ปรากฏการณ์ขนส่ง (*Transport Phenomena*)

ปรากฏการณ์ที่มีการเคลื่อนย้ายหรือส่งผ่านปริมาณในระดับมหภาค

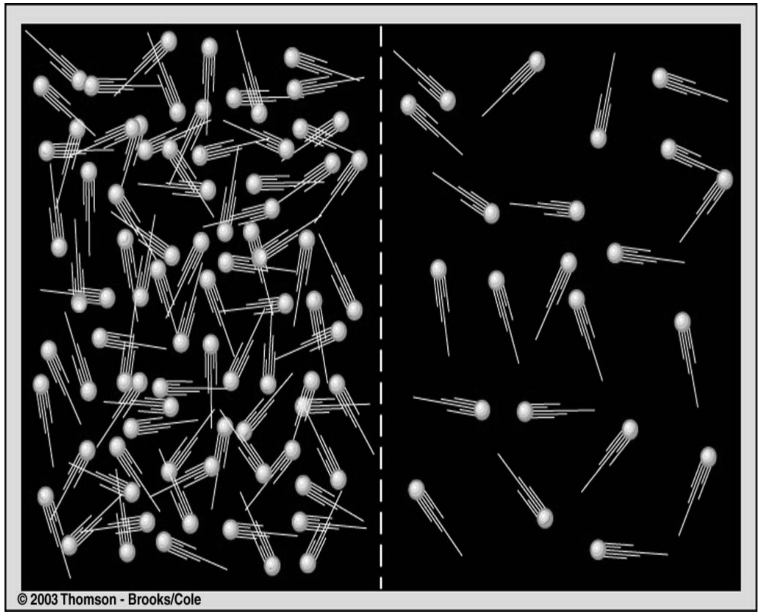
ในบทนี้จะกล่าวถึงเฉพาะ

- ***การฟุ้งของโมเลกุล*** (***Molecular Diffusion***)
- ***การนำความร้อน*** (***Heat Conduction***)
- ***ความหนืด*** (***Viscosity***)

จากการทดลองพบว่า

- การฟุ้งจะเกิดขึ้นเมื่อโมเลกุลมีการกระจายไม่สม่ำเสมอ
- การฟุ้งจะมีทิศทางออกจากบริเวณที่มีความเข้มข้นของโมเลกุลมาก ไปยังบริเวณที่มีความเข้มข้นของโมเลกุลน้อย

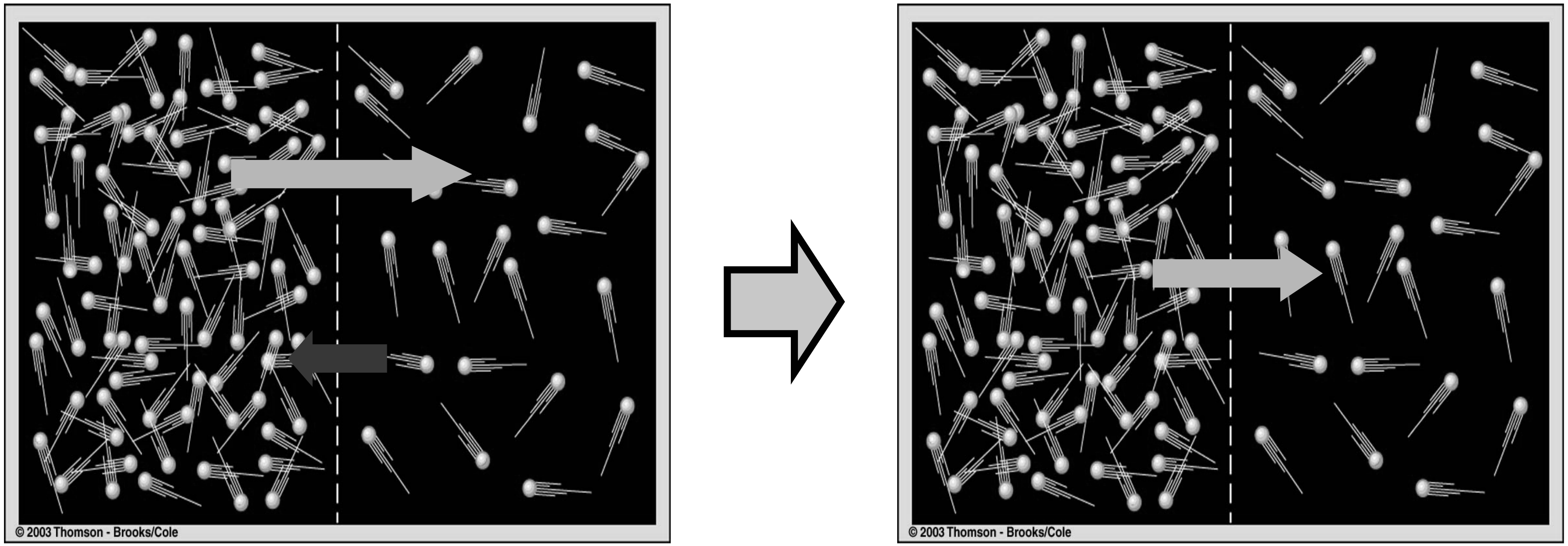
พิจารณาก๊าซอุดมคติ ซึ่งถูกกั้นด้วยผนังดังรูป แต่มีอุณหภูมิ และความดันเท่ากันทั้งสองด้าน



จะเห็นได้ว่าทางด้านที่มีความเข้มข้นมากจะมีอัตราการชนกันมากกว่าด้านที่มีความเข้มข้นน้อย

ดังนั้นเมื่อยกผนังกั้นออกก็จะมีโมเลกุลกระจายเข้าสู่ด้านที่มีความเข้มข้นน้อยมากกว่ากระจายออกจากด้านที่มีความเข้มข้นน้อย

เกิดเป็นผลลัพธ์ของกระแสการฟุ้งของโมเลกุลจากทางด้านที่มีความเข้มข้นมากไปยังด้านที่มีความเข้มข้นน้อย



จากการทดลองพบว่า

$$\boxed{J_x = -D\frac{\partial n}{\partial x}}$$

กฎของฟิกส์ (***Fick's law***)

โดย ***J*** : ความหนาแน่นกระแสอนุภาค (Particle current density)
จำนวนอนุภาคสุทธิซึ่งเคลื่อนที่ผ่านพื้นที่ 1 หน่วย ซึ่งตั้งฉากกับทิศทางการฟุ้ง ใน 1 หน่วยเวลา ($m^{-2}s^{-1}$)

n : ความเข้มข้นของโมเลกุล (Particle density)
จำนวนอนุภาคต่อปริมาตร (m^{-3})

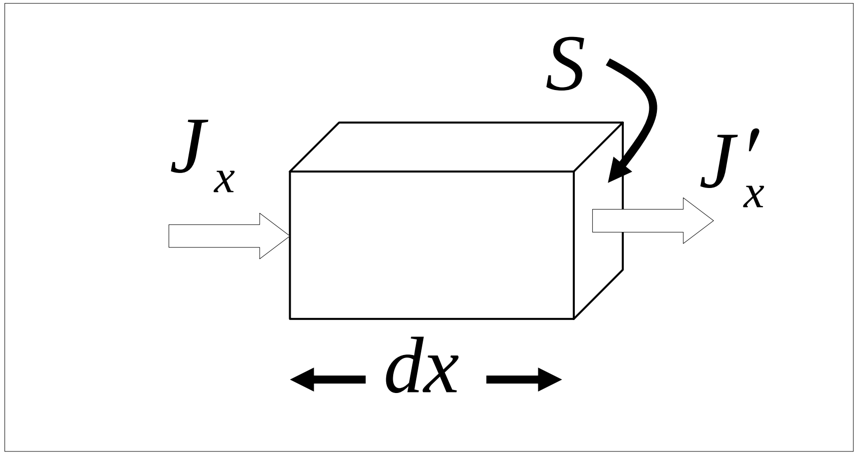
D : สัมประสิทธิ์การฟุ้ง (Diffusion coefficient) (m^2s^{-1})

$\frac{\partial n}{\partial x}$: เกรเดียนท์ของความเข้มข้นในแนวแกน x

พิจารณาปริมาตรเล็ก ๆ $dV = Sdx$ ดังรูป

ในกรณีพื้นที่หน้าตัดคงที่

$$dJ_x = J'_x - J_x$$



การเพิ่มขึ้นของอนุภาค ในปริมาตร ***dV***

$$\left(dN\right)_{x=\text{const}} = -\left(dJ_x\right)_{t=\text{const}} Sdt$$

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{x=\text{const}} = -\left(\frac{dJ_x}{dx}\right)_{t=\text{const}} Sdx$$

จะได้

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial J_x}{\partial x}}$$

ในกรณีพื้นที่หน้าตัดคงที่

จากกฎของฟิกส์ จะได้ว่า

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}}$$

สมการการฟุ้ง

(*Diffusion Equation*)

การฟุ้งในสถานะคงตัว (Stationary diffusion)

การฟุ้งในกรณีที่ความเข้มข้นของโมเลกุลที่ตำแหน่งต่าง ๆ มีค่าคงที่ตลอดเวลา

นั่นคือ $$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = 0}$$ ***พื้นที่หน้าตัดใด ๆ***

จะได้ว่า $$\frac{\partial J_x}{\partial x} = 0$$ และ $$\frac{\partial n}{\partial x} = \text{constant}$$

นั่นคือ J_x มีค่าเท่ากันทุกตำแหน่ง หรืออัตราการฟุ้งเข้าเท่ากันอัตราการฟุ้งออก

ในกรณีพื้นที่หน้าตัดคงที่

นั่นคือ $$\boxed{n = -\frac{J_x}{D}x + n_0}$$

โดย n_0 คือความเข้มข้นเมื่อ $x = 0$

ในกรณีพื้นที่หน้าตัดคงที่

ตัวอย่าง

ที่สถานะคงตัว CO_2 ฟุ้งผ่านท่อพื้นที่หน้าตัด 1.5×10^{-3} m^2 ยาว 0.25 m มีความหนาแน่นกระแสอนุภาค 5.1×10^{17} $m^{-2}s^{-1}$ ปลายทั้งสองข้างมีความเข้มข้นของ CO_2 เท่ากับ 1.41×10^{22} m^{-3} to 8.6×10^{21} m^{-3} ตามลำดับ

