อนุกรมกำลัง (2-1)

ชื่อ ______________________________________ รหัสนิสิต ___________

นิยาม:อนุกรมกำลังรอบจุดศูนย์เขียนได้ในรูปของ

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$$

ถ้า $c_n=1$ แล้วได้ว่า $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ ลู่เข้าเมื่อ $-1 < x < 1$ และลู่ออกเมื่อ $|x| \geq 1$

อนุกรมกำลังในรูปทั่วไป:

รูปทั่วไปของอนุกรมกำลัง (อนุกรมกำลังรอบจุด a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \ldots$$

1. จงหาค่าที่เป็นไปได้ของ x ที่ทำให้อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ ลู่เข้า?

ทฤษฎีบท:สำหรับอนุกรมกำลัง มีความเป็นไปได้สามแบบเท่านั้นคือ

1. อนุกรมลู่เข้าเฉพาะที่จุด $x = a$ (รัศมีการลู่เข้าคือ 0)
2. อนุกรมลู่เข้าทุกค่า x (รัศมีการลู่เข้าคือ ∞)
3. มีค่าจำนวนจริงบวก R ซึ่งอนุกรมลู่เข้าถ้า $|x-a| < R$ และลู่ออกถ้า $|x-a| > R$

เรียก R ว่ารัศมีของการลู่เข้า สำหรับช่วงของการลู่เข้าของอนุกรมกำลังคือช่วงที่ทำให้อนุกรมลู่เข้า

2. จงหารัศมีและช่วงของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

3. จงหารัศมีและช่วงของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$.

4. จงหารัศมีและช่วงของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$.

5. จงหารัศมีและช่วงของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\ln(n))^n}$.

6. จงหารัศมีและช่วงของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{|x|}\right)^n$.

7. จงหารัศมีและช่วงของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n$.

ฟังก์ชันที่แทนได้ด้วยอนุกรมกำลัง:

ถ้า $|x|<1,\quad \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

1. จงแสดงว่า ฟังก์ชัน $\frac{1}{1+x^2}$ เขียนแทนได้ด้วยอนุกรมกำลัง พร้อมหารัศมีของการลู่เข้า

2. จงหาอนุกรมกำลังที่แทน ฟังก์ชัน $\frac{1}{2+x}$

3. จงหาอนุกรมกำลังที่แทนด้วยฟังก์ชัน $\frac{x^2}{a^3-x^3}$.

ทฤษฎีบท:ถ้าอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ มีรัศมีของการลู่เข้าคือ $R>0$ แล้ว f i จะมีอนุพันธ์บนช่วง $(a-R, a+R)$ พร้อมกันนี้

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$$

$$f'(x)=c_1+2c_2(x-a)+3c_3(x-a)^2+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(x-a)^{n-1}$$

$$\int f(x)dx=C+c_0(x-a)+\frac{c_1}{2}(x-a)^2+\ldots=C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

4. จงเขียนฟังก์ชัน $f(x)=\ln|1-x|$ ในรูปของอนุกรมกำลัง พร้อมหารัศมีของการลู่เข้า

ชื่อ ____________________________________ รหัสนิสิต ___________

5. จงเขียนฟังก์ชัน $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ ด้วยอนุกรมกำลังพร้อมหารัศมีของการลู่เข้า

ทฤษฎีบท:ถ้า f แทนด้วยอนุกรมกำลังรอบจุด a

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$$

เมื่อ $|x-a|<R$ แล้ว ค่าสัมประสิทธิ์คือ $c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

อนุกรมเทย์เลอร์:

อนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน f รอบจุด a คือ $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

ในกรณีที่ $a=0$ เรียกอนุกรมที่ได้ว่า อนุกรมแมคลอริน

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots$$

ทฤษฎีบท:ให้ $f(x)=T_n(x)+R_n(x)$ เมื่อ T_n คือพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี n^{th} ของฟังก์ชัน f รอบจุด a

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$ สำหรับ $|x-a|<R$

6. จงหาสูตรของอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชัน $f(x)=e^x$ พร้อมรัศมีการลู่เข้า

7. จงหาสูตรของอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชัน $f(x)=\sin(x)$ พร้อมรัศมีการลู่เข้า

8. จงหาสูตรของอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชัน $f(x)=\cos(x)$ พร้อมรัศมีการลู่เข้า

อนุกรมแมคลอรินที่สำคัญ:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots \text{ on } (-1,1)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \text{ on } (-\infty, \infty)$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \text{ on } (-\infty, \infty)$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \text{ on } (-\infty, \infty)$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \text{ on } [-1, 1]$$

เศษเหลือของเทย์เลอร์:ถ้า $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ สำหรับทุก $|x-a| \leq d$ แล้ว เศษเหลือ $R_n(x)$ ของอนุกรมเทย์เลอร์ดีกรี n สอดคล้องกับ $|R_n(x)| < \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}, |x-a| \leq d$

1. จงประมาณค่าของ $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ โดยให้มีความผิดพลาดไม่เกิน 0.1

