให้อยู่ในรูปเส้นตรง จากสมการออยเลอร์เมื่อแทนค่าฟังก์ชันอรรถประโยชน์และฟังก์ชันการผลิตจะได้

$$\frac{1}{c_t} = \beta E_t[\frac{a_{t+1}\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}}{c_{t+1}}]$$

จากสมการนี้เมื่อทำให้เป็นเส้นตรงจะได้

$$-\hat{c}_t = E_t[-\hat{c}_{t+1} + \hat{a}_{t+1} + (\alpha-1)\hat{k}_{t+1}]^3$$
$$-\hat{c}_t = E_t[-\hat{c}_{t+1}] + E_t[\hat{a}_{t+1}] + (\alpha-1)E_t[\hat{k}_{t+1}]$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อเราทำข้อจำกัดทางทรัพยากร $c_t + k_{t+1} = a_t k_t^{\alpha}$ ให้เป็นเส้นตรงจะได้

$$s_c\hat{c}_t + s_i\hat{k}_{t+1} = \hat{a} + \alpha\hat{k}_t$$

โดยที่ $s_c = c^* / y^*$ และ $s_i = k^* / y^*$ ความหมายของ s_c และ s_i คือสัดส่วนการบริโภค (consumption share) และสัดส่วนลงทุน (investment share) ในสภาวะคงตัว

สำหรับสมการระดับเทคโนโลยี เนื่องจากสมการมีลักษณะเป็นเส้นตรงอยู่แล้ว เราจึงสามารถจัดรูปได้เป็น

$$a_{t+1} - 1 = \gamma(a_t - 1) + \varepsilon_{t+1}$$

เนื่องจาก a^* จะได้ว่า

$$\frac{a_{t+1} - a^*}{a^*} = \gamma\frac{(a_t - a^*)}{a^*} + \varepsilon_{t+1}$$
$$\hat{a}_{t+1} = \gamma\hat{a}_t + \varepsilon_{t+1}$$

สมการออยเลอร์สมการข้อจำกัดทรัพยากรและสมการระดับเทคโนโลยีที่ทำให้เป็นเส้นตรงแล้วนำมาเขียนรวมกัน

เนื่องจากเราต้องการจัดในรูปสมการให้คล้ายเงื่อนไขทราเวอร์ซอลิตี เราจึงย้ายตัวแปรและจัดรูป $E_t[\hat{c}_{t+1}]$, $E_t[\hat{k}_{t+1}]$ และ $E_t[\hat{a}_{t+1}]$ ไว้ทางด้านซ้าย และตัวแปรที่เหลือไว้ทางด้านขวา จากสมการออยเลอร์จะได้

$$E_t[\hat{c}_{t+1}] + (1-\alpha)E_t[\hat{k}_{t+1}] - E_t[\hat{a}_{t+1}] = \hat{c}_t$$

---

[3] ในการทำฟังก์ชันความคาดหวังให้เป็นเส้นตรงเราจะใช้กฎ $E(f(x)) = f(E(x))$ สำหรับฟังก์ชันเส้นตรง f.

จากสมการ

$$\hat{a}_{t+1} = \gamma\hat{a}_t + \varepsilon_{t+1}$$

เมื่อหาค่า $E_t[.]$ ของสมการจะได้เป็น

$$E_t[\hat{a}_{t+1}] = \gamma E_t[\hat{a}_t] + E_t[\varepsilon_{t+1}]$$
$$E_t[\hat{a}_{t+1}] = \gamma\hat{a}_t$$

จากสมการข้อจำกัดทรัพยากรเมื่อจัดรูปจะได้ว่า

$$s_i\hat{k}_{t+1} = \hat{a}_t + \alpha\hat{k}_t - s_c\hat{c}_t$$

เนื่องจากค่าของ k_{t+1} ถูกกำหนดตั้งแต่ช่วงท้ายในเวลา t ดังนั้น $E_t[\hat{k}_{t+1}] = \hat{k}_{t+1}$ แทนสมการนี้จะได้สมการ

$$s_iE_t[\hat{k}_{t+1}] = \hat{a}_t + \alpha\hat{k}_t - s_c\hat{c}_t$$

6.4.3 การหาค่าตัวแปรเลือกในรูปตัวแปรสถานะ

ในแบบจำลองนี้ตัวแปรเลือกคือ $\hat{c}_t$ ส่วนตัวแปรสถานะคือ $\hat{k}_t$ และ $\hat{a}_t$ ในส่วนนี้เราจะหาค่า $\hat{c}_t$ ในรูปของ $\hat{k}_t$ และ $\hat{a}_t$