1. จงคำนวณหาสัมประสิทธิ์การฟุ้งของ CO_2

จาก
$$n = -\frac{J_x}{D}x + n_0$$

แทนค่า
$$8.6\times10^{21} = -\frac{5.1\times10^{17}}{D}(0.25) + 1.41\times10^{22}$$

จะได้
$$D = 2.32\times10^{-5} \ \ m^2s^{-1}$$

☺

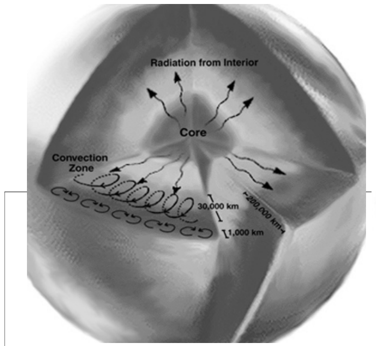
2. จงคำนวณหาจำนวนโมเลกุลของ CO_2 ที่ฟุ้งออกจากท่อนี้ใน 1 วินาที

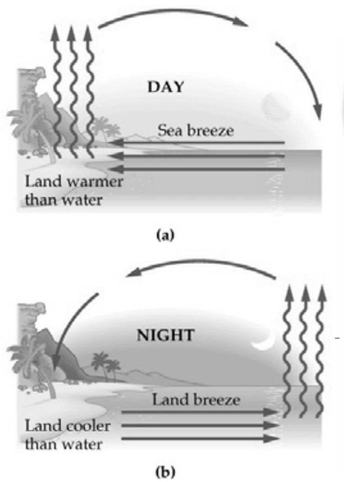
$$= \quad J \cdot S$$

$$= \quad (5.1\times10^{17})\left(1.5\times10^{-3}\right)$$

$$= \quad 7.65\times10^{14} \quad \mathrm{s}^{-1}$$

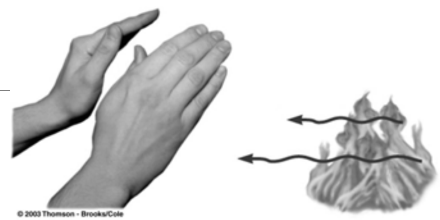
การนำความร้อน (Heat Conduction)





การพาความร้อน (Heat Convection)

การแผ่รังสีความร้อน (Thermal Radiation)



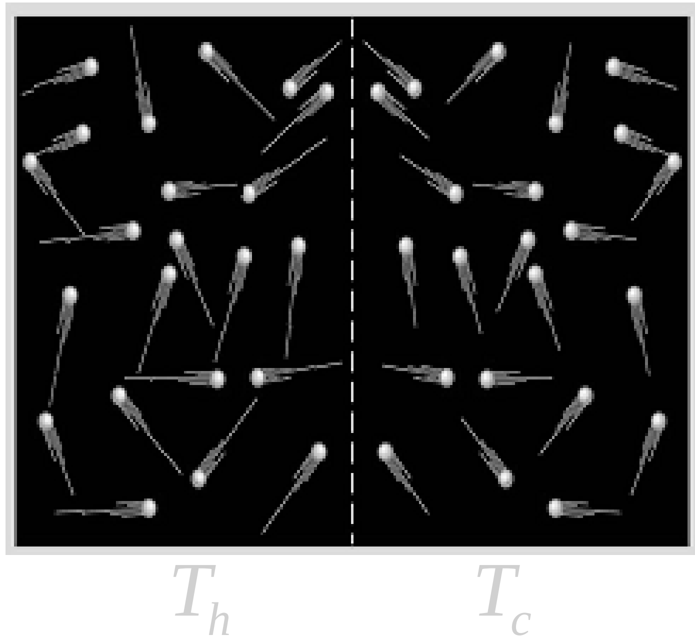
การนำความร้อน (Heat conduction)

การถ่ายเทความร้อนโดยไม่มีการถ่ายเทมวล

จากการทดลองพบว่า

- การนำความร้อนจะเกิดขึ้นเมื่ออุณหภูมิไม่สม่ำเสมอ
- การนำความร้อนจะมีทิศทางออกจากบริเวณที่มอุณหภูมิสูง ไปยังบริเวณที่มีอุณหภูมิต่ำ

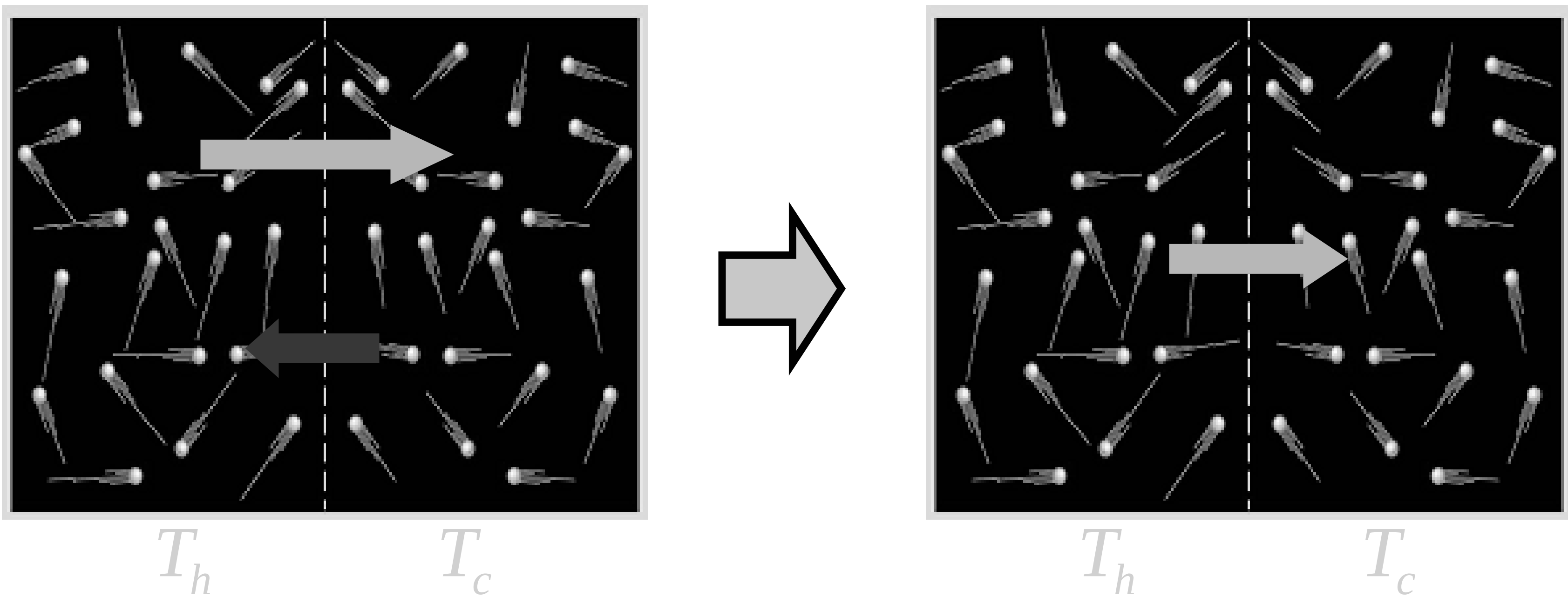
พิจารณาก๊าซอุดมคติ ซึ่งถูกกั้นด้วยผนังดังรูป มีอุณหภูมิต่างกัน แต่ความดันและความเข้มข้นเท่ากันทั้งสองด้าน



จะเห็นได้ว่าทางด้านที่มีอุณหภูมิสูงจะมีอัตราเร็วเฉลี่ยสูงกว่า ดังนั้นอัตราการชนกันมากกว่าด้านที่มีอุณหภูมิต่ำ

แต่เนื่องจากทั้งสองด้านมีความเข้มข้นเท่ากัน ดังนั้นเมื่อยกผนังกั้นออกจึงไม่มีการฟุ้งของอนุภาคสุทธิ นั่นคือจำนวนอนุภาคเคลื่อนที่เข้าเท่ากับออก

แต่พลังงานของอนุภาคทั้ง 2 ข้างไม่เท่ากัน จึงเกิดเป็นผลลัพธ์ของกระแสการถ่ายเทของความร้อนจากทางด้านที่มีอุณหภูมิสูงไปยังด้านที่มีอุณหภูมิต่ำ



จากการทดลองพบว่า

$$\boxed{J_E = -K\frac{\partial T}{\partial x}}$$

กฎของฟูเรียร์

(***Fourier's law***)

โดย $\boldsymbol{J_E}$: ความหนาแน่นกระแสพลังงาน (Energy current density)
ปริมาณพลังงานสุทธิซึ่งเคลื่อนที่ผ่านพื้นที่ 1 หน่วย ซึ่งตั้งฉากกับทิศทางการนำความร้อน ใน 1 หน่วยเวลา ($J.m^{-2}s^{-1}$)

$\boldsymbol{T}$: อุณหภูมิ (^{o}C)

