

สอบย่อย 4
7:55-9:55
* 1 แผ่น
* A4 เขียน 1 หน้า
2 แผ่น
* ครอบคลุมเนื้อหา

1. $z = f(x, y)$ ทดสอบ โดเมน และ พหุคูณ

(ใบมอ)

2. ลิมิต

2.1 ใช้กฎลิมิต

(ใบมอ)

2.2 แสดงว่า ลิมิตไม่มีค่า

2.3

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{ถ้า } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ถ้า } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

หรือว่า $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$

3. ความต่อเนื่อง

4. องค์ประกอบ $w = g(u, v, w)$

4.1 นิยาม

(ใบมอ)

4.2 อนุพันธ์ของ $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

(ใบมอ)

$$\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}, \frac{\partial w}{\partial w}$$

4.3. อนุพันธ์สูง

$$\frac{\partial^3 w}{\partial w \partial u^2}$$

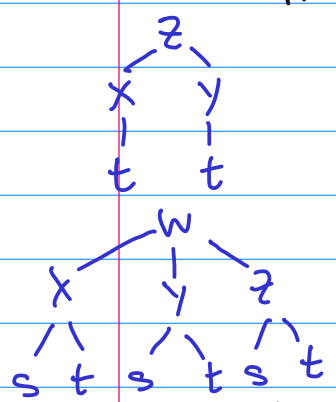
(ใบมอ)

4.4. กฎลูกโซ่

(ใบมอ)

$$z = f(x, y) \text{ และ } x = x(t), y = y(t)$$

$$w = f(x, y, z) \text{ และ } x = x(s, t), y = y(s, t), z = z(s, t)$$



4.5 การประยุกต์ใช้

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$$

ที่จุด (a, b)

ถ้า ความผิดพลาดที่จุด $|dz|$
" ลิมิต " $\frac{|dz|}{|z|}$
คือ อัตราส่วน $\frac{|dz|}{|z|}$

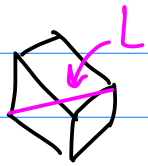
(ใบมอ & ข้อทำ)

$$L(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} (y - b)$$

ระบบสมการเชิงเส้นที่จุด (x_0, y_0, z_0) : $z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$

4.6 การหาค่าที่เหมาะสมที่สุด

(เพิ่มเติม & วิธีทำ)



* จุดวิกฤต

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

* ทดสอบว่าเป็นจุด

$$D = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} \right)^2$$

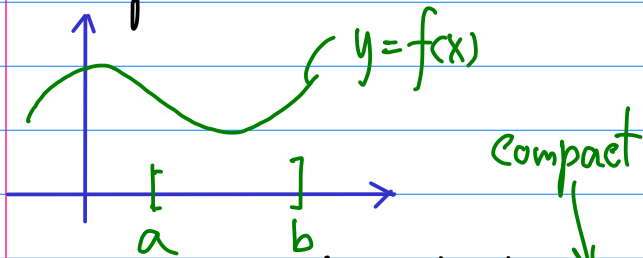
จุดสูงสุดสัมพัทธ์
จุดต่ำสุดสัมพัทธ์
จุด鞍ม้า
ที่ไม่ใช่จุดวิกฤต

1. ถ้า $D > 0$ และ $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0$ แล้ว (x_0, y_0) ต่ำสุดสัมพัทธ์
2. ถ้า $D > 0$ และ $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0$ แล้ว (x_0, y_0) สูงสุดสัมพัทธ์
3. ถ้า $D < 0$ แล้ว (x_0, y_0) จุด鞍ม้า

* การหาค่าสองตัวซ้อน

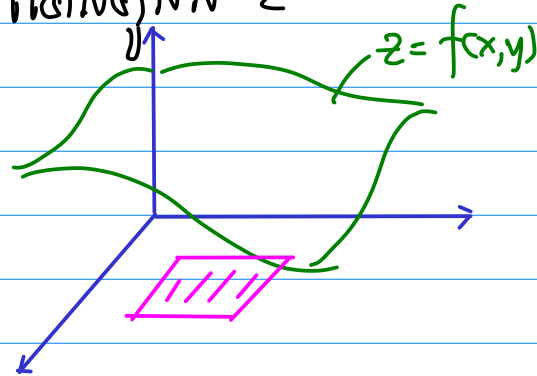
$$5. \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}$$

ไดโอดกัณฑ์ 1



ทข. ถ้า $y=f(x)$ ต่อเนื่อง บน ช่วงปิด $[a,b]$
 แล้ว f จะมีค่าสูงสุดและต่ำสุดปรากฏบน $[a,b]$

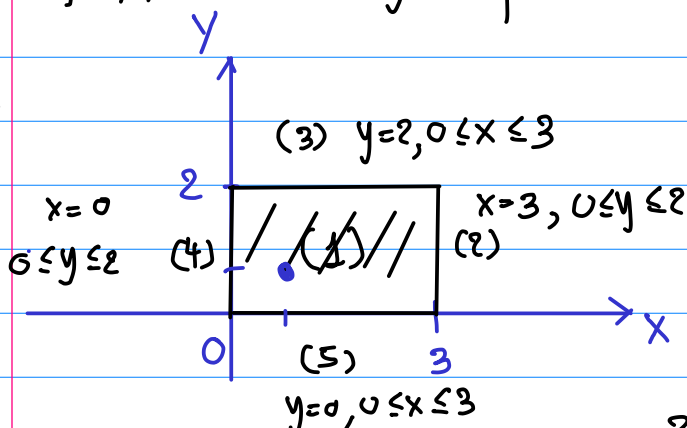
ไดโอดกัณฑ์ 2



ทข. ถ้า $z=f(x,y)$ ต่อเนื่อง บน ช่วงปิด $[a,b] \times [c,d]$
 แล้ว f จะมีค่าสูงสุดและต่ำสุดปรากฏบน $[a,b] \times [c,d]$

ข.ย $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ บน $[0,3] \times [0,2]$

วิธีทำ



พิจารณา กรณี (1),
 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x - 2y$
 $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 2$
 $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = -2$
 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2x + 2$
 $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$

$D = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} \right)^2$

หาจุดวิกฤต $\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x-2y \\ -2x+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \therefore x=1$ แล้ว $y=1$

กรณี (2) $x=3, 0 \leq y \leq 2, f(3,y) = 9 - 6y + 2y = 9 - 4y$ ค่าสูงสุดหรือต่ำสุดอยู่ที่ $y=0$
 กรณี (3) $y=2, 0 \leq x \leq 3, f(x,2) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ " " " " " "
 หมายความว่า $x=2$

กรณี (4) $x=0, 0 \leq y \leq 2, f(0,y) = 2y$
 กรณี (5) $y=0, 0 \leq x \leq 3, f(x,0) = x^2$

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$$

จุดสูงสุด จุดต่ำสุด	ค่าฟังก์ชัน	กรณี	จุด (x, y)	ค่า f(x, y)
(3, 0)	ค่าสูงสุด = 9	(1)	(1, 1)	1
(0, 0), (2, 2)	ค่าต่ำสุด = 0	(2)	(3, 0)	9 ← ค่าสูงสุด
		(2)	(3, 2)	1
		(3)	(0, 2)	4
		(3)	(2, 2)	0 ← ค่าต่ำสุด
		(3)	(3, 2)	1
		(4)	(0, 0)	0
		(4)	(0, 2)	4
		(5)	(0, 0)	0
		(5)	(3, 0)	9