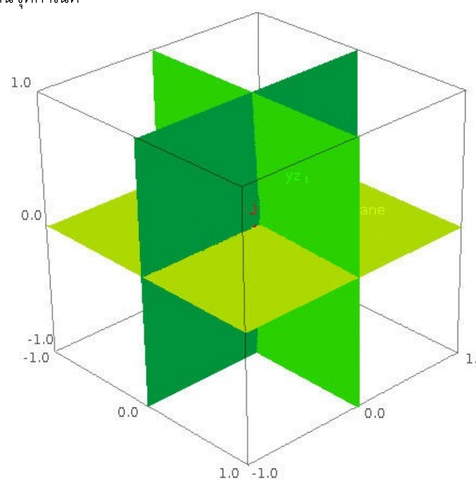
ปริภูมิสามมิติ (3-1)

ชื่อ ____ รหัสนิสิต ___________

จุดในระนาบสองมิติ (2D) ประกอบด้วยคู่อันดับ (x, y)

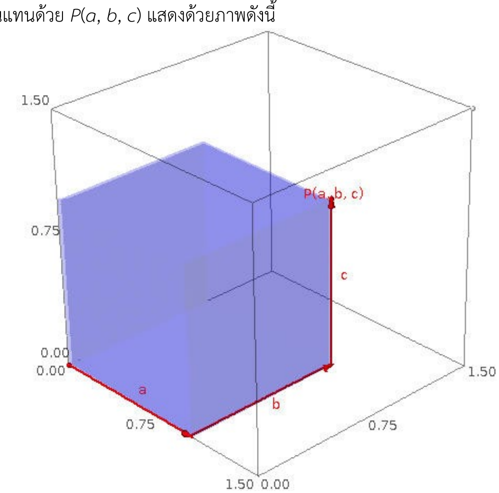
จุดในปริภูมิสามมิติ ประกอบด้วย สามสิ่งอันดับ (x, y, z)

$O = (0, 0, 0)$ แทนจุดกำเนิด



ระนาบ $xy = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$, ระนาบ $xz = \{(x, y, z) \mid y = 0\}$, ระนาบ $yz = \{(x, y, z) \mid x = 0\}$ โดยทุกระนาบตั้งฉากกันทุกคู่

จุดในปริภูมิเขียนแทนด้วย $P(a, b, c)$ แสดงด้วยภาพดังนี้



สูตรของระยะ:

กำหนดให้ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ แทนจุดในปริภูมิสามมิติ

$$|P_1 P2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

สมการทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k, l) และรัศมีคือ r เขียนได้ในรูปของ

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$$

1. จงลงจุด (0.5, 2), (4.0, -1), (2, 4.5) และ (1, -1.2) บนระนาบสองมิติ

2. จงอธิบายพร้อมร่างผิวโค้งในปริภูมิสามมิติของวัตถุที่เขียนแทนด้วยสมการ $x + y = 1$.

3. จงแสดงว่าสามเหลี่ยมที่มีจุดมุมเป็น $P(-2, 4, 0)$, $Q(1, 2, -1)$ และ $R(-1, 1, 2)$ คือสามเหลี่ยมด้านเท่า

4. จงหาสมการทรงกลมที่ผ่านจุดกำเนิดและมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (3, 2, 1)

เวกเตอร์ (3-2)

ชื่อ ______________________________ รหัสนิสิต ____________

เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด A และจุดปลายที่จุด B เขียนแทนด้วย $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$

กำหนดจุด $A(x_1, y_1, z_1)$ และ $B(x_2, y_2, z_2)$,

$$\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1\,,\,y_2-y_1\,,\,z_2-z_1)$$

ความยาวหรือขนาดของเวกเตอร์ $\boldsymbol{v}=(v_1, v_2, v_3)$ คือ $|\vec{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$

ถ้า $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ และ $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ และ c เป็นสเกลาร์ แล้ว

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1\,,\,a_2+b_2\,,\,a_3+b_3),\; c\vec{a}=(c\,a_1\,,\,c\,a_2\,,\,c\,a_3)$$