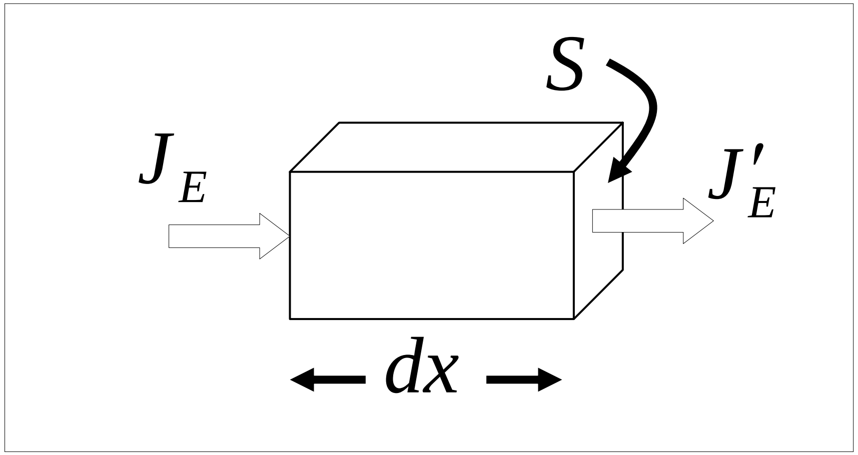
$\boldsymbol{K}$: สัมประสิทธิ์การนำความร้อน (Thermal conductivity) ($J.m^{-1}s^{-1}\,C^{-1}$)

$\frac{\partial T}{\partial x}$: เกรเดียนท์ของอุณหภูมิในแนวแกน *x*

พิจารณามวลเล็ก ๆ $m = \rho S dx$ ดังรูป

ในกรณีพื้นที่หน้าตัดคงที่

$$dJ_E = J'_E - J_E$$



การเพิ่มขึ้นของพลังงานในมวล ***m***

$$mC(dT)_{x=\text{const}} = -(dJ_E)_{t=\text{const}} S dt$$

$$\rho CSdx\left(\frac{dT}{dt}\right)_{x=\text{const}} = -\left(\frac{dJ_E}{dx}\right)_{t=\text{const}} Sdx$$

จะได้

$$\boxed{\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial J_E}{\partial x}}$$

จากกฎของฟิกส์ จะได้ว่า

ในกรณีพื้นที่หน้าตัดคงที่

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{\rho C}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

สมการการนำความร้อน

(_Equation of thermal conduction_)

โดย ρ : ความหนาแน่นของสาร ($kg.m^{-3}$)

C : ความร้อนจำเพาะของสาร ($J.kg^{-1}\ K^{-1}$)

แม้เราจะพิสูจน์สมการนี้จากก๊าซอุดมคติ แต่สมการนี้สามารถขยายไปใช้กับของเหลวและโลหะได้ด้วย เนื่องจากของเหลวก็มีลักษณะการเคลื่อนที่ที่ปั่นป่วนเช่นเดียวกับก๊าซ และโลหะก็มีอิเล็กตรอนซึ่งเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระเช่นเดียวกับก๊าซเป็นตัวนำความร้อน

การนำความร้อนในสถานะคงตัว (Stationary heat conduction)

การนำความร้อนในกรณีที่อุณหภูมิที่ตำแหน่งต่าง ๆ มีค่าคงที่ตลอดเวลา

นั่นคือ $\boxed{\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0}$ ***พื้นที่หน้าตัดใด ๆ***

จะได้ว่า $\dfrac{\partial J_E}{\partial x} = 0$ และ $\dfrac{\partial T}{\partial x} = \text{constant}$

นั่นคือ J_E มีค่าเท่ากันทุกตำแหน่ง
หรืออัตราการส่งผ่านพลังงานเข้า
เท่ากับอัตราการส่งผ่านพลังงานออก

ในกรณีพื้นที่หน้าตัดคงที่

นั่นคือ $\boxed{T = -\dfrac{J_E}{K}x + T_0}$

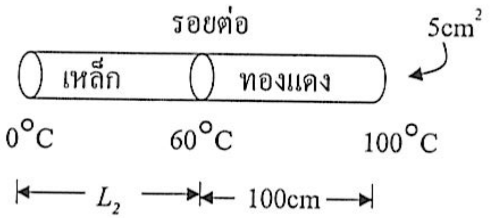
โดย T_0 คือความเข้มข้นเมื่อ $x = 0$

ในกรณีพื้นที่หน้าตัดคงที่

ตัวอย่าง ท่อนโลหะพื้นที่หน้าตัด 5 cm^2 มีฉนวนหุ้ม ปลายด้านหนึ่งเป็นทองแดง ยาว 100 cm จุ่มอยู่ในน้ำ 100 °C อีกปลายทำด้วยเหล็กยาว L_2 จุ่มในน้ำแข็ง 0 °C ที่สถานะคงตัวพบว่าอุณหภูมิที่ร้อยต่อโลหะเป็น 60 °C สัมประสิทธิ์การนำความร้อนของทองแดง และเหล็กเป็น 0.92 และ 0.12 cal / s/cm/°C ตามลำดับ

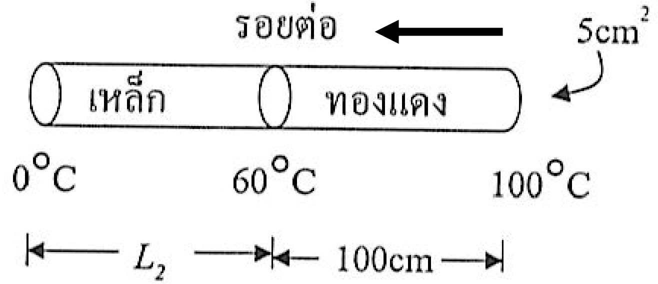
1. จงคำนวณหาความยาวของเหล็ก (L_2)

เนื่องจากอุณหภูมิที่ตำแหน่งต่าง ๆ มีค่าคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงไปกับเวลา ⇨ การนำความร้อนในสถานะคงตัว และพื้นที่หน้าตัดคงที่



$$T = -\frac{J_E}{K}x + T_0$$

และ J_E เท่ากันตลอดทั้งเส้น



ที่รอยต่อ

สำหรับทองแดง

$$60 = -\frac{J_E^{copper}}{0.92}(100) + 100$$

จะได้

$$J_E^{copper} = 0.368 \ \ \mathrm{cal.m^{-2}s^{-1}}$$

สำหรับเหล็ก

$$0 = -\frac{J_E^{iron}}{0.12}L_2 + 60$$

$$0 = -\frac{0.368}{0.12}L_2 + 60$$

จะได้

$$L_2 = 19.57 \ \ \mathrm{cm}$$

☺

2. ปริมาณความร้อนที่ไหลผ่านไปยังน้ำแข็งใน 1 วินาที

$$= \quad J_E \cdot S \cdot \Delta t$$

$$= \quad (0.368)(5)(1)$$

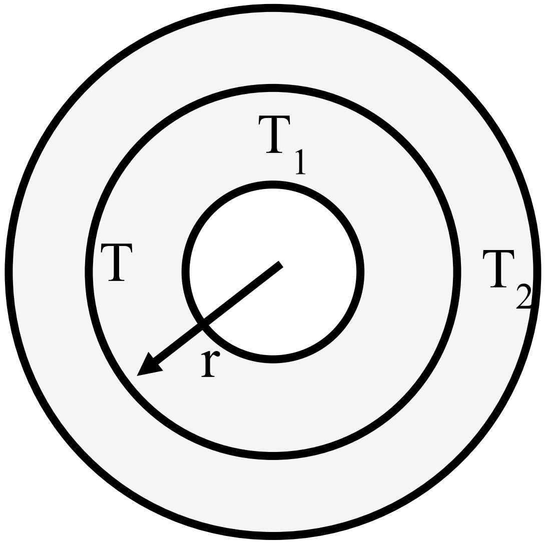
$$= \quad 1.84 \quad \text{cal}$$

ตัวอย่าง โลหะทรงกลมกลวงรัศมีภายใน R_1 อุณหภูมิ T_1
และรัศมีภายนอก R_2 อุณหภูมิ T_2

จงหาอุณหภูมิบนผิวเสมือนซึ่งมีรัศมี r โดยที่ $R_1 < r < R_2$

1 คะแนน

เนื่องจากอุณหภูมิที่ตำแหน่งต่าง ๆ
มีค่าคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงไปกับเวลา → การนำความร้อนในสถานะคงตัว



เนื่องจาก<u>พื้นที่</u>ส่งผ่านความร้อน<u>ไม่คงที่</u>
J_E จะไม่คงที่ แต่อัตราการส่งผ่าน
ความร้อน ($J_E \cdot S$) จะคงที่

2 คะแนน

จากกฎของฟูเรียร์ พิจารณาในแนวรัศมี $$J_E = -K\frac{\partial T}{\partial r}$$ 1 คะแนน

จะได้ $$\boxed{J_E S = -K\frac{\partial T}{\partial r}\left(4\pi r^2\right) = \text{const}}$$ 1 คะแนน

$$dT = -\left(\frac{\text{const}}{4\pi K}\right)\frac{dr}{r^2}$$ 1 คะแนน

$$\int_{T_1}^{T} dT = -\left(\frac{\text{const}}{4\pi K}\right)\int_{R_1}^{r}\frac{dr}{r^2}$$ 1 คะแนน

ดังนั้น $$\boxed{T = \left(\frac{\text{const}}{4\pi K}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1}\right)+T_1}$$ 1 คะแนน

เมื่อ $r = R_2$ จะได้ $T = T_2$

1 คะแนน

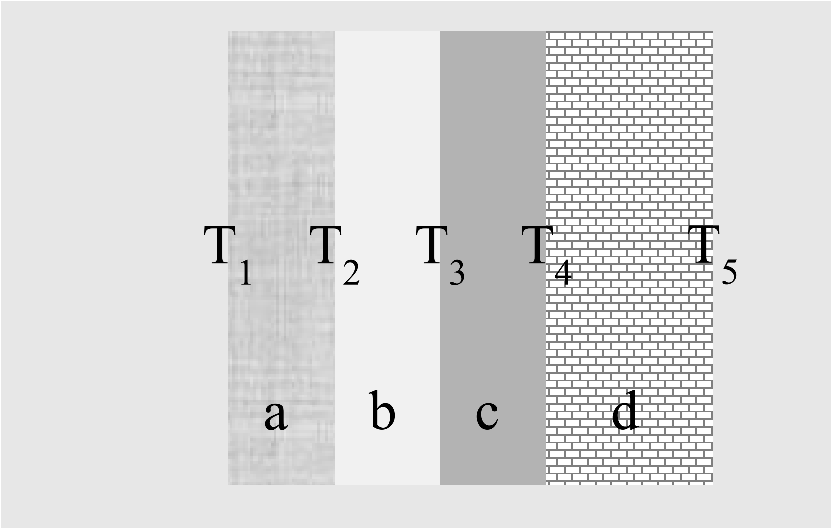
นั่นคือ $$\text{const} = 4\pi K\left(T_2 - T_1\right)\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}\right)$$