เมื่อเราเปลี่ยนแบบจำลองให้อยู่ในรูปล็อกเส้นตรงแล้วเราจะได้สมการดังนี้

$$E_t[\hat{c}_{t+1}] + (1-\alpha)E_t[\hat{k}_{t+1}] - E_t[\hat{a}_{t+1}] = \hat{c}_t$$

$$s_iE_t[\hat{k}_{t+1}] = -s_c\hat{c}_t + \alpha\hat{k}_t + \hat{a}_t$$

$$E_t[\hat{a}_{t+1}] = \gamma\hat{a}_t$$

กำหนดให้ $\mathbf{X_t} = [\hat{c}_t\ \hat{k}_t\ \hat{a}_t]'$ เราสามารถแสดงสมการ 3 สมการนี้ในรูปแมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\mathbf{M_1E_t[X_{t+1}] = M_2X_t}$$

โดยที่ $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1-\alpha & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & s_i & 0 \end{bmatrix}$ และ $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \\ -s_c & \alpha & 1 \end{bmatrix}$

จากสมการ $\mathbf{M_1E_t[X_{t+1}] = M_2X_t}$ จะได้ว่า

$$\mathbf{E_t[X_{t+1}] = M_1^{-1}M_2X_t}$$

กำหนดให้ $\mathbf{W = M_1^{-1}M_2}$ ดังนั้น

$$\mathbf{E_t[X_{t+1}] = WX_t}$$
$$\mathbf{E_t[WX_{t+1}] = W^2X_t}$$

$$\mathbf{E_t[E_{t+1}[X_{t+2}]] = W^2 X_t}$$

จากกฎการคาดหวังซ้ำ (law of iterated expectation) จะได้ว่า

$$\mathbf{E_t[E_{t+1}[X_{t+2}]] = E_t[X_{t+2}]}$$

$$\mathbf{E_t[X_{t+2}] = W^2 X_t}$$

ในทำนองเดียวกันเราจะได้

$$\mathbf{E_t[X_{t+\mathit{j}}] = W^{\mathit{j}} X_t}$$

โดยใช้การแยกส่วนของจอร์แดนเราสามารถเขียน $\mathbf{W = Q^{-1}PQ}$ โดยที่ $\mathbf{Q}$ เป็นแมทริกซ์จัตุรัส และ $\mathbf{P}$ เป็นแมทริกซ์ทแยงมุม

จาก

$$\mathbf{E_t[X_{t+\mathit{j}}] = W^{\mathit{j}} X_t}$$

$$\mathbf{E_t[X_{t+\mathit{j}}] = Q^{-1}P^{\mathit{j}}QX_t}$$

$$\mathbf{E_t[X_{t+\mathit{j}}] = Q^{-1}}\begin{bmatrix} p_1^j & 0 & 0 \\ 0 & p_2^j & 0 \\ 0 & 0 & p_3^j \end{bmatrix}\mathbf{QX_t}; \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{j->\infty} \mathbf{E_t[X_{t+\mathit{j}}]} = \lim_{j->\infty} \mathbf{Q^{-1}}\begin{bmatrix} p_1^j & 0 & 0 \\ 0 & p_2^j & 0 \\ 0 & 0 & p_3^j \end{bmatrix}\mathbf{QX_t}$$