2. จงคำนวณค่าของ $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

3. จงใช้อนุกรมกำลังในการหาค่าของ $\lim_{x \to 0} \frac{x - \arctan(x)}{x^3}$

ชื่อ ______________________________ รหัสนิสิต ____________

การคูณและการหารอนุกรมกำลัง:การบวกและการลบอนุกรมกำลังเหมือนกับการบวกและลบฟังก์ชันพหุนาม นอกจากนี้อนุกรมกำลังสามารถคูณและหารเหมือนกับพหุนาม

4. จงหาพจน์ที่ไม่เป็นศูนย์สามพจน์แรกของอนุกรมแมคลอรินสำหรับ $f(x) = e^x \sin(x)$

5. จงเขียน $f(x) = \int x\cos(x^3)$ ด้วยอนุกรมกำลัง

การประยุกต์พหุนามเทย์เลอร์:ให้ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ และพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี n^{th} คือ $T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}(x-a)^i$ และค่าสัมบูรณ์ของเศษเหลือคือ $|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)|$

6. จงประมาณค่าฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 2 รอบจุด $a = 8$
   1. จงหาความแม่นยำของการประมาณนี้ สำหรับค่า $7 < x < 9$?
   2. จงหาว่าค่าผิดพลาดสูงสุดในการใช้การประมาณนี้
   3. จงหาค่าของ x ที่ค่าประมาณดังกล่าวของฟังก์ชันผิดพลาดไม่เกิน 0.00005?

7. If $f(x) = e^{x^2}$, จงแสดงว่า $f^{(2n)}(0) = \frac{(2n)!}{n!}$

ผลบวกรีมันน์:ถ้า f มีค่าต่อเนื่องบน $[a, b]$ เราแบ่งช่วงดังกล่าวออกเป็น n ช่วงย่อยที่มีขนาดเท่า ๆ กัน $\Delta x)$ และ กำหนดให้ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นจุดปลายช่วงของช่วงย่อยและให้ $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ เป็นจุดที่สุ่มมาในช่วงย่อย แล้ว $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x$

การประมาณค่าอินทิกรัลด้วยค่าทางด้านซ้ายของช่วง:ถ้า x_i^* เลือกให้เป็นค่าทางด้านซ้ายของช่วง แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x$$

การประมาณค่าอินทิกรัลด้วยค่าทางด้านขวาของช่วง:ถ้า x_i^* เลือกให้เป็นค่าทางด้านขวาของช่วง แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

การประมาณค่าอินทิกรัลด้วยค่ากลางของช่วง:ถ้า x_i^* เลือกให้เป็นค่ากลางของช่วง แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx \approx M_n = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i)\Delta x \quad \text{เมื่อ} \quad \bar{x}_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$$

ขอบเขตของความผิดพลาดในการประมาณค่าอินทิกรัลของ M_n: ถ้า $|f''(x)| \le K$ สำหรับทุก x ใน $[a, b]$ แล้วค่าสัมบูรณ์ของความผิดพลาดในการประมาณค่าอินทิกรัล E_M คือ

$$|E_M| \le \frac{K(b-a)^3}{24n^2}.$$

การประมาณค่าอินทิกรัลด้วยสามเหลี่ยม:

$$\int_a^b f(x)dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2}\left(f(x_0)+2f(x_1)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$

ขอบเขตของความผิดพลาดในการประมาณค่าอินทิกรัลของ T_n: ถ้า $|f''(x)| \le K$ สำหรับทุก x ใน $[a, b]$ แล้วค่าสัมบูรณ์ของความผิดพลาดในการประมาณค่าอินทิกรัล E_T คือ

$$|E_T| \le \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$

การประมาณค่าอินทิกรัลโดยใช้เทอมอันดับสอง:

กำหนดให้ $y = Ax^2 + Bx + C$ ค่าพื้นที่ใต้กราฟพาราโบลาจาก $-h$ ไป h คือ

$$\int_{-h}^{h} Ax^2 + Bx + C\,dx = A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx\Big|_{x=-h}^{x=h} = 2\left(A\frac{h^3}{3} + Ch\right)$$

สังเกตว่า $y_0 = Ah^2 - Bh + C, y_1 = C, y_2 = Ah^2 + Bh + C$

ดังนั้น $y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$

หลักเกณฑ์ของซิมปสัน

$$S_N = \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$

ขอบเขตของความผิดพลาดในการประมาณค่าอินทิกรัลของ S_n: ถ้า $|f^{(4)}(x)| \le K$ สำหรับทุก x ใน $[a, b]$ แล้วค่าสัมบูรณ์ของความผิดพลาดในการประมาณค่าอินทิกรัล E_S คือ

$$|E_S| \le \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

1. จงใช้การประมาณค่าอินทิกรัลด้วยสามเหลี่ยมและจุดกึ่งกลางด้วย $n = 5$ เพื่อประมาณค่าอินทิกรัลของ $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$

ชื่อ ______________________ รหัสนิสิต ____________

2. จงใช้การประมาณค่าอินทิกรัลด้วยหลักเกณฑ์ของซิมป์สันเพื่อประมาณ $\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx$ โดยใช้ $n = 10$ แล้วหา n ที่รับประกันความถูกต้องของการประมาณไม่เกิน 0.001

3. จงใช้หลักเกณฑ์ซิมป์สันเพื่อหาค่าประมาณของ $\int_0^2 e^{-x^2}dx$ โดยใช้ $n = 8$ พร้อมหาค่า n ที่จะรับประกันการประมาณไม่เกิน 0.0001