จะได้ $$T = \left(T_2 - T_1\right)\left(\frac{R_2}{r}\right)\left(\frac{r - R_1}{R_2 - R_1}\right) + T_1$$ ☺

1 คะแนน

ตัวอย่าง ผนังบ้านหลังหนึ่งประกอบด้วยชั้นต่าง ๆ ดังรูป เมื่อทำการวัดอุณหภูมิที่ตำแหน่งต่าง ๆ พบว่า $T_1 = 25^oC$, $T_2 = 20^oC$ และ $T_5 = -10^oC$ คงที่ไม่เปลี่ยนไปกับเวลา โดย $L_d = 2L_a$ และ $K_d = 5K_a$

จงหาอุณหภูมิ T_4



อุณหภูมิไม่ขึ้นกับเวลา

2 คะแนน

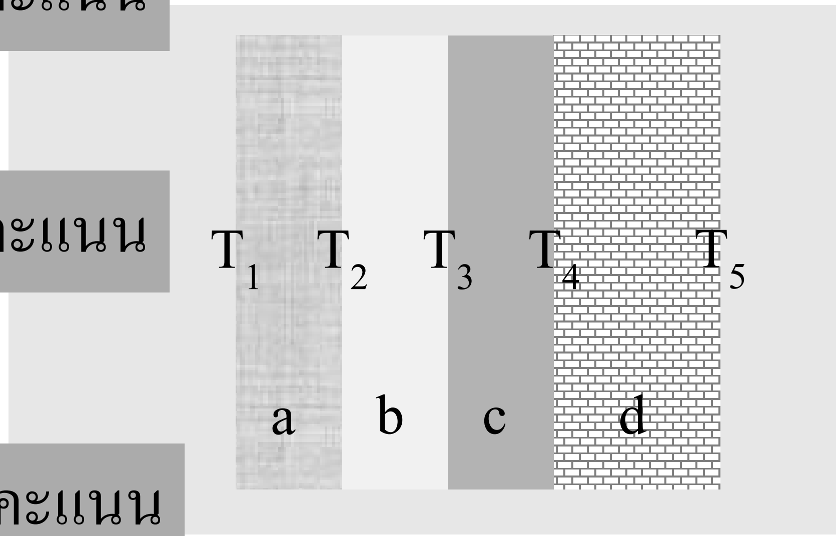
การนำความร้อนในสถานะคงตัว และพื้นที่หน้าตัดคงที่

$$T = -\frac{J_E}{K}x + T_0$$

1 คะแนน

1 คะแนน

จะได้ว่า $$T_2 = -\frac{J_E}{K_a}L_a + T_1$$ 1 คะแนน



และ $$T_5 = -\frac{J_E}{K_d}L_d + T_4$$ 1 คะแนน

นั่นคือ

$$T_4 = \frac{K_a L_d}{K_d L_a}\left(T_1 - T_2\right) + T_5$$ 2 คะแนน

แทนค่าต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนดมาให้

1 คะแนน

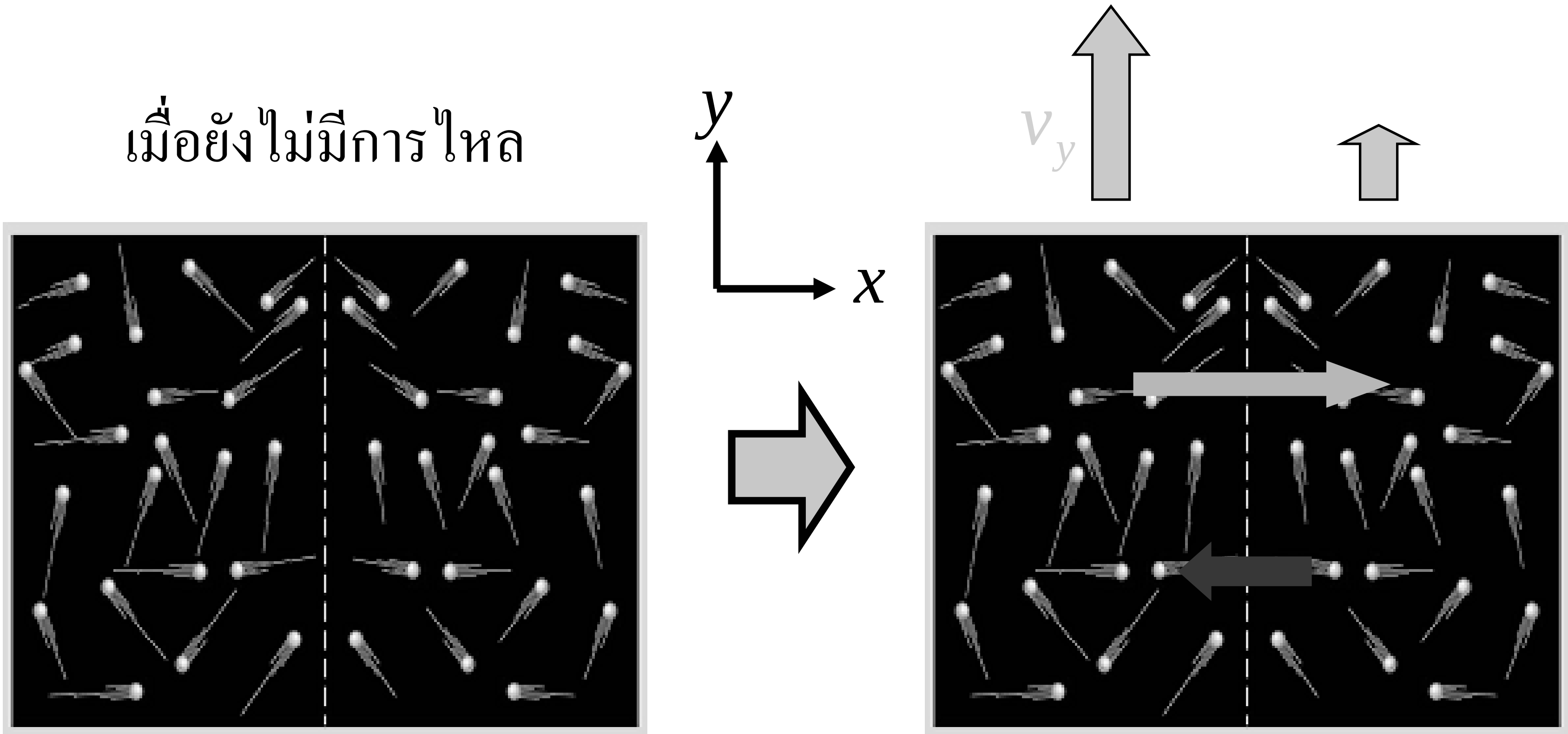
จะได้ $$T_4 = \frac{K_a\left(2L_a\right)}{\left(5K_a\right)L_a}\left(25^{\circ}\mathrm{C} - 20^{\circ}\mathrm{C}\right) + \left(-10^{\circ}\mathrm{C}\right)$$

$$= -8^{\circ}\mathrm{C}$$ 1 คะแนน ☺

ความหนืดเป็นสมบัติเฉพาะของของไหล (ก๊าซ และของเหลว) เนื่องจากมีแรงยึดเหนี่ยวระหว่างอนุภาคไม่มากอย่างเช่นของแข็ง ทำให้อนุภาคสามารถเคลื่อนที่ไปมาได้อย่างค่อนข้างอิสระ

เมื่อส่วนใดส่วนหนึ่งของของไหลถูกทำให้เคลื่อนที่ อนุภาคส่วนที่เคลื่อนที่และส่วนอื่น ๆ ก็ยังคงมีการเคลื่อนที่แลกเปลี่ยนไปมาได้ ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมในทั้งสองส่วน

ซึ่งการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมนี้ก็คือ แรงต้านการเคลื่อนที่ของของไหล ซึ่งเรียกว่า แรงหนืด (viscous force) นั่นเอง



พิจารณาของไหลซึ่งมีความหนาแน่นสม่ำเสมอ ขณะยังไม่มีการไหลก็จะไม่มีการส่งผ่านโมเมนตัม แต่เมื่อส่วนทางด้านซ้ายมีถูกทำให้เคลื่อนที่ จะทำให้มีโมเมนตัมส่งออกไปเนื่องจากอนุภาคมีอัตราเร็ว ทำให้ทางด้านขาวมีโมเมนตัมด้วย นั่นคือทางด้านขาวจะมีการไหลด้วย

จากการทดลองพบว่า

$$\boxed{J_p = -\eta \frac{\partial v_y}{\partial x}}$$

กฎของการไหลที่มีความหนืด

(***Law of viscous flow***)