เวกเตอร์มาตรฐานได้แก่ $\vec{i}=(1,0,0),\ \vec{j}=(0,1,0),\ \vec{k}=(0,0,1)$

ดังนั้น, $\vec{v}=v_1\,\vec{i}+v_2\,\vec{j}+v_3\,\vec{k}$

สมบัติของเวกเตอร์

ถ้า $\vec{a}\,,\vec{b}$ และ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ และ c, d คือสเกลาร์ แล้ว

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
2. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{u})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{u}$
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
4. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$
5. $c(\vec{a}+\vec{b})=c\,\vec{a}+c\,\vec{b}$
6. $(c+d)\vec{a}=c\,\vec{a}+d\,\vec{b}$
7. $(c\,d)\vec{a}=c\,(d\,\vec{a})$
8. $1\vec{a}=\vec{a}$

1. จงหาผลบวกของเวกเตอร์ที่กำหนด พร้อมแสดงกราฟของเวกเตอร์ดังกล่าว (3, -1, 2), (2, 0, 1), (-1, 1, 0), (0, 2, 1)

2. จงหาเวกเตอร์หน่วยที่มีทิศเดียวกับเวกเตอร์ (3, -4, 0)

3. ถ้า $\vec{v}$ ชี้ไปยังจตุภาพแรกและทำมุม $\dfrac{\pi}{3}$ กับแกน x และ $|\vec{v}|=2,$ จงเขียนส่วนประกอบของเวกเตอร์ $\vec{v}$

ผลคูณจุด (DOT product)

ถ้า $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ and $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ แล้ว

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

สมบัติของผลคูณจุด

1. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$
2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
3. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
4. $(k\,\vec{a})\cdot\vec{b}=k\,(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot k\,\vec{b}$
5. $\vec{0}\cdot\vec{a}=\vec{a}$

สูตรอีกรูปแบบคือ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\theta)$

ถ้า $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ แล้ว เวกเตอร์ทั้งคู่ตั้งฉากกัน

ถ้า $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$ แล้ว เวกเตอร์ทั้งคู่ทำมุมแหลมกัน

ถ้า $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$ แล้ว เวกเตอร์ทั้งคู่ทำมุมป้านกัน

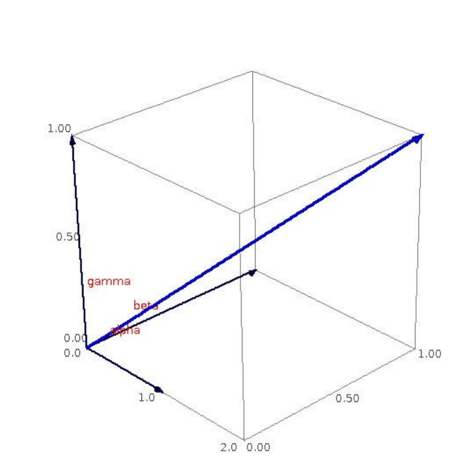
3. จงหาค่าของ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ และมุมของเวกเตอร์เมื่อ $\vec{a}=(1,1,1)$ and $\vec{b}=(-1,1,0)$.

มุมแสดงทิศทาง

$$\cos(\alpha)=\frac{a_1}{|\vec{a}|}$$

$$\cos(\beta)=\frac{a_2}{|\vec{a}|}$$

$$\cos(\gamma)=\frac{a_3}{|\vec{a}|}$$



ภาพฉาย

ภาพฉายสเกลาร์ของ $\vec{b}$ บน $\vec{a}$ คือ $comp_{\vec{a}}(\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot b}{|\vec{a}|}$

เวกเตอร์ภาพฉายของ $\vec{b}$ บน $\vec{a}$ คือ $proj_{\vec{a}}(\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$

4. จงหาเวกเตอร์ภาพฉายของเวกเตอร์ (2, 1, -1) บน (0, 2, 1)

5. จงแสดงว่า $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}$ และ $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$

6. จงหาค่า b ที่ทำให้เวกเตอร์ (-6, b, 2) และ (b, b^2, b) ตั้งฉากกัน?