ในแบบจำลองปกติเราจะได้ว่า $p_3 = \gamma$ และ $|\,p_3\,| < 1$ สำหรับค่าของ $|\,p_1\,|$และ $|\,p_2\,|$ โดยปกติ *จะมีค่าหนึ่งที่มากกว่าหนึ่งและอีกค่าจะน้อยกว่าหนึ่ง* เราจะศึกษาในกรณี $|\,p_1\,| > 1$ และ $|\,p_2\,| < 1$ ก่อน ในกรณีนี้จะได้ว่า

$$\lim_{j->\infty} p_2^j = \lim_{j->\infty} p_3^j = 0$$

และ

$$\lim_{j->\infty} \mathbf{E_t[X_{t+\mathit{j}}]} = \lim_{j->\infty} \mathbf{Q^{-1}}\begin{bmatrix} p_1^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{QX_t}$$

$$\lim_{j->\infty} \mathbf{E_t[X_{t+\mathit{j}}]} = \mathbf{Q^{-1}} \lim_{j->\infty}\begin{bmatrix} p_1^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{QX_t}$$

$$\lim_{j->\infty} \mathbf{E_t[X_{t+\mathit{j}}]} = \mathbf{Q^{-1}} \lim_{j->\infty}\begin{bmatrix} p_1^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{c}_t \\ \hat{k}_t \\ \hat{a}_t \end{bmatrix}$$

$$\lim_{j->\infty}\mathbf{E_t}\begin{bmatrix}\hat{c}_{t+j}\\ \hat{k}_{t+j}\\ \hat{a}_{t+j}\end{bmatrix} = \mathbf{Q^{-1}}\lim_{j->\infty}\begin{bmatrix}p_1^j(q_{11}\hat{c}_t + q_{12}\hat{k}_t + q_{13}\hat{a}_t)\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

เงื่อนไขทราเวอร์ซอลิตี $\lim_{t->\infty}E_1[k_t] = k^*$ จะส่งผลให้ $\lim_{t->\infty}E_1[\hat{k}_t] = 0$ ดังนั้น

$$\lim_{j->\infty}p_1^j(q_{11}\hat{c}_t + q_{12}\hat{k}_t + q_{13}\hat{a}_t) = 0$$

เนื่องจาก $|p_2|>1$ สมการด้านบนนี้จะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อ

$$q_{11}\hat{c}_t + q_{12}\hat{k}_t + q_{13}\hat{a}_t = 0 \quad \Rightarrow \hat{c}_t = \phi_k\hat{k}_t + \phi_a\hat{a}_t$$

โดยที่ $\phi_k = -q_{12}/q_{11}$ และ $\phi_a = -q_{13}/q_{11}$

(ในกรณีที่ $|p_2|>1$ และ $|p_1|<1$ เราจะได้ว่า $\phi_k = -q_{22}/q_{21}$ และ $\phi_a = -q_{23}/q_{21}$)

เมื่อเราแทนค่า $\hat{c}_t = \phi_k\hat{k}_t + \phi_a\hat{a}_t$ ที่ได้นี้ลงในข้อจำกัดทางทรัพยากรจะได้

$$s_i\hat{k}_{t+1} = \hat{a}_t + \alpha\hat{k}_t - s_c\hat{c}_t$$
$$\hat{k}_{t+1} = \frac{\alpha - s_c\phi_k}{s_i}\hat{k}_t + \frac{1-s_s\phi_a}{s_i}\hat{a}_t$$

นอกจากการแทนค่า $\hat{k}_{t+1}$ โดยการแทนค่า $\hat{c}_t$ ลงในข้อจำกัดทางทรัพยากรจะได้ เราสามารถหา $\hat{k}_{t+1}$ ได้จาก

$$\hat{k}_{t+1} = E_t[\hat{k}_{t+1}] = w_{21}\hat{c}_t + w_{22}\hat{k}_t + w_{23}\hat{a}_t$$

โดยที่ w_{ij} คือค่าของสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ i ของ $\mathbf{W}$

เราสามารถสรุปพลวัตของแบบจำลองและพร้อมที่จะซิมูเลท (simulate) แบบจำลองด้วยสมการดังนี้

$$\hat{c}_t = \phi_k\hat{k}_t + \phi_a\hat{a}_t$$
$$\hat{k}_{t+1} = w_{21}\hat{c}_t + w_{22}\hat{k}_t + w_{23}\hat{a}_t$$
$$\hat{a}_{t+1} = \gamma\hat{a}_t + \varepsilon_{t+1}$$

