การคาดการณ์ประชากร (เพิ่มเติม):

แบบจำลองเชิงทวีกำลังปรับปรุง (Modified Exponential Model)

โดย รศ. ดร. วรรณศิลป์ พีรพันธุ์ © 2003

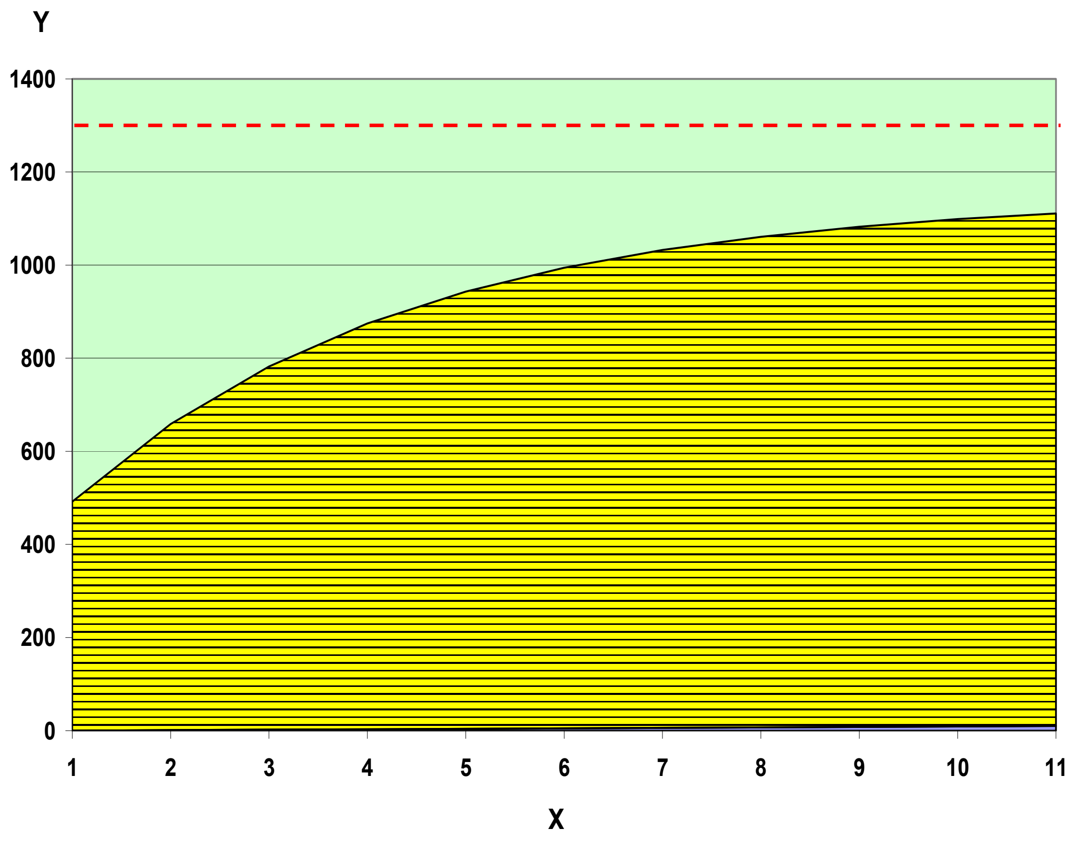
แบบจำลองเชิงเส้นตรงและทวีกำลังตั้งอยู่บนสมมุติฐานที่ว่า จำนวนประชากรจะ เพิ่มขึ้นหรือลดลงตามแนวโน้มในอดีตโดยไม่มีขีดจำกัด ซึ่งในกรณีช่วงเวลาสั้น ๆ สมมุติฐานดังกล่าวเป็นที่ยอมรับได้ อย่างไรก็ตาม ในช่วงเวลาที่ยาวออกไปมาก ๆ จะพบว่า พื้นที่ว่าง ทรัพยากร สาธารณูปโภคและสาธารณูปการต่าง ๆ มีอยู่จำกัด ในแต่ละพื้นที่ เมื่อประชากรในพื้นที่เพิ่มขึ้นถึงจุด ๆ หนึ่งจะทำให้พื้นที่ว่าง ทรัพยากร สาธารณูปโภคและสาธารณูปการ ถูกใช้จนเต็มประสิทธิภาพ ไม่สามารถรองรับประชากรที่เพิ่มขึ้นอีกต่อไปได้ ในทำนองเดียวกัน ประชากรที่มีแนวโน้มลดลง ก็ไม่ได้หมายความว่าจำนวนประชากรในอนาคตของพื้นที่ในระยะยาวจะกลายเป็นศูนย์หรือติดลบ เมื่อประชากรลดลงถึงจุด ๆ หนึ่ง ย่อมทำให้เหลือพื้นที่ว่าง ทรัพยากร และสาธารณูปโภค สาธารณูปการมากพอที่จะดึงดูดผู้คนให้กลับเข้ามาในพื้นที่ใหม่ได้