ผลคูณไขว้ (Cross product)

กำหนดเวกเตอร์ $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ and $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$, ผลคูณไขว้ของ $\vec{a}$ and $\vec{b}$

คือ $\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2, a_3b_1-a_1b_3, a_1b_2-a_2b_1)$

มีค่าเท่ากับการคำนวณดีเทอร์มิเนนต์ของ $\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$

ทฤษฎีบท:เวกเตอร์ $\vec{a}\times\vec{b}$ ตัวฉากกับเวกเตอร์ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$

ถ้า θ คือมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{a}$ and $\vec{b}$ จะได้ว่า $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\theta)$

ทฤษฎีบท:เวกเตอร์สองเวกเตอร์ $\vec{a}, \vec{b}$ ขนาดกัน ก็ต่อเมื่อ $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

1. จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดอยู่ที่ P(1, 4, 6), Q(-2, 5, -1), R(1, -1, 1)

ทฤษฎีบท

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$
2. $(k\vec{a})\times\vec{b}=k(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(k\vec{b})$
3. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$
4. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})$
5. $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$
6. $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

2. สมมติว่า $\vec{a}\neq\vec{0}$

2.1 ถ้า $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$, แล้วจริงหรือไม่ที่ $\vec{b}=\vec{c}$?

2.2 ถ้า $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$, แล้วจริงหรือไม่ที่ $\vec{b}=\vec{c}$?

2.3 ถ้า $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ and $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$, แล้วจริงหรือไม่ที่ $\vec{b}=\vec{c}$?

3. จงแสดงว่า $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b})$

ชื่อ ______________________________ รหัสนิสิต __________

ปริมาตรของทรงเหลี่ยมด้านขนาน

ปริมาตรของทรงเหลี่ยมด้านขนานที่สร้างจากเวกเตอร์ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ คือ

$$V=A\,h=|\vec{b}\times\vec{c}||\vec{a}||\cos(\theta)|=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$$

4. จงใช้ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์ เพื่อแสดงว่าเวกเตอร์ทั้งหมดร่วมระนาบ $\vec{a}=(1,4,-7), \vec{b}=(2,-1,4), \vec{c}=(0,-9,18)$

5. จงใช้ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์เพื่อตัดสินว่า จุดทั้งหมดอยู่บนระนาบเดียวกัน P(1, 0, 1), Q(2, 4, 6), R(3, -1, 2) และ S(6, 2, 8)

ชื่อ ________________________________ รหัสนิสิต __________

เส้นตรง L เกิดจากจุด $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$ และเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\vec{v} = (a, b, c)$ ที่ขนานกับเส้นตรง เรียก สมการที่ได้ว่า สมการเชิงเวกเตอร์ (The vector equation)

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c).$$

สมการอิงพาราเมทริกซ์เสริม (The *parametric equation*): $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$, $z = z_0 + ct$.

เมื่อเรากำจัดพารามิเตอร์ t, สมการสมมาตร (the *symmetric equations*) เขียนได้เป็น

$$\text{Case } , a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\text{case } , a = 0, b \neq 0, c \neq 0, \quad x = x_{0,} \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\text{case } , a \neq 0, b = 0, c \neq 0, \quad y = y_{0,} \frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\text{case } , a \neq 0, b \neq 0, c = 0, \quad z = z_{0,} \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

$$\text{case } , a = 0, b = 0, c \neq 0, \quad x = x_{0,} y = y_0$$

$$\text{case } , a = 0, b \neq 0, c = 0, \quad x = x_{0,} z = z_0$$

$$\text{case } , a \neq 0, b = 0, c = 0, \quad y = y_{0,} z = z_0$$

เมื่อ $a = b = c = 0$, สมการดังกล่าวแทนได้ด้วยจุดเพียงจุดเดียว

1. จงหา สมการเวกเตอร์ และสมการอิงพารามิเตอร์ของเส้นตรง ที่ผ่านจุด (3, 2, 0) และขนานกับ $3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

ส่วนของเส้นตรง (*line segment*) จาก $\vec{r}_0$ to $\vec{r}_1$ กำหนดได้เป็น

$$\vec{r}(t) = (1 - t)\vec{r}_0 + t\vec{r}_1, 0 \leq t \leq 1.$$

เส้นตรงสองเส้นเบ้ ถ้าเส้นตรงทั้งสองไม่ตัดกัน และไม่ขนานกัน

2. จงพิสูจน์ว่าเส้นตรงสองเส้น L_1 และ L_2 เบ้หรือไม่

L_1: $x = 3 - t$, $y = 1 + 2t$, $z = 1 - t$, L_2: $x = 1 + t$, $y = 3 - 4t$, $z = t$.