6.4.4 การซิมมูเลทแบบจำลอง

การซิมมูเลทแบบจำลองสองรูปแบบที่นิยมใช้ในการศึกษาและวิจัยทางเศรษฐศาสตร์ คือ การซิมูเลทอิมเพาส์เรสพอนส์ (impulse response simulation) และ การซิมูเลทแบบมอนติคาร์โล (Monte Carlo simulation)

*การซิมูเลทอิมเพาส์เรสพอนส์*ใช้เพื่อศึกษาผลกระทบในเชิง*คุณภาพ*ของการเปลี่ยนแปลงของช็อคภายนอก (exogenous shock) ε_t ต่อตัวแปรในแบบจำลอง ในการซิมูเลทอิมเพาส์เรส

พอนส์จะสมมติว่าในเวลา $t=1$ ระบบเศรษฐกิจอยู่ที่สภาวะคงตัว และได้รับผลการจากช็อค ε_1 โดยที่ ε_1 มีค่าเท่ากับค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ ε_t และ $\varepsilon_t = 0$ สำหรับ $t>1$

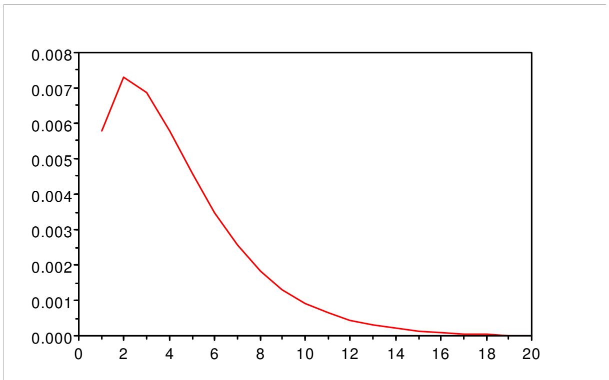
*การซิมูเลทแบบมอนติคาร์โล*ใช้เพื่อศึกษาผลกระทบในเชิง*ปริมาณ*ของ ε_t ว่าทำได้เกิดความแปรปรวนของตัวแปรต่างๆในระบบเศรษฐกิจมากหรือน้อยเพียงใด ในการซิมูเลทแบบมอนติคาร์โลจะสมมติว่าในเวลา $t=1$ ระบบเศรษฐกิจอยู่ที่สภาวะคงตัว และได้รับผลการจาก ε_t โดยที่ค่า ε_t จะถูกสุ่มตามรูปแบบการกระจายของ ε_t ที่ถูกกำหนดในแบบจำลอง หลังจากทำการซิมูเลทแล้วค่าความแปรปรวนของตัวแปรต่างๆในแบบจำลองจะถูกคำนวณสำหรับวิเคราะห์ผลกระทบของ ε_t ต่อตัวแปรต่างในแบบจำลอง