ดังนั้น แทนที่จะสมมุติว่าประชากรในอนาคตจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงในปริมาณที่คงที่ต่อช่วงเวลา (แบบจำลองเชิงเส้นตรง) หรือด้วยอัตราการเติบโตที่คงที่ (แบบจำลองเชิงทวีกำลัง) ในบางครั้งอาจดูมีเหตุผลกว่าที่จะสมมุติให้การเพิ่มขึ้นหรือลดลงดังกล่าว เพิ่มขึ้นหรือลดลงในอัตราส่วนที่ลดลง (declining rate) เมื่อเข้าใกล้จุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุด (upper or lower limit) ของสมรรถนะในการรองรับประชากรของพื้นที่ แบบจำลองแบบหนึ่งที่คำนึงถึงขีดจำกัดหรือ "asymptote" ของจำนวนประชากรในพื้นที่ได้แก่ แบบจำลองเชิงทวีกำลังปรับปรุง (modified exponential model) ซึ่งมีรูปแบบสมการโดยทั่วไปคือ:

$$Y_C = C + ab^X \quad \text{............ [1]}$$

โดยที่ C = ค่าจำกัดบนหรือค่าจำกัดล่าง (upper or lower limit) หรือ "asymtote"

ภาพที่ 1 แสดงตัวอย่างของเส้นโค้งเชิงทวีกำลังปรับปรุง เมื่อค่า a เป็นลบ และ b <1 ค่า C หรือค่าจำกัดบนหรือ asymptote ในที่นี้คือประมาณ 1,300 เมื่อค่า X เพิ่มขึ้น ค่า Y_C จะเข้าใกล้ 1,300 เข้าไปทุกที แต่ไม่ว่าค่า X จะเพิ่มมากขึ้นเท่าใด ค่า Y_C ก็จะไม่มีวันที่จะเท่ากับ 1,300 ทั้งนี้จะเห็นว่าการเพิ่มขึ้นสุทธิในช่วง X_1 ถึง X_2 อยู่ที่ 650-500 หรือ 150 ขณะที่การเพิ่มขึ้นสุทธิในช่วง X_2 ถึง X_3 ลดลงเหลือ 770-650 หรือ 120 สัดส่วนของการเพิ่มขึ้นของแต่ละช่วงเท่ากับ 120/150 หรือ 0.8 ซึ่งก็คือค่า b ในสมการนั่นเอง



ภาพที่ 1 ตัวอย่างของเส้นโค้งเชิงทวีกำลังปรับปรุง เมื่อ a เป็นลบ และ $b < 1$

เส้นโค้งเชิงทวีกำลังปรับปรุงมีรูปร่างต่างกันออกไป ขึ้นอยู่กับค่าของพารามิเตอร์ a และ b ว่าจะเป็นบวกหรือลบ ในการคำนวณหาค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ของสมการ [1] จำเป็นต้องอาศัยข้อมูลในอดีตที่มีลักษณะตามเงื่อนไข 2 ประการคือ:

1) จำนวนข้อมูลในอดีต (observation) ต้องหารด้วย 3 ลงตัว

2) ต้องจัดเรียงข้อมูลโดยให้ค่า Index X เริ่มจาก 0 และเรียงต่อไปเป็น 1, 2, 3, ... ตามลำดับ