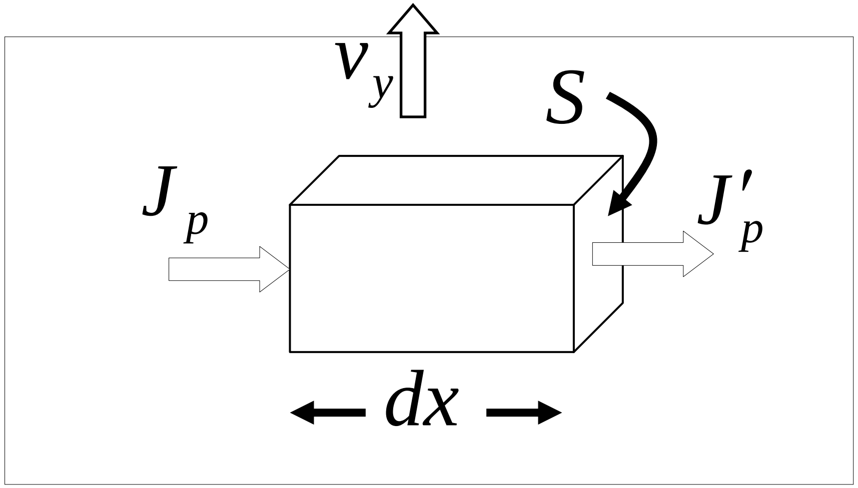
โดย $\boldsymbol{J_p}$: ความหนาแน่นกระแสโมเมนตัม (Momentum current density)
ปริมาณโมเมนตัมในทิศทางการไหลสุทธิซึ่งเคลื่อนที่ในแนวตั้งฉากกับการไหลผ่านพื้นที่ 1 หน่วย ซึ่งตั้งฉากกับทิศทางการถ่ายเทโมเมนตัม ใน 1 หน่วยเวลา (kg.m^{-1}s^{-2})
ซึ่งก็คือความเค้นเฉือน (shear stress) ในผิวของของไหลนั่นเอง

η : สัมประสิทธิ์ความหนืด (viscosity) (N.s.m^{-2})

$\dfrac{\partial v_y}{\partial x}$: เกรเดียนท์ในแนวแกน x ของความเร็วของการไหล

พิจารณาปริมาตรเล็ก ๆ $dV = Sdx$ ดังรูป **_ในกรณีพื้นที่หน้าตัดคงที่_**

$$dJ_p = J'_p - J_p$$



การเพิ่มขึ้นของโมเมนตัม

ในปริมาตร ***dV***

$$Nm\left(dv_y\right)_{x=\text{const}} = -\left(dJ_p\right)_{t=\text{const}} Sdt$$

$$Nm\left(\frac{dv_y}{dt}\right)_{x=\text{const}} = -\left(\frac{dJ_p}{dx}\right)_{t=\text{const}} Sdx$$

จะได้

$$\boxed{\rho\frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial J_p}{\partial x}}$$

แต่ถ้ามีแรงภายนอกมากระทำกับของไหลในทิศเดียวกับการไหล
ทำให้เกิดความเค้นเฉือน τ ในผิวของของไหล

จะได้ว่า

$$\boxed{\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\tau - J_p\right)}$$

จากกฎการไหลที่มีความหนืด

จะได้ว่า

$$\boxed{\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial x}}$$

สมการการเคลื่อนที่ของของไหลที่มีความหนืด

(*Equation of motion of viscous flow*)

ในกรณีพื้นที่หน้าตัดคงที่

การไหลในสถานะคงตัว (Stationary flow)

การไหลที่ความเร็วของการไหลที่ตำแหน่งต่าง ๆ มีค่าคงที่ตลอดเวลา

นั่นคือ $$\boxed{\frac{\partial v_y}{\partial t} = 0}$$ **_พื้นที่หน้าตัดใด ๆ_**

จะได้ว่า $$\frac{\partial J_p}{\partial x} = 0$$ และ $$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = -\frac{1}{\eta}\frac{\partial \tau}{\partial x}$$

นั่นคือ J_p มีค่าเท่ากันทุกตำแหน่ง
หรือการถ่ายเทโมเมนตัมระหว่าง
ชั้นของของไหลมีค่าเท่ากันทั้งหมด

ในกรณีพื้นที่หน้าตัดคงที่

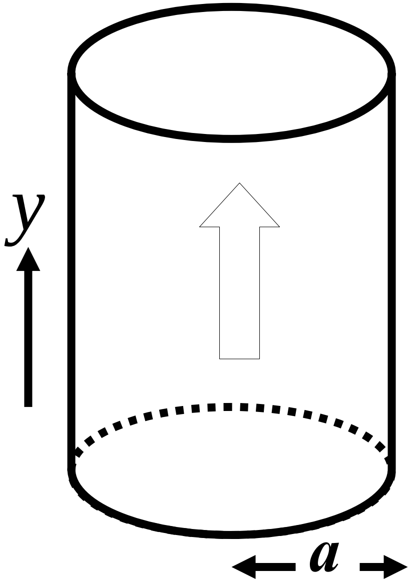
ในกรณีพื้นที่หน้าตัดคงที่

ตัวอย่าง จงหาอัตราการไหลในสถานะคงตัวของของเหลวผ่านท่อทรงกระบอกรัศมี a ยาว l ความดันที่ปลายท่อทั้งสองต่างกัน p และของเหลวมีความหนืด η ความหนาแน่น ρ

พื้นที่หน้าตัดในการฟุ้งของโมเมนตัมไม่คงที่

การไหลในสถานะคงตัว $$\frac{\partial v_y}{\partial t} = 0$$

นั่นคือ ความเร็วในการไหลที่ตำแหน่งต่าง ๆ คงที่



จากกฎข้อที่ 1 ของนิวตัน แสดงว่าแรงลัพธ์ที่กระทำกับชั้นต่าง ๆ ของของเหลวมีค่าเท่ากับศูนย์

นั่นคือ แรงหนืด = แรงภายนอก

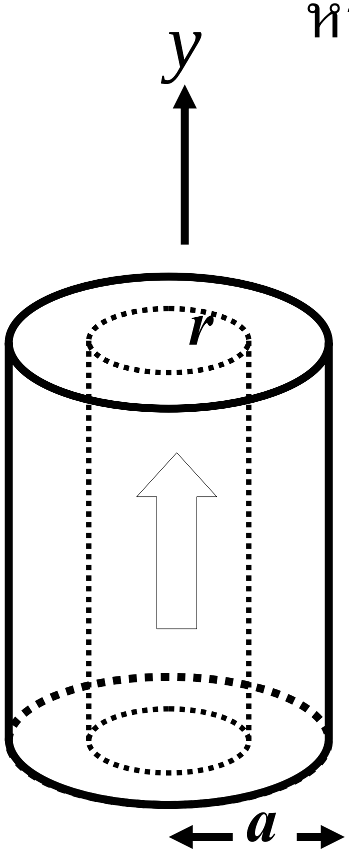
หรือ

ความเค้นเฉือนจากแรงหนืด	=	*ความเค้นเฉือนจากแรงภายนอก*

สำหรับการไหล ในสถานะคงตัว ทุกรูปแบบ

ความเค้นเฉือนจากแรงหนืด	=	*ความเค้นเฉือนจากแรงภายนอก*

หรือ $\boxed{J_p \quad = \quad \tau}$ หรือ $\boxed{-\eta \dfrac{\partial v_y}{\partial x} \quad = \quad \tau}$

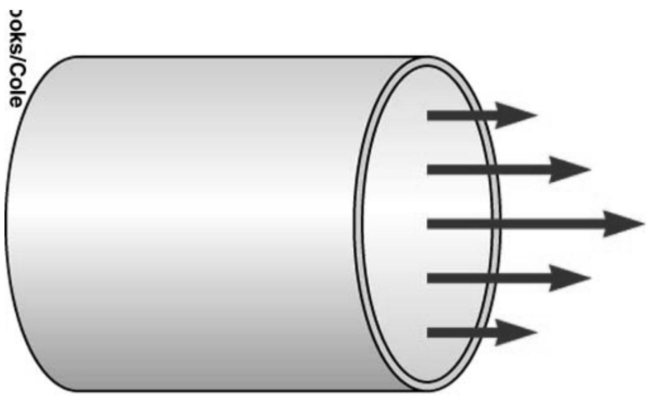


พิจารณาชั้นของไหลทรงกระบอกหนา ***dr***

รัศมี ***r*** ยาว ***l*** ดังรูป

จะได้ $$\tau \quad = \quad \frac{p(\pi r^2)}{2\pi r l} \quad = \quad \frac{pr}{2l}$$

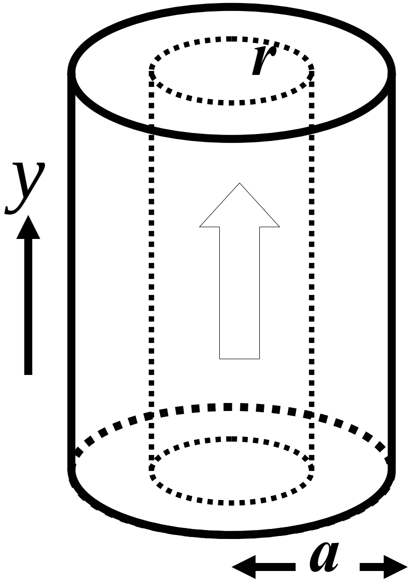
และ $$dv_y \quad = \quad -\frac{p}{2\eta l} r dr$$



$$dv_y = -\frac{p}{2\eta l} r dr$$

$$\int_0^{v_y} dv_y = -\frac{p}{2\eta l}\int_a^r r dr$$

$$v_y = \frac{p}{4\eta l}\left(a^2 - r^2\right)$$



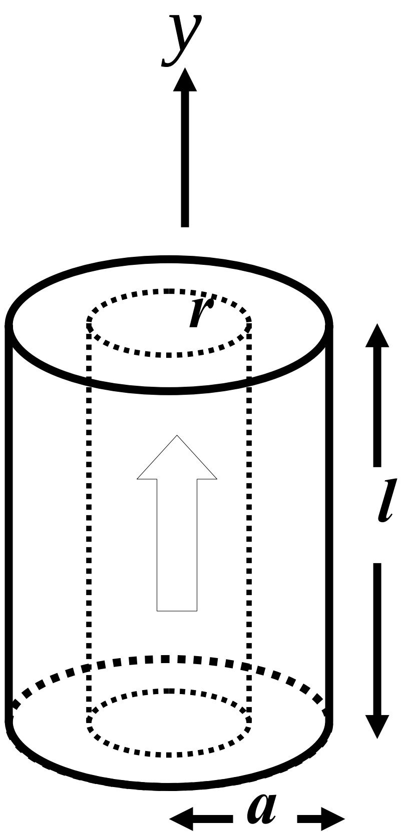
อัตราการไหล (***dQ***) เนื่องจากทรงกระบอกหนา ***dr***

$$dQ = \rho \cdot v_y dS$$

$$= \rho \cdot \left(\frac{p}{4\eta l}\right)\left(a^2 - r^2\right)\left(2\pi r dr\right)$$

$$dQ = \rho \cdot \left(\frac{p}{4\eta l} \right) \left(a^2 - r^2 \right) \left(2\pi r dr \right)$$