ระนาบ

ถ้า $\vec{n} = (a, b, c)$, $\vec{r} = (x, y, z)$ and $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ แล้ว

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\text{or } ax + by + cz - d = 0$$

เรียก สมการเชิงเส้นของระนาบที่มี $\vec{n}$ แทน เวกเตอร์นอร์มัล (the *normal vector*)

3. จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด (1, 2, 0) กับเวกเตอร์นอร์มัล $\vec{n} = (2, 1, 1)$ จงหาจุดตัดของทุกแกน พร้อมร่างระนาบนี้?

4. จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด P(1, 2, -1), Q(0, 2, 1), R(3, 0, -1)?

5. จงหาจุดตัดระหว่างเส้นตรง $x = 2t$, $y = 1 - t$, $z = 3 + t$ กับระนาบ $2x - 3y + z = 1$

6. จงหามุมระหว่างระนาบ $x + y + z = 2$ และ $x - 3y + 2z = 1$?

สมการเส้นตรงและระนาบ (3-5)

ชื่อ ______________________________ รหัสนิสิต __________

สองระนาบขนานกัน ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์นอร์มัลขนานกัน

1. จงหาสูตรของระยะ D ระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1, z_1)$ กับระนาบ $ax + by + cz = d$

2. จงหาระยะระหว่างระนาบที่ขนานกันของ $x + y - z = 5$ กับ $2z - 2y - 2x = 1$?

3. จงตัดสินว่าข้อความต่อไปนี้ ข้อความใดเป็นจริงหรือเท็จ

3.1. เส้นตรงสองเส้นที่ขนานกับเส้นตรงเส้นที่สาม ต้องขนานกัน
3.2. เส้นตรงสองเส้นที่ตั้งฉากกับเส้นตรงเส้นที่สาม ต้องขนานกัน
3.3. เส้นตรงสองเส้นที่ตั้งฉากกับเส้นตรงเส้นที่สาม ต้องตั้งฉากกัน
3.4. เส้นตรงสองเส้นที่ขนานกับระนาบ ต้องขนานกัน
3.5. เส้นตรงสองเส้นที่ตั้งฉากกับระนาบ ต้องขนานกัน
3.6. เส้นตรงสองเส้นที่ตั้งฉากกับระนาบ ต้องตั้งฉากกัน
3.7. สองระนาบที่ขนานกับเส้นตรง ต้องขนานกัน
3.8. สองระนาบที่ตั้งฉากกับเส้นตรง ต้องขนานกัน
3.9. สองระนาบที่ตั้งฉากกับเส้นตรง ต้องตั้งฉากกัน

4. จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมและสมการสมมาตรของเส้นตรงที่ผ่านจุด (6, 1, -3) และ (2, 4, 5).

5. จงตัดสินว่า เส้นตรงที่ผ่านจุด (-4, -6, 1) และ (-2, 0, -3) ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด (10, 18, 4) และ (5, 3, 14)?

6. จงหาสมการเวกเตอร์ของส่วนของเส้นตรงจาก (2, -1, 4) ไปยัง (4, 6, 1)

7. จงหาสมการของระนาบผ่านจุด (1, -3, -2) และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\langle 1, -2, 0 \rangle$

8. จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุดกำเนิด และ (-2, 4, 0) และ (5, 1, 3)

9. จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด (1, -1, 1) และมีเส้นตรง $x = 2y = 3z$ อยู่ในระนาบ

10. จงหาจุดตัดของเส้นตรง ที่ผ่านจุดสองจุด (1, 0, 1) และ (4, -2, 2) กับระนาบ $x + y + z = 6$?