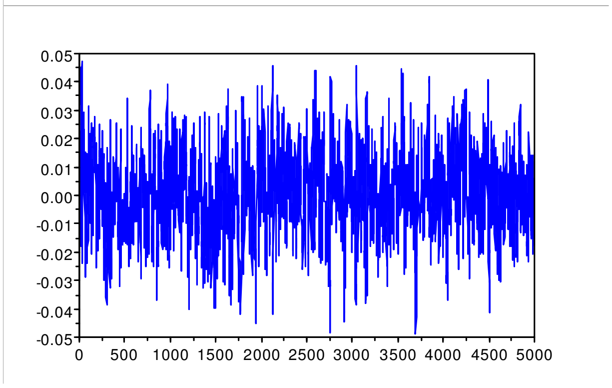
การซิมูเลทอิมเพาส์เรสพอนส์และการซิมูเลทแบบมอนติคาร์โล

```
clear; alpha = 0.66; beta = 0.9; gamma = 0.6;
kstar = (alpha*beta)^(1/(1-alpha));
cstar = kstar^alpha - kstar; ystar = kstar^alpha;
si = kstar/ystar; sc = cstar/ystar;
M1 = [1, 1-alpha,-1; 0, 0, 1; 0, si, 0];
M2 = [1, 0, 0; 0, 0, gamma; -sc, alpha,1];
W = inv(M1)*M2;
[R P] = spec(W);  //This line and the next line is for Jordan Decomposition
Q = inv(R);  //Now we will have Q and P such that Q^-1PQ = W.
if abs(P(1,1)) > 1 then
  phik = -Q(1,2)/Q(1,1);
  phia = -Q(1,3)/Q(1,1);
else
  phik = -Q(2,2)/Q(2,1);
  phia = -Q(2,3)/Q(2,1);
end
//20 period Impulse response simulation
k(1) = 0; c(1) = 0;
a(1) = ((0.01+0.01)^2/12)^(1/2); //The RHS is the S.D of the shocks
for t=1:20
        c(t) = phik*k(t) + phia*a(t);
        k(t+1) = W(2,1)*c(t) + W(2,2)*k(t) + W(2,3)*a(t);
        a(t+1) = gamma*a(t) + 0;
end
clf();
plot(c(1:20),'red');
```

```
//Monte Carlo simulation;
k(1) = 0; c(1) = 0; a(1) = 0;
for t=1:5000
        c(t) = phik*k(t) + phia*a(t);
        k(t+1) = (a(t) + alpha*k(t) - sc*c(t))/si;
        a(t+1) = gamma*a(t) + grand(1,1,'unf',-0.01,0.01);
end
clf;
plot(c);
disp("sd of  c ="); disp(stdev(c));
```

ผลที่ได้จากโปรแกรม





sd of c = 0.014

กราฟรูปแรกแสดงอิมเพาส์เรสพอนส์ของการบริโภคต่อช็อค ε_t จะเห็นว่าระดับการบริโภคจะเพิ่มขึ้นสำหรับ $t = 1, 2$ และค่อยๆลดลงกลับสู่ค่าในสภาวะคงตัว กราฟรูปที่สองความผันผวนของการบริโภคอันเป็นผลมาจาก ε_t ซึ่งได้มาจากการซิมูเลทแบบมอนติคาร์โล จากการคำนวณของโปรแกรมพบว่าค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของระดับการบริโภคเมื่อเทียบกับค่าระดับการบริโภคในภาวะคงตัวมีค่าประมาณ 1.4 เปอร์เซ็นต์

6.5 การซิมูเลทแบบจำลองเพื่อศึกษาผลกระทบของนโยบายการคลัง

ส่วนนี้จะแสดงตัวอย่างการทำให้เป็นล็อกเชิงเส้นเพื่อแก้แบบจำลองสำหรับศึกษาผลกระทบของการใช้จ่ายรัฐบาลและนโยบายการคลังต่อผลผลิตและการบริโภคดังต่อไปนี้

$$\max_{c_t, k_{t+1}} E_1 \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

ภายใต้เงื่อนไข

$$c_t + i_t + g_t = y_t,\ k_{t+1} = (1-d)k_t + i_t,\ \hat{g}_{t+1} = \gamma \hat{g}_t + \varepsilon_{t+1}$$

$$u(c_t) = \ln(c_t),\ \ y_t = f_t(k_t) = k_t^{\alpha},\ \hat{g}_t = \frac{g_t - g^*}{g^*},\ g^* = 0.1y^*,\ \varepsilon_{t+1} \sim N(0,0.02)$$

$$\beta = 0.9,\ d = 0.1,\ \alpha = 0.66,\ \gamma = 0.65$$

ในแบบจำลองนี้ i_t คือการลงทุน (investment) ของผู้บริโภค g_t คือค่าใช้จ่ายของรัฐบาล (government spending) y_t คือผลผลิตรวมของประเทศ g^* และ y^* คือค่าของ g และ y ที่สภาวะคงตัว ε_t เป็นช็อคที่เกิดจากการใช้จ่ายของรัฐบาล