เราสามารถคำนวณค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ของสมการ [1] ได้จากสมการต่อไปนี้:

$$b^n = \frac{\left(\Sigma_3 Y - \Sigma_2 Y\right)}{\left(\Sigma_2 Y - \Sigma_1 Y\right)} \qquad \text{..........[2]}$$

$$a = \left(\Sigma_2 Y - \Sigma_1 Y\right)\left[\frac{(b-1)}{(b^n - 1)^2}\right] \qquad \text{.........[3]}$$

$$C = 1/n \left[\frac{(\Sigma_1 Y)(\Sigma_3 Y) - (\Sigma_2 Y)^2}{\Sigma_1 Y + \Sigma_3 Y - 2\Sigma_2 Y} \right] \quad ....[4]$$

โดยที่: n = จำนวนข้อมูล N หารด้วย 3

$\Sigma_1 Y$ = ผลรวมเฉพาะส่วน (partial sum) ของ 1/3 ส่วนแรกของข้อมูลในอดีต (y's)

$\Sigma_2 Y$ = ผลรวมเฉพาะส่วน (partial sum) ของ 1/3 ส่วนที่สองของข้อมูลในอดีต

$\Sigma_3 Y$ = ผลรวมเฉพาะส่วน (partial sum) ของ 1/3 ส่วนที่สามของข้อมูลในอดีต

ตารางที่ 1 ข้อมูลสำหรับการคาดการณ์ประชากรโดยแบบจำลองเชิงทวีกำลังปรับปรุง

ปี ค.ศ.	Index	ประชากร	Partial Sum
	X	Y	$\Sigma_n Y$
1940	0	17,000	
1945	1	22,710	
1950	2	29,100	68,810
1955	3	35,000	
1960	4	42,940	
1965	5	52,015	129,955
1970	6	62,620	
1975	7	75,100	
1980	8	88,505	226,225

ตารางที่ 1 แสดงตัวอย่างของการคำนวณค่าต่าง ๆ เพื่อนำไปใช้ ในสมการ [2] ถึง [4]:

$n = N/3 = 9/3 = 3$

$\Sigma_1 Y = 17{,}000 + 22{,}710 + 29{,}100 = 68{,}810$

$\Sigma_2 Y = 35{,}000 + 42{,}940 + 52{,}015 = 129{,}955$

$\Sigma_3 Y = 62{,}620 + 75{,}100 + 88{,}505 = 226{,}225$

เมื่อนำค่าต่าง ๆ ดังกล่าวไปแทนในสมการ [2] ถึง [4] จะสามารถหาค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ในสมการ [1] ได้ดังนี้:

สมการ [2]:

$$b^n = \frac{(226.225 - 129{,}955)}{(129{,}955 - 68{,}810)} = 1.5744$$

$$b = (1.5744)^{1/3} = 1.1633$$

สมการ [3]:

$$a = (129{,}955 - 68{,}810)\left[\frac{(1.1633 - 1)}{(1.5744 - 1)^2}\right]$$

$$= 61{,}145\ (.4950)$$

$$= 30{,}266.78$$

สมการ [4]:

$$C = (1/3)\left[\frac{(68{,}810)(226{,}225) - (129{,}955)^2}{68{,}810 + 226{,}225 - 2(129{,}955)}\right]$$

$$= -12{,}543.39$$

เมื่อแทนค่า a, b และ c ในสมการ [1] จะได้สมการที่ใช้ในการคาดการณ์ประชากรด้วยแบบจำลองเชิงทวีกำลังปรับปรุงดังนี้:

$$Y_C = -12{,}543.39 + 30{,}266.78(1.1633)^X$$

ในการคาดการณ์ประชากรในอนาคต เราก็แทนที่ X ในสมการด้วยช่วงเวลาที่ต้องการ เช่น จะคาดการณ์ประชากรในปี ค.ศ.1985 ซึ่งมีค่า X เป็น 9 จะได้:

$$Y_{1985} = -12{,}543.39 + 30{,}266.78(1.1633)^9$$

$$= 105{,}540.76$$