11. จงหาสมการระนาบที่ประกอบด้วยจุดที่ห่างจากทั้งสองจุด (1, 1, 0) และ (0, 1, 1) เป็นระยะเท่ากัน

12. จงหาระยะจากจุด (2,-1,4) ไปยังระนาบ $4x - 6y + z = 5$

ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์และเส้นโค้งสามมิติ (3-6)

ชื่อ ______________________________ รหัสนิสิต __________

ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ หรือเวกเตอร์ฟังก์ชัน คือการส่งเซตของจำนวนจริง ไปยังเซตของเวกเตอร์

$$\vec{r}(t)=(f(t),g(t),h(t))=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$$

โดเมนของเวกเตอร์ฟังก์ชัน คืออินเทอร์เซกชันของโดเมนของทุกส่วนประกอบของเวกเตอร์

ลิมิตของเวกเตอร์ฟังก์ชัน $\vec{r}(t)$ คือ

$$\lim_{t\to a}\vec{r}(t)=(\lim_{t\to a}f(t),\lim_{t\to a}g(t),\lim_{t\to a}h(t))$$

1. จงหาโดเมนของ $\vec{r}(t)=(\sqrt{t+1},\ln(4-t),0)$

2. กำหนดให้ $\vec{r}(t)=\left(e^{t-4},\dfrac{\sin(t-4)^2}{t-4},\dfrac{t^2-8t+16}{|t-4|}\right)$ จงหา $\lim_{t\to 4}\vec{r}(t)?$

การต่อเนื่องของเวกเตอร์ฟังก์ชัน

เวกเตอร์ฟังก์ชัน $\vec{r}(t)$ ต่อเนื่อง ถ้า $\lim_{t\to a}\vec{r}(t)=\vec{r}(a)$

3. จงแสดงเส้นโค้งสามมิติของเวกเตอร์ฟังก์ชัน $\vec{r}(t)=(t,1-t,2+3t)$

4. จงร่างเส้นโค้งสามมิติของเวกเตอร์ฟังก์ชัน $\vec{r}(t)=\cos(t)\vec{i}+\sin(t)\vec{j}+t\vec{k}$

อนุพันธ์และปริพันธ์ของเวกเตอร์ฟังก์ชัน

อนุพันธ์ $\vec{r}\,'(t)$ ของเวกเตอร์ฟังก์ชัน $\vec{r}(t)$ นิยามโดย

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\vec{r}\,'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)}{h}.$$

ถ้า $\vec{r}(t)=(f(t),g(t),h(t))$ แล้ว $\vec{r}\,'(t)=(f'(t),g'(t),h'(t))$

5. จงหาอนุพันธ์ของ $\vec{r}(t)=t^3\vec{i}+te^{-t}\vec{j}+\cos(5t)\vec{k}$

6. จงหาเวกเตอร์เส้นสัมผัสหน่วย $\vec{r}(t)=t^3\vec{i}+te^{-t}\vec{j}+\cos(5t)\vec{k}$ ที่จุดที่มีค่า t = 0

7. จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของสมการเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งฮีลิกซ์ $x=\cos(t)$, $y=2\sin(t)$, $z=t$ ที่จุด $(0, 2, \pi/2)$

หลักเกณฑ์การหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์ฟังก์ชัน

$$\frac{d(\vec{u}(t)+\vec{v}(t))}{dt}=\vec{u}\,'(t)+\vec{v}\,'(t)$$

$$\frac{d(c\,\vec{u}(t))}{dt}=c\,\vec{u}\,'(t)$$

$$\frac{d(f(t)\vec{u}(t))}{dt}=f'(t)\vec{u}(t)+f(t)\vec{u}\,'(t)$$

$$\frac{d(\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t))}{dt}=\vec{u}\,'(t)\cdot\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\cdot\vec{v}\,'(t)$$

$$\frac{d(\vec{u}(t)\times\vec{v}(t))}{dt}=\vec{u}\,'(t)\times\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\times\vec{v}\,'(t)$$

$$\frac{d(\vec{u}(f(t)))}{dt}=f'(t)\vec{u}\,'(f(t))$$

$$\frac{d(\vec{u}(t)+\vec{v}(t))}{dt}=\vec{u}\,'(t)+\vec{v}\,'(t)$$

อินทิกรัล

อินทิกรัลจำกัดเขตของเวกเตอร์ฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง $\vec{r}(t)=(f(t),g(t),h(t))$ นิยามโดย

$$\int_a^b\vec{r}(t)dt=\left(\int_a^b f(t)dt\right)\vec{i}+\left(\int_a^b g(t)dt\right)\vec{j}+\left(\int_a^b h(t)dt\right)\vec{k}$$