6.5.1 การหาสภาวะคงตัว

โดยวิธีของลากรานจ์เราสามารถแสดงได้ว่าสมการออยเลอร์ของปัญหานี้คือ

$$u'(c_t) = \beta E_t (u'(c_{t+1})(1 + f'(k_{t+1}) - d)$$

ที่สภาวะคงตัวสมการออยเลอร์คือ

$$u'(c^*) = \beta E_t (u'(c^*)(1 + f'(k^*) - d)$$

เมื่อแก้สมการจะได้

$$k^* = (\frac{1 - \beta + d\beta}{\alpha\beta})^{\frac{1}{\alpha - 1}}$$

จากสมการการสะสมทุนในสภาวะคงตัว

$$k_{t+1} = (1-d)k_t + i_t \Rightarrow k^* = (1-d)k^* + i^* \Rightarrow i^* = dk^*$$

จากข้อจำกัดทรัพยากรที่สภาวะคงตัว

$$c_t + i_t + g_t = y_t \ \Rightarrow\ c^* + i^* + g^* = y^*$$

แทนค่า $i^* = dk^*$, $g^* = 0.1y^*$ และ $y^* = k^{*\alpha}$ จะได้

$$c^* + dk^* + 0.1k^{*\alpha} = k^{*\alpha}$$
$$c^* = 0.9k^{*\alpha} - dk^{*\alpha}$$

ดังนั้นเราจะได้ว่าค่าของตัวแปรต่างที่สภาวะคงตัวดังนี้

$$k^* = \left(\frac{1-\beta+d\beta}{\alpha\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}},\ i^* = dk^*,\ y^* = k^{*\alpha},\ c^* = 0.9k^{*\alpha} - dk^*$$

6.5.2 การเปลี่ยนแบบจำลองให้อยู่ในรูปแบบล็อกเส้นตรง

เมื่อเราเปลี่ยนสมการข้อจำกัดทรัพยากรให้อยู่ในรูปล็อกเส้นตรงจะได้

$$s_c\hat{c}_t + s_i\hat{i}_t + s_g\hat{g}_t = \hat{y}_t$$

โดยที่ $s_c \equiv \frac{c^*}{y_*},\ s_i \equiv \frac{i^*}{y_*},\ s_g \equiv \frac{g^*}{y_*} = 0.1$

จากฟังก์ชันการผลิต และสมการการสะสมทุนจะได้ว่า

$$\hat{y}_t = \alpha\hat{k}_t$$
$$\hat{i}_t = \frac{\hat{k}_{t+1}}{d} + (1 - \frac{1}{d})\hat{k}_t$$

เมื่อแทนสองสมการนี้ลงไปในข้อจำกัดทรัพยากรจะได้

$$s_c\hat{c}_t + s_i\left(\frac{\hat{k}_{t+1}}{d} + (1 - \frac{1}{d})\hat{k}_t\right) + s_g\hat{g}_t = \alpha\hat{k}_t \qquad (1)$$

จากสมการออยเลอร์และแทน $(1 + f'(k^*) - d) = 1/\beta$ จะได้

$$E_t(\hat{c}_{t+1}) = \hat{c}_t + \beta(\alpha-1)f'(k^*)\hat{k}_{t+1} \qquad (2)$$

6.5.3 การหาค่าตัวแปรเลือกในรูปตัวแปรสถานะ

ในแบบจำลองนี้ตัวแปรเลือกคือ $\hat{c}_t$ ส่วนตัวแปรสถานะคือ $\hat{k}_t$ และ $\hat{g}_t$ ดังนั้นเราจะหา $\hat{c}_t$ ในรูป $\hat{k}_t$ และ $\hat{g}_t$ เมื่อรวมสมการ (1), (2) และสมการ $\hat{g}_{t+1} = \gamma\hat{g}_t + \varepsilon_{t+1}$ และจัดรูปจะได้ว่า

$$\frac{s_i}{d}E_t[\hat{k}_{t+1}] = -s_c\hat{c}_t - s_i(1-\frac{1}{d})\hat{k}_t + \alpha\hat{k}_t - s_g\hat{g}_t$$
$$E_t[\hat{c}_{t+1}] - \beta(\alpha-1)f'(k^*)E_t[\hat{k}_{t+1}] = \hat{c}_t$$
$$E_t[\hat{g}_{t+1}] = \gamma\hat{g}_t$$