อัตราการไหล ***Q***



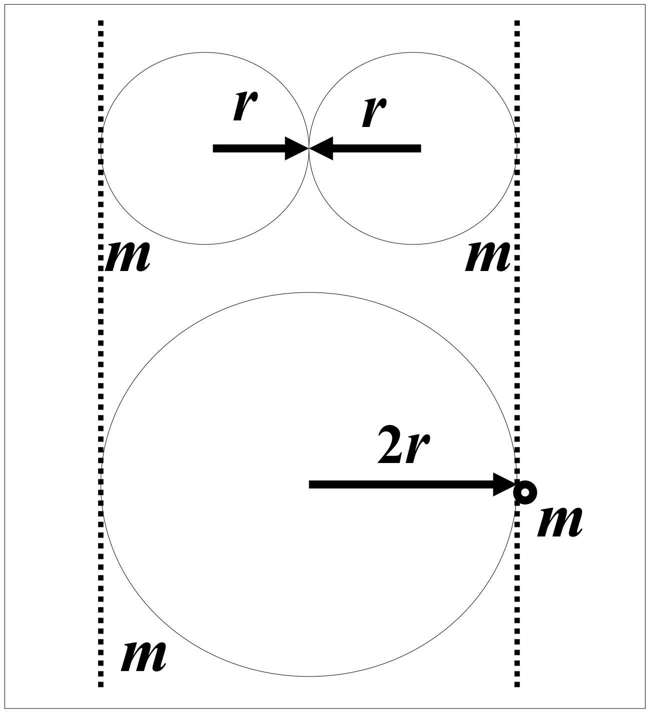
$$Q = \rho \cdot \left(\frac{2\pi p}{4\eta l} \right) \int_0^a \left(a^2 - r^2 \right) \left(r dr \right)$$

$$\boxed{Q = \frac{\rho \pi p a^4}{8\eta l}} \qquad \left(\mathrm{kg.s^{-1}} \right)$$

กฎของปัวเซย์ (Poiselle's law)

ระยะทางเฉลี่ยที่อนุภาคเคลื่อนที่ไปได้โดยไม่ชนกับอนุภาคอื่น ๆ

พิจารณาก๊าซอุดมคติความหนาแน่น n แต่ละอนุภาคมีมวล m รัศมี r และมีอัตราเร็วเฉลี่ย v

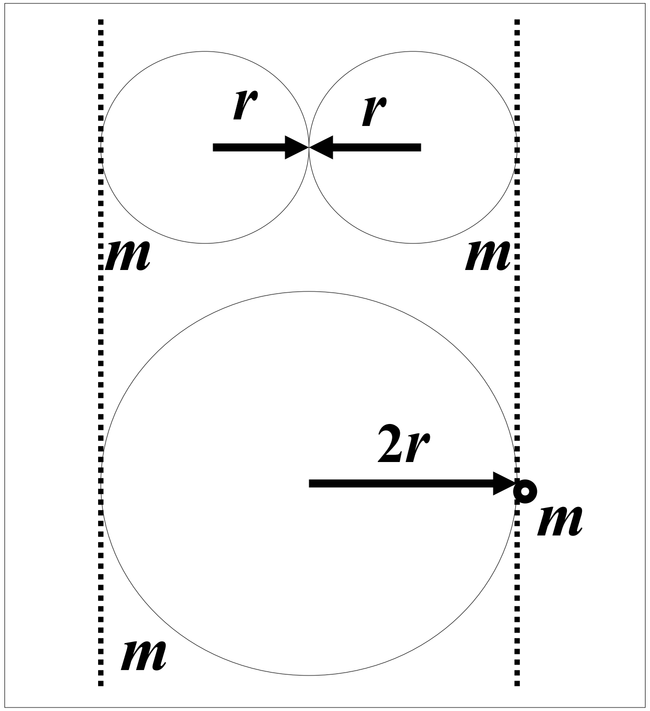


อนุภาคจะชนกันก็ต่อเมื่อระยะห่างระหว่างอนุภาคเท่ากับ **2*r***

เพื่อให้ง่าย เราจะพิจารณาว่าอนุภาคที่เราสนใจมีรัศมี **2*r*** อนุภาคอื่นที่เหลือเป็นจุด และประมาณว่าอนุภาคที่เป็นจุดนั้นหยุดนิ่ง

$$\text{ระยะเสรีเฉลี่ย } (l) = \frac{\text{ระยะทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ไป}}{\text{จำนวนครั้งที่ชน}}$$

$$= \frac{\text{ระยะทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ไป}}{\text{จำนวนอนุภาคที่อยู่ในปริมาตรซึ่งเกิดจากอนุภาคที่พิจารณาเคลื่อนที่}}$$



จะได้ $$l = \frac{v\Delta t}{n\left(\pi(2r)^2 v\Delta t\right)}$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2 n}$$

แต่เนื่องจากอนุภาคอื่น ๆ มิได้หยุดนิ่งอย่างที่ประมาณ

ดังนั้น $$\boxed{l = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi r^2 n}}$$

ตัวอย่าง ก๊าซอุดมคติที่อุณหภูมิ 300 K ความดัน 1.01×10^5 Pa และโมเลกุลมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 290 pm

1. จงคำนวณหาระยะเสรีเฉลี่ย

จาก $$l = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi r^2 n}$$

และ $$PV = NkT \Rightarrow n = \frac{N}{V} = \frac{P}{kT}$$

ดังนั้น $$l = \frac{kT}{4\sqrt{2}\pi r^2 P}$$

$$= \frac{(1.38 \times 10^{-23})(300)}{4\sqrt{2}\pi (290/2 \times 10^{-12})^2 (1.01 \times 10^5)}$$

$$= 1.1 \times 10^{-7} \ \mathrm{m}$$

☺

2. ถ้าโมเลกุลมีอัตราเร็วเฉลี่ย 450 m/s

จงคำนวณหาระยะเวลาเฉลี่ยที่อนุภาคไม่มีการชนกับอนุภาคอื่น

เวลาเสรีเฉลี่ย (Mean free time)

$$t_f = \frac{mean\ \ free\ \ path}{mean\ \ velocity} = \frac{1.1 \times 10^{-7}}{450}$$

$$= 2.44 \times 10^{-10} \text{ s}$$

☺

3. ใน 1 วินาที อนุภาค 1 ตัวจะชนกับอนุภาคอื่นกี่ครั้ง

ระยะเวลา 2.44×10^{-10} s จะชนกับอนุภาคอื่น 1 ครั้ง

ดังนั้น

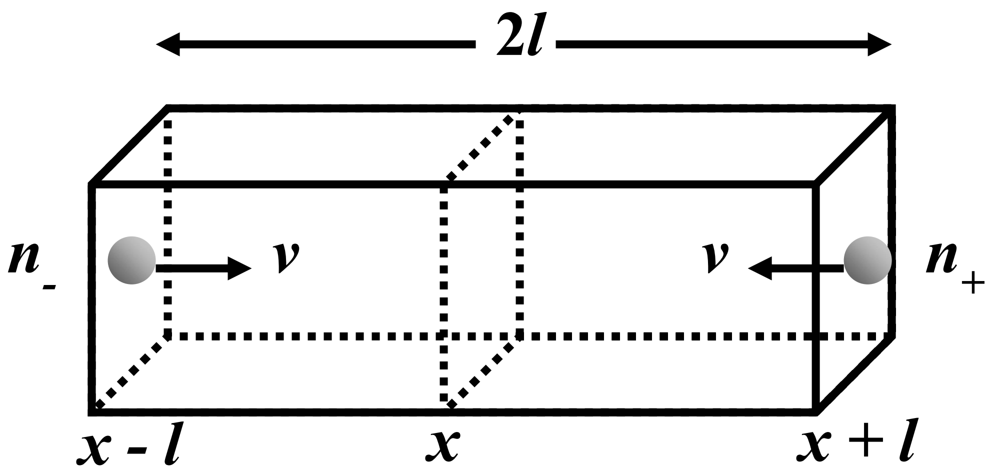
☺

ใน 1 วินาที จะชนกับอนุภาคอื่น $\frac{1}{2.44 \times 10^{-10}} = 4.1 \times 10^{9}$ ครั้ง

เพื่อเชื่อมโยงค่าสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ เข้ากับสมบัติของโมเลกุลของสาร

การฟุ้ง (Diffusion)