8. กำหนดให้ $\vec{r}(t)=\cos(-t)\vec{i}+\sin(2t)\vec{j}+t\vec{k}$ จงหา $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\vec{r}(t)dt$

เวกเตอร์ฟังก์ชันและเส้นโค้งสามมิติ (3-7)

1. จงแสดงว่า ถ้า $\vec{r}(t)$ เป็นเวกเตอร์ฟังก์ชันซึ่ง $\vec{r}\,''(t)$ มีค่า แล้ว
$$\frac{d(\vec{r}(t)\times\vec{r}\,'(t))}{dt}=\vec{r}(t)\times\vec{r}\,''(t)$$

2. ถ้า $\vec{r}(t)\neq\vec{0}$, จงแสดงว่า $\frac{d|\vec{r}(t)|}{dt}=\frac{\vec{r}(t)\cdot\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}(t)|}$

ความยาวของส่วนของเส้นโค้งและความโค้ง

ความยาวของเส้นโค้งในสามมิติ $\vec{r}(t)=(f(t),g(t),h(t))$ นิยามโดย
$$L=\int_a^b\sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2+(h'(t))^2}\,dt=\int_a^b|\vec{r}\,'(t)|dt$$

3. จงหาความยาวของส่วนของเส้นโค้งของฮีลิกซ์ตามสมการเวกเตอร์
$\vec{r}(t)=\sin(t)\vec{i}-\cos(t)\vec{j}+t\vec{k}$ จากจุด (0, -1, 0) ไปยังจุด (0, -1, 2)

ฟังก์ชันความยาวของเส้นโค้ง

ฟังก์ชันความยาวของเส้นโค้ง s นิยามโดย $s(t)=\int_a^t|\vec{r}\,'(u)|du$

โดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส $\frac{ds(t)}{dt}=|\vec{r}\,'(t)|$

ความโค้งของเส้นโค้งคือ $\kappa=\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|$ เมื่อ $\vec{T}(t)=\frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,''(t)|}$ หรือ
$$\kappa=\frac{|\vec{T}\,'(t)|}{|\vec{r}\,'(t)|}$$

4. จงแสดงว่า ความโค้งของวงกลมรัศมี a คือ $1/a$

ชื่อ ______________________________ รหัสนิสิต __________

ทฤษฎีบท:ความโค้งของเส้นโค้งของเวกเตอร์ฟังก์ชัน $\vec{r}(t)$ ได้เท่ากับ $\frac{|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)|}{|\vec{r}\,'(t)|^3}$

5. จงหาความโค้งของลูกบาศก์บิด (t, t^2, t^3) ณ จุดใดๆ และ และที่จุดกำเนิด (0, 0, 0)

เวกเตอร์นอร์มัล

สำหรับเส้นโค้ง $\vec{r}(t)$, มีเวกเตอร์มากมายไม่จำกัดที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์สัมผัสหน่วย $\vec{T}(t)$

แต่สำหรับทุก t ซึ่ง $|\vec{T}(t)|=1$ จะได้ว่า $\vec{T}(t)\cdot\vec{T}\,'(t)=0$

เวกเตอร์นอร์มัลหลักหน่วย นิยามได้โดย $\vec{N}(t)=\frac{\vec{T}(t)}{|\vec{T}(t)|}$

เวกเตอร์ไบนอร์มัลนิยามได้โดย $\vec{B}(t)=\vec{T}(t)\times\vec{N}(t)$

6. จงหาเวกเตอร์นอร์มัลหลักหน่วย และเวกเตอร์ไบนอร์มัลของฮีลิกซ์
$\vec{r}(t)=(\cos(t),\sin(t),t)$

7. จงหาเวกเตอร์ $\vec{T}(t),\vec{N}(t),\vec{B}(t)$ ของ $\vec{r}(t)=(t^{2,}\frac{2t^3}{3},t)$ ที่จุด (1, 2/3, 1)

8. จงหาเวกเตอร์สัมผัสหน่วย และเวกเตอร์นอร์มัลหลักหน่วยของ
$\vec{r}(t)=(2\sin(t),5t,2\cos(t))$

9. จงหาจุดในเส้นโค้ง y = ln x ที่มีความโค้งสูงสุด?