กำหนดให้ $\mathbf{X_t} = [\hat{c}_t\ \hat{k}_t\ \hat{g}_t]'$ ระบบสมการด้านบนสามารถเขียนเป็น

$$E_t[\mathbf{M_1X_{t+1}}] = \mathbf{M_2X_t}$$

โดยที่

$$\mathbf{M_1} = \begin{bmatrix} 0 & s_i/d & 0 \\ 1 & -\beta(\alpha-1)f^{/}(k^*) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} -s_c & -s_i(1-\dfrac{1}{d})+\alpha & -s_g \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

กำหนดให้ $\mathbf{W} = \mathbf{M_1^{-1}M_2}$ โดยการแยกส่วนของจอร์แดนเราสามารถเขียน $\mathbf{W} = \mathbf{Q^{-1}PQ}$ โดยที่

ในทำนองเดียวกันกับแบบจำลองในส่วน 6.4 จากเงื่อนไขทราเวอร์ซอลิตี เราจะได้ค่า

$$\hat{c}_t = -(q_{12}\hat{k}_t + q_{13}\hat{g}_t)/q_{11} \text{ ในกรณีที่ } |p_1|>1$$
$$\hat{c}_t = -(q_{22}\hat{k}_t + q_{23}\hat{g}_t)/q_{21} \text{ ในกรณีที่ } |p_2|>1$$

โดยที่ q_{ij} คือค่าของตัวเลขในหลักที่ i และแถวที่ j ของแมทริกซ์ $\mathbf{Q}$ และ p_i คือค่าของตัวเลขในหลักที่ i และแถวที่ i ของแมทริกซ์ $\mathbf{P}$

โปรแกรมด้านล่างแสดงอิมเพาส์เรสพอนส์ฟังก์ชันและการซิมูเลทแบบมอนติคาร์โล

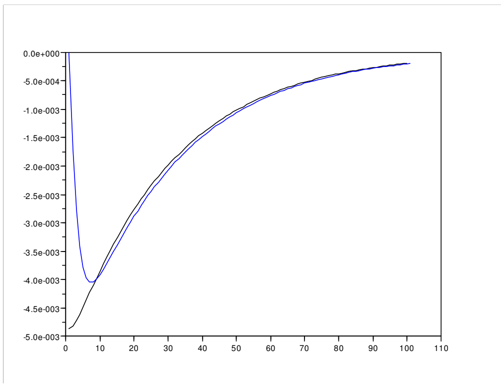
ผลกระทบของนโยบายการคลังต่อการบริโภคและผลผลิต

```
clear; beta=0.9; alpha = 0.66;  sg = 0.1; d = 0.1; gamma=0.65;
kstar =  ((1+d*beta-beta)/(alpha*beta))^(1/(-1+alpha));
ystar = kstar^alpha;
istar = d*kstar;
si = istar/ystar;
sc = 1 - si - sg;
fpkstar = alpha*kstar^(alpha-1);
M1 = [  0    si/d   0; 1   -beta*(alpha-1)*fpkstar   0; 0  0  1];
M2 = [ -sc    -si*(1-1/d)+alpha    -sg;1    0     0;0   0    gamma ];
W = inv(M1)*M2;
[R, P] = spec(W);
Q = inv(R);
if abs(P(1,1)) > 1 then
  phik = -Q(1,2)/Q(1,1);
  phig = -Q(1,3)/Q(1,1);
else
  phik = -Q(2,2)/Q(2,1);
  phig = -Q(2,3)/Q(2,1);
end
g(1) =0.02^0.5;
```

```
k(1) = 0;
for t=1:100
 c(t) = phik*k(t) + phig*g(t);
 y(t) = alpha*k(t);
 k(t+1) = W(2,1)*c(t) + W(2,2)*k(t) + W(2,3)*g(t);
 g(t+1) = 0.65*g(t) + 0;
end
clf;
plot(c, 'black');
plot(k, 'blue');

//Monte Carlo Simulation
eg = grand(5001,1,'nor',0,0.02);
k(1) = 0;
g(1) = eg(1);
for t=1:5000
 c(t) = phik*k(t) + phig*g(t);
 y(t) = alpha*k(t);
 k(t+1) = W(2,1)*c(t) + W(2,2)*k(t) + W(2,3)*g(t);
 g(t+1) = 0.65*g(t) + eg(t+1);
end
disp("sd of y = ");  disp(stdev(y));
disp("sd of c = ");   disp(stdev(c));
```