พิจารณา

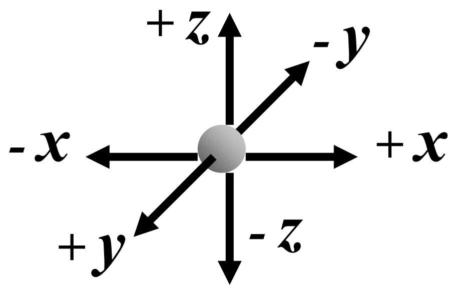


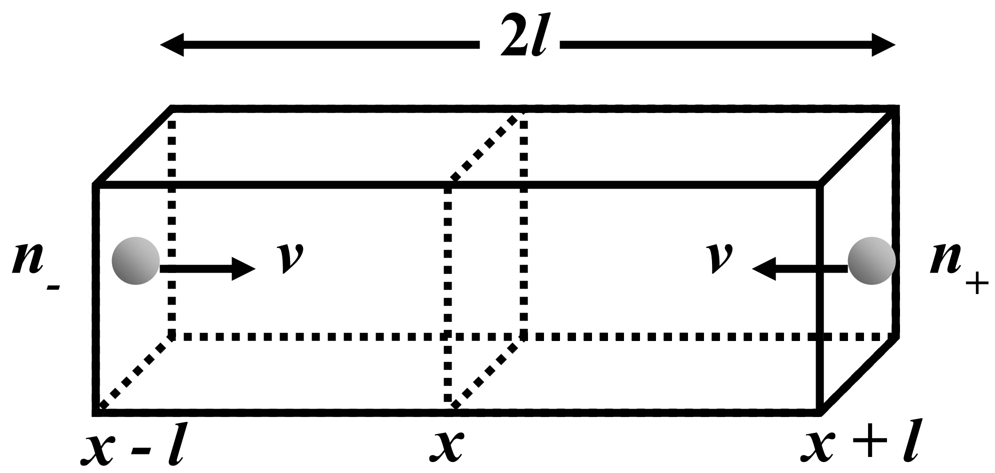
โดย n_-, n_+ : ความเข้มข้นของอนุภาค

v : อัตราเร็วเฉลี่ยของอนุภาค

l : ระยะเสรีเฉลี่ย

โอกาสที่อนุภาคจะเคลื่อนที่ไป
ในทิศทางที่เราสนใจคือ 1 ใน 6





ดังนั้น

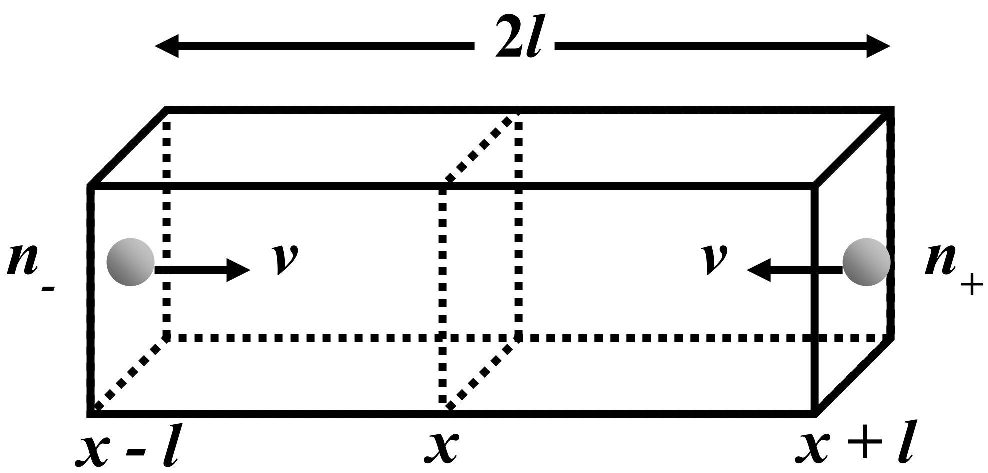
ความหนาแน่นกระแสอนุภาคผ่านตำแหน่ง ***x*** ในทิศทาง +***x*** คือ $J_+ = \frac{n_-}{6}v$

ความหนาแน่นกระแสอนุภาคผ่านตำแหน่ง ***x*** ในทิศทาง -***x*** คือ $J_- = -\frac{n_+}{6}v$

ความหนาแน่นกระแสอนุภาคสุทธิผ่านตำแหน่ง ***x*** คือ $J_x = J_- + J_+$

$$J_x = \frac{v}{6}(n_- - n_+)$$

เกรเดียนท์ความเข้มข้นของโมเลกุล



$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{(n_+ - n_-)}{2l}$$

จะได้ว่า

$$\boxed{J_x = -\frac{1}{3}vl\frac{\partial n}{\partial x}}$$

เทียบกับกฎของฟิกส์

$$J_x = -D\frac{\partial n}{\partial x}$$

นั่นคือ

$$\boxed{D = \frac{1}{3}vl}$$

จากที่ผ่านมา เราทราบว่า $v \propto \sqrt{T}$ และ $l \propto \dfrac{1}{n}$

แต่ $n = \dfrac{N}{V} = \dfrac{P}{kT}$ ดังนั้น $l \propto T^{-1}$

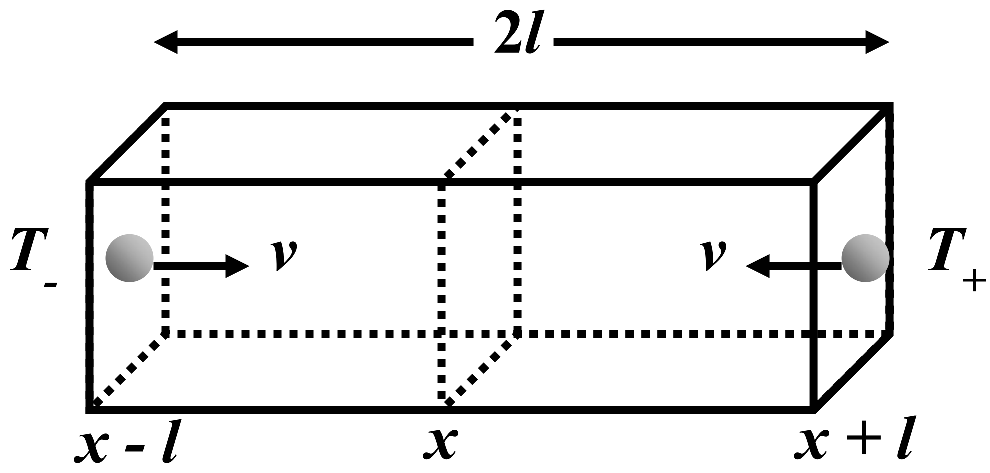
นั่นคือ $\boxed{D \propto T^{3/2}}$ เมื่อความดันคงที่

ข้อสังเกต ความหนาแน่นกระแส Z

$$J_Z = (particle\ \ density)(mean\ \ velocity)(Z\ /\ particle)$$

การนำความร้อน (Heat Conduction)

พิจารณา



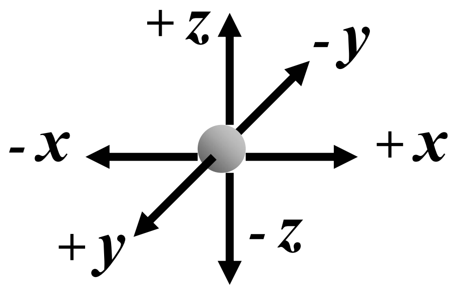
โดย

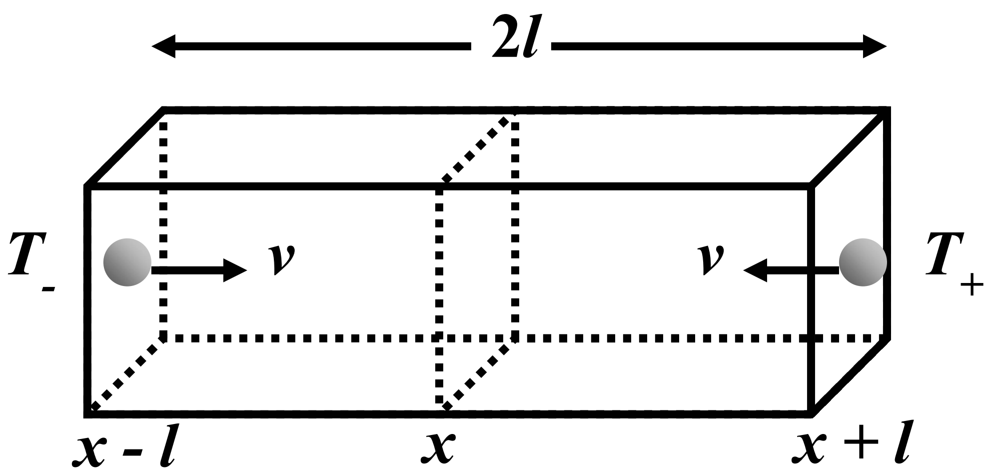
T_- , T_+ : อุณหภูมิ

v : อัตราเร็วเฉลี่ยของอนุภาค

l : ระยะเสรีเฉลี่ย

โอกาสที่อนุภาคจะเคลื่อนที่ไป
ในทิศทางที่เราสนใจคือ 1 ใน 6





ความหนาแน่นกระแสพลังงาน
ผ่านตำแหน่ง $\boldsymbol{x}$ ในทิศทาง $+\boldsymbol{x}$ คือ

$$J_{+} = \frac{n}{6} v \left(\frac{3}{2} k T_{-} \right)$$

ความหนาแน่นกระแสพลังงาน
ผ่านตำแหน่ง $\boldsymbol{x}$ ในทิศทาง $-\boldsymbol{x}$ คือ

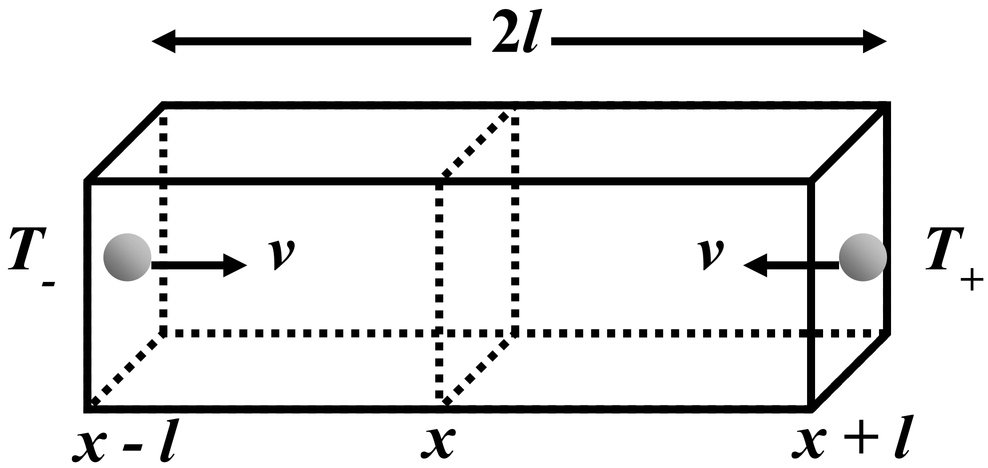
$$J_{-} = -\frac{n}{6} v \left(\frac{3}{2} k T_{+} \right)$$

