แคลคูลัส สอบย่อย ๔ 7:55-9:55 จ. 8 ก.ค. 62
สอบย่อย ๖ 7:55-9:55 ศ. 12 ก.ค. 62
(เซ็นชื่อ)

40 คน สอบทดแทนกลางภาค 15 ก.ค. 62 7:55-9:55 } 45%
สอบย่อย ๑-๓ ลงชื่อไม่มาสอบ -15
สอบทดแทนปลายภาค 18 ก.ค. 62 7:55-9:55 } 45%
สอบย่อย ๔-๖ ลงชื่อไม่มาสอบ -15 (เซ็นชื่อ)

สอบย่อย ๔

1. บัตรนิสิต
2. ปากกา, ดินสอ, ยางลบ, ไม้บรรทัด
3. เตรียมติดเลข (เตรียมทับกระดาษ ไม่ให้ปลิว)
4. กระดาษ A4 จด 1 หน้า + A4 เปล่า 1 แผ่น

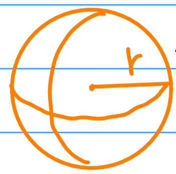
หัวข้อ (Double integral) 7:55-9:55

1. $\iint_R f\,dA$ โดยที่ R เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
2. $\iint_D f\,dA$ โดยที่ $D \subseteq \mathbb{R}^2$
3. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g_1(x) \le y \le g_2(x),\ a \le x \le b\}$
   $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid h_1(y) \le x \le h_2(y)\ \ c \le y \le d\}$

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

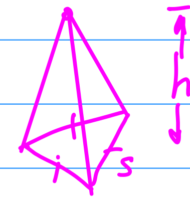
4. $\iint_D 1\,dA$ การหาพื้นที่ D

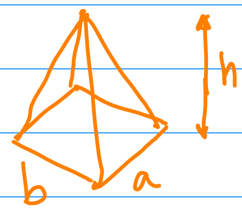
$\iint_D f(x,y)\,dA$ การหาปริมาตรของรูปทรงตัน ใต้ผิวโค้ง $z = f(x,y) \geq 0$



$\rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3$

$\rightarrow \frac{1}{3}\pi r^2 h$

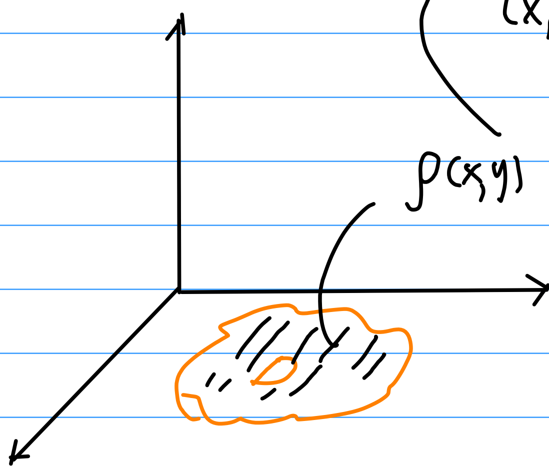




$M_x = \iint_D y\,\rho(x,y)\,dA$, $M_y = \iint_D x\,\rho(x,y)\,dA$

$(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}\right)$, $I_x = \iint_D y^2 \rho(x,y)\,dA$

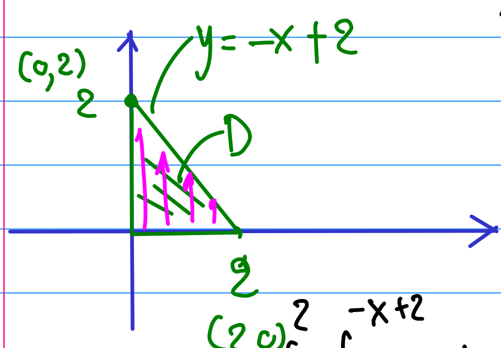
$I_y = \iint_D x^2 \rho(x,y)\,dA$



$\rho(x,y)$ ความหนาแน่น

$\underset{\text{มวล}}{m} = \boxed{\iint_D \rho(x,y)\,dA}$

Charges กระจายอยู่ใน พ.ท. Δ D ดังรูป โดยมีความหนาแน่นของประจุ ณ จุด $(x,y) \in D$, $\rho(x,y) = xy$ จงหา Total Charges



$$\text{Total charges} = \iint_D xy\,dA$$

$D = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq -x+2,\ 0 \leq x \leq 2\}$

$$\iint_D xy\,dA = \int_0^2 \int_0^{-x+2} xy\,dy\,dx = \int_0^2 x \frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=2-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x(4-4x+x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=2} - \frac{4x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=2} + \frac{x^4}{4}\Big|_{x=0}^{x=2}\right) = \frac{1}{2}\left(8 - \frac{32}{3} + 4\right) = \frac{1}{6}(36-32) = \frac{2}{3}$$