ผลที่ได้จากโปรแกรม



sd of y = 0.0018716
sd of c = 0.0033785

จากกราฟอิมเพาส์เรสพอนส์ของการบริโภคและผลผลิตที่ได้จากโปรแกรม กราฟของการบริโภค คือกราฟเส้นที่อยู่ด้านล่าง จะเห็นว่าการบริโภคจะลดลงทันทีเมื่อทีการเพิ่มของการใช้จ่ายของรัฐบาล เนื่องจากในแบบจำลองนี้การใช้จ่ายของรัฐบาลที่มากขึ้น จะนำมาซึ่งการเก็บภาษีที่เพิ่มมากขึ้นนั้นเอง กราฟเส้นด้านบนคือกราฟของผลผลิตซึ่งจะเริ่มลดลงในเวลา $t = 2$ เมื่อเวลาผ่านไปผลจากการเพิ่มของการใช้จ่ายของรัฐบาลจะค่อยๆหายไปและระดับการบริโภคและระดับผลผลิตจะกลับสู่ค่าในสภาวะคงตัวในที่สุด ผลที่ได้จากการซิมูเลทแบบมอนติคาร์โล พบว่าความผันผวนของการใช้จ่ายของรัฐบาลส่งผลให้เกิดความแปรปรวนในระดับการบริโภคและการผลิตประมาณ 0.2 และ 0.3 เปอร์เซ็นต์ตามลำดับ

6.6 ผลของการเพิ่มอัตราการเติบโตของปริมาณเงินในแบบจำลองที่มีเงิน

ส่วนนี้จะแสดงตัวอย่างการซิมูเลทเพื่อศึกษาการเพิ่มขึ้นของอัตราการเติบโตของปริมาณเงิน (growth of money supply) ต่อการบริโภคและอัตราเงินเฟ้อในแบบจำลองเงินสดสำหรับใช้จ่ายล่วงหน้า (cash in advance model) ในแบบจำลองนี้ผู้บริโภคมีสินทรัพย์อยู่สองชนิดคือ เงินสด และสินค้าทุน โดยสินค้าจะให้ผลตอบแทนจากการผลิต แต่เงินสดจะให้ผลตอบแทนเป็นศูนย์ อย่างไรก็ตามผู้บริโภคจะต้องถือเงินสดไว้เพื่อการจับจ่ายใช้สอยและซื้อสินค้า การมีเงินในแบบจำลองนี้ทำให้แบบจำลองซับซ้อนกว่าแบบจำลองที่ผ่านๆมา เนื่องจากในแบบจำลองนี้มีระดับราคา

แบบจำลองที่จะใช้เป็นดังนี้

$$\max_{c_t, k_{t+1}, m_t} E_1 \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t u(c_t, h_t)$$

ภายใต้เงื่อนไข

$$k_{t+1} + \frac{m_t}{p_t} = (1-d)k_t + f(k_t) - c_t + \frac{m_{t-1}}{p_t} + \frac{(G_t - 1)M_{t-1}}{p_t}$$

$$p_t c_t = m_{t-1} + (G_t - 1)M_{t-1}$$

$$M_{t+1} = G_{t+1} M_t$$

$$\hat{G}_{t+1} = \gamma \hat{G}_{t+1} + \varepsilon_{t+1}; \ \varepsilon_{t+1} \sim N(0,0.1)$$

$$f(k_t, h_t) = k_t^{\alpha}, \ u(c_t) = \ln(c_t)$$

$$\alpha = 0.66, \ \beta = 0.9, \ G^* = 1.1$$

โดยที่ p_t คือระดับราคา m_t คือเงินที่ผู้บริโภคถือไว้เพื่อการบริโภค M_t คือปริมาณเงิน (money supply) ในดุลยภาพ

$$m_t = M_t$$

สมการ