ความหนาแน่นกระแสพลังงานสุทธิผ่านตำแหน่ง $\boldsymbol{x}$ คือ

$$J_{E} = J_{+} - J_{-} = \frac{vnk}{4} \left(T_{-} - T_{+} \right)$$

เกรเดียนท์ของอุณหภูมิ

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{(T_{+} - T_{-})}{2l}$$



จะได้ว่า

$$\boxed{J_E = -\frac{1}{2} vnkl \frac{\partial T}{\partial x}}$$

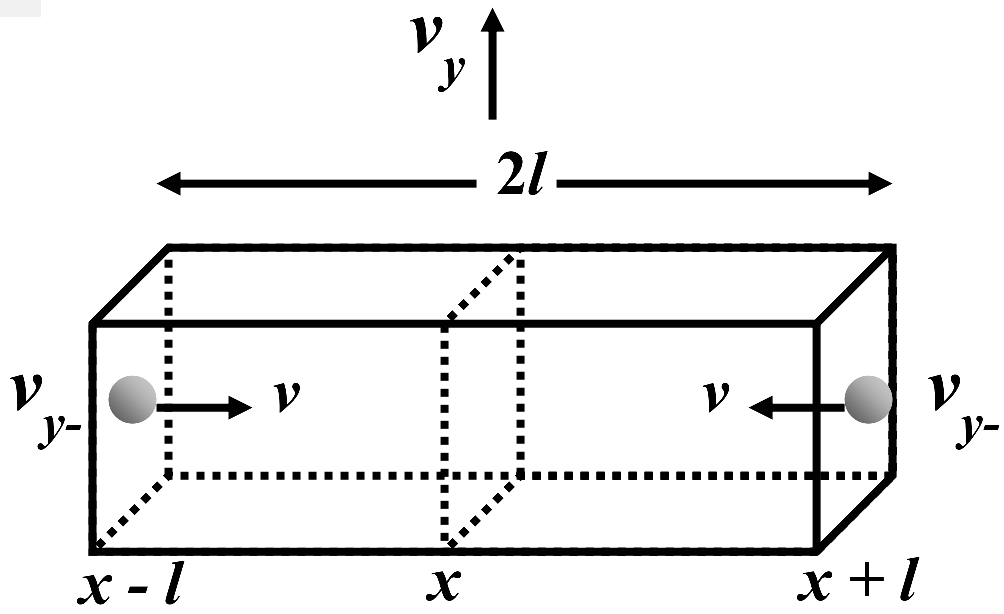
เทียบกับกฎของฟูเรียร์ $J_E = -K \frac{\partial T}{\partial x}$

นั่นคือ

$$\boxed{K = \frac{1}{2} vnkl} \propto T^{1/2}$$

ความหนืด (Viscosity)

พิจารณา

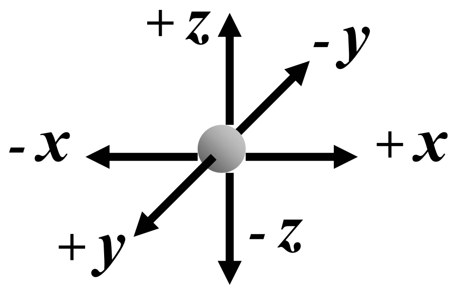


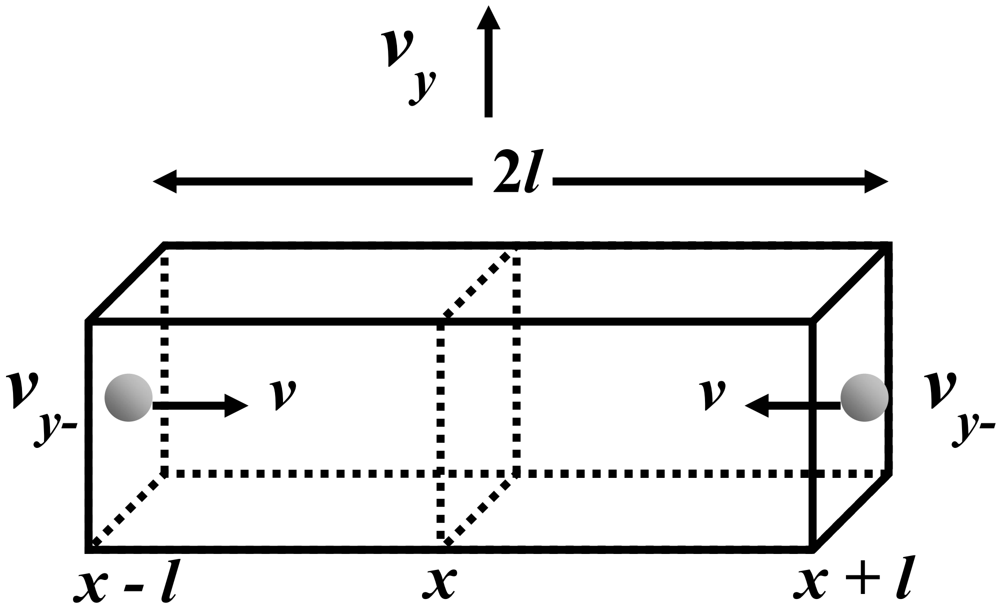
โดย v_{y-} , v_{y+} : ความเร็วของการไหล

v : อัตราเร็วเฉลี่ยของอนุภาค

l : ระยะเสรีเฉลี่ย

โอกาสที่อนุภาคจะเคลื่อนที่ไป
ในทิศทางที่เราสนใจคือ 1 ใน 6





ความหนาแน่นกระแสโมเมนตัม
ผ่านตำแหน่ง $\boldsymbol{x}$ ในทิศทาง $+\boldsymbol{x}$ คือ

$$J_{+} = \frac{n}{6} v\left(m v_{y-}\right)$$

ความหนาแน่นกระแสโมเมนตัม
ผ่านตำแหน่ง $\boldsymbol{x}$ ในทิศทาง $-\boldsymbol{x}$ คือ

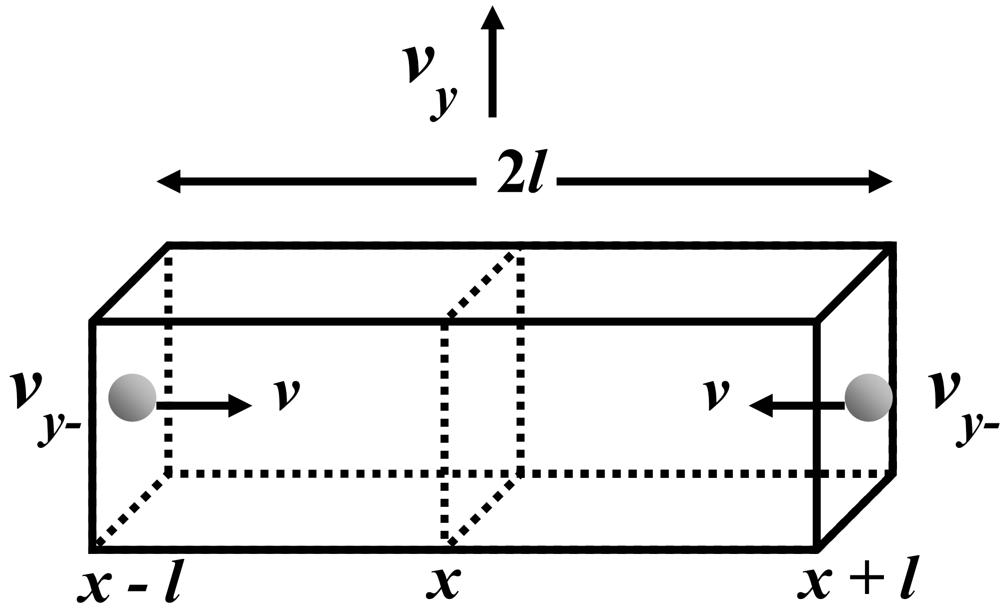
$$J_{-} = -\frac{n}{6} v\left(m v_{y+}\right)$$

ความหนาแน่นกระแสโมเมนตัมสุทธิผ่านตำแหน่ง $\boldsymbol{x}$ คือ

$$J_p = J_{+} - J_{-} = \frac{vnm}{6}\left(v_{y-} - v_{y+}\right)$$

เกรเดียนท์ของความเร็วในการไหล

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\left(v_{y+} - v_{y-}\right)}{2l}$$



จะได้ว่า

$$\boxed{J_p = -\frac{1}{3} vnml \frac{\partial v_y}{\partial x}}$$

เทียบกับกฎของการไหลที่มีความหนืด

$$J_p = -\eta \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

นั่นคือ

$$\boxed{\eta = \frac{1}{3} vnml}$$

หรือ

$$\boxed{\eta = \frac{1}{3} v\rho l}$$

โดยสรุป

$$\boxed{\begin{aligned} D &= \frac{1}{3}vl \\ K &= \frac{1}{2}vnkl \\ \eta &= \frac{1}{3}vnml \end{aligned}}$$

จะเห็นได้ว่าค่าสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ ล้วนขึ้นอยู่กับสมบัติของโมเลกุลของสาร ทำให้ค่าสัมประสิทธิ์สามารถเชื่อมโยงกันได้ทั้งหมด

ที่เป็นเช่นนี้ก็เนื่องจาก การเคลื่อนที่ปั่นป่วนของโมเลกุลของของไหลนั่นเอง