Charge กระจายอยู่ใน พ.ท. Δ D ดังรูป โดยมีความหนาแน่นของประจุ
ณ จุด $(x,y) \in D$, $\rho(x,y) = xy$
โมเมนต์ของ Charge ในแนวแกน x
" " y

$$M_x = \iint_D y\,\rho(x,y)\,dA$$

$$M_y = \iint_D x\,\rho(x,y)\,dA$$

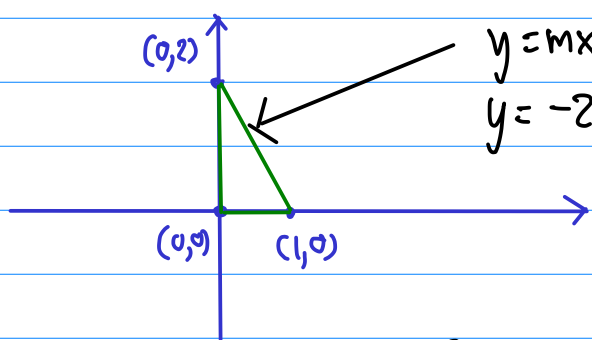
$m\bar{x} = M_y$ และ $m\bar{y} = M_x$

สรุป จุดศูนย์กลางมวล $\left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right)$

Find the mass and center of mass of a triangular lamina with vertices (0, 0), (1, 0), and (0, 2) if the density function is ρ(x, y) = 1 + 3x + y.

$(\bar{x}, \bar{y})$

วิธีทำ $D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le -2x+2,\ 0 \le x \le 1\}$



$y = mx + c$ ผ่านจุด (1,0) และ (0,2)

$y = -2x + 2$

$m = \frac{2-0}{0-1} = -2$

$y = -2x + C$

แทน $x = 1$ และ $y = 0$

$0 = -2 + C \therefore C = 2$

$$m = \iint_D \rho(x,y)\,dA = \int_0^1\int_0^{-2x+2} 1+3x+y\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 y\Big|_{y=0}^{y=2-2x} + 3xy\Big|_{y=0}^{y=2-2x} + \frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=2-2x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(2-2x + 3x(2-2x) + \frac{1}{2}(4-8x+4x^2)\right) dx$$

$-2x$ $-6x^2$
$+6x$ $2x^2$
$-4x$

$$= 4x\Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{4x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$3(2^2)(-2x)$

$3(2)(-2x)^2$

$$M_x = \iint_D y\,\rho(x,y)\,dA = \int_0^1\int_0^{2-2x} y+3xy+y^2\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=2-2x} + 3x\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=2-2x} + \frac{y^3}{3}\Big|_{y=0}^{y=2-2x}\,dx$$

$2+\frac{8}{3}$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}(4-8x+4x^2)+\frac{3x}{2}(4-8x+4x^2)+\frac{1}{3}(8-24x+24x^2-8x^3)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{14}{3}+2x-10x^2+\frac{10}{3}x^3\,dx = \frac{14}{3}x\Big|_{x=0}^{x=1}+\frac{2x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1}-\frac{10x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1}+\frac{10}{3}\frac{x^4}{4}\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{14}{3}+1-\frac{10}{3}+\frac{10}{12} = \frac{16+12+10}{12} = \frac{38}{12} = \frac{19}{6}$$

$$M_y = \iint_D x\,\rho(x,y)\,dA = \int_0^1\int_0^{2-2x} x+3x^2+xy\,dy\,dx$$

$-2x$ $\quad 6x^2-4x^2$

$+2x$

$\cancel{3}\ -6x^3+2x^3$

$$= \int_0^1 xy\Big|_{y=0}^{y=2-2x} + 3x^2y\Big|_{y=0}^{y=2-2x} + \frac{xy^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=2-2x}\,dx$$

$$= \int_0^1 2-2x+3x^2(2-2x)+\frac{x}{2}(4-8x+4x^2)\,dx$$

$$= \int_0^1 2+2x^2-4x^3\,dx = 2x\Big|_{x=0}^{x=1}+\frac{2x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1}-\frac{4x^4}{4}\Big|_{x=0}^{x=1} = 2+\frac{2}{3}-1 = \frac{5}{3}$$

$$(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{5}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{8},\ \frac{19\times\cancel{3}}{{}_{2}\cancel{6}\times 8}\right) = \left(\frac{5}{8},\frac{19}{16}\right)$$

$$I_x = \cancel{\iint_D y^2\rho(x,y)\,dA}\ ,\qquad I_y = \cancel{\iint_D x^2\rho(x,y)\,